Таблица

Плотность материала, кг/м^3	7800	7800	7800
Диаметр проволоки, м	0,006	0,0055	0,003
Диаметр пружины, м	0,26	0,065	0,065
Модуль упругости 1-го рода, Па	2E+11	2E+11	2E+11
Первая частота мех. стерж., рад/с	183	2681	1460
Первая частота прибл. (K_2 = 1,44), рад/с	182,6	2677,7	1460,6
Разница, %	0,23	0,12	0,04

Величина коэффициента K_2, обеспечивающего наименьшую разницу между приближенным значением низшей собственной частоты и значением, полученным с использование теории механики стержней [1, 2], была подобрана равной $K_2 = 1,44$, т. е. выражение (2) имеет вид

$$p_1 \approx 1,44\sqrt{\frac{E}{\rho}}\frac{d}{D^2}. \qquad (3)$$

Полученное приближенное выражение позволит конструкторам проектировать «пружинные просеиватели», построенные по схеме, изображенной на рис. 1, без применения сложных численных моделей с приемлемой, в конструкторских расчетах, точностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Светлицкий В. А. Механика стержней: Учеб. для втузов. В 2-х ч. Ч. 1. Статика. — М.: Высшая школа, 1987. — 320 с.
2. Светлицкий В. А. Механика стержней: Учеб. Для втузов. В 2-х ч. Ч. 2. Динамика. — М.: Высшая школа, 1987. — 304 с.
3. Андреева Л. Е. Упругие элементы приборов. — М.: Машиностроение, 1981. — 392 с.
4. Расчеты на прочность в машиностроении / С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман и др. — М.: Машгиз, 1959. — Т. 3. — 1120 с.

539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ ПРИ СЖАТИИ

Канд. физ.-мат. наук, доц. Ю. Г. МОРОЗОВ, канд. физ.-мат. наук, ст. препод. Н. В. МИНАЕВА

Рассматривается поведение упругой полосы при всестороннем сжатии. На плоскости параметров, характеризующих внешнее воздействие, найдена граница области, в пределах которой напряженно-деформированное состояние полосы будет близко к однородному.

The behavior of an elastic strip is considered at all-round compression. On a plane of the parameters characterizing the exposure, the area boundary is found where the intense-deformed condition of a strip should be close to the homogeneous.

Рассмотрим поведение упругой полосы как наиболее простого по форме элемента различных конструкций (например, резиновых амортизаторов). В условиях плоской деформации напряженно-деформированное состояние полосы из упругого несжимаемого (для упрощения выкладок) материала будет описываться следующей системой уравнений [1, 2]:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau}{\partial y}=0\,;\ \frac{\partial\tau}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\,;\ \sigma_x-\sigma_y=4G\frac{\partial u}{\partial y}\,;\ \tau=G(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x})\,. \qquad (1)$$

Пусть полоса находится под воздействием сжимающего усилия интенсивности p_1, приложенного к двум противоположным сторонам при $y = \pm h \pm f(x)$, а на сторонах при $x = 0b\ \ x = l$ будем считать, что граничные условия заданы в перемещениях, т. е. граничные условия имеют следующий вид:

$$\sigma_n\big|_{y=q_1}=\sigma_n\big|_{y=q_2}=-p_1\,;\ \tau_n\big|_{y=q_1}=\tau_n\big|_{y=q_2}=0 \qquad (2)$$

$$u\big|_{x=0}=0\,;\ u\big|_{x=l}=\frac{p_1-p_2}{4G}l\,;\ v\big|_{x=0}=v\big|_{x=l}=\frac{p_2-p_1}{4G}y\,, \qquad (3)$$

где $q_1 = q_1(x)$ и $q_2 = q_2(x)$ — функции, описывающие верхнюю и нижнюю кромки сечения полосы в деформированном состоянии.

При $f(x) = 0$ задача (1)—(2) допускает решение

$$\sigma_x^0=-p_2\,;\ \sigma_y^0=-p_1\,;\ \varepsilon^0=0\,;\ u^0=\frac{p_1-p_2}{4G}x\,;\ v^0=\frac{p_2-p_1}{4G}y\,, \qquad (4)$$

т. е. граничные условия (3) мало отличаются от следующих граничных условий в напряжениях

$$\sigma_x\big|_{x=0}=\sigma_x\big|_{x=l}=-p_2\,;\ \tau\big|_{x=0}=\tau\big|_{x=l}=0\,.$$

Для того, чтобы выяснить при выполнении каких условий это решение имеет физический смысл, т.е. при достаточно малых $f(x)$ его можно принимать за приближенное решение задачи (1)-(3), как следует из [3,4], необходимо составить вспомогательную задачу относительно функций ζ_i, τ, которая в данном случае будет такой:

$$\frac{\partial(\sigma_x^0+\zeta_1)}{\partial x}+\frac{\partial(\tau^0+\zeta_3)}{\partial y}=0\,;\ \frac{\partial(\tau^0+\zeta_3)}{\partial x}+\frac{\partial(\sigma_y^0+\zeta_2)}{\partial y}=0\,;$$

$$\frac{\partial(u_x^0+\zeta_4)}{\partial x}+\frac{\partial(v^0+\zeta_5)}{\partial y}=0\,;\ \sigma_x^0-\sigma_y^0+\zeta_1-\zeta_2=4G\frac{\partial(u^0+\zeta_4)}{\partial x}\,;$$

$$\tau^0+\zeta_3=G\left[\frac{\partial(u_0+\zeta_4)}{\partial y}+\frac{\partial(v_0+\zeta_4)}{\partial x}\right]; \qquad (5)$$

$$(u_0+\zeta_4)_{x=0}=0\,;\ (u_0+\zeta_4)_{x=l}=\frac{p_1-p_2}{4G}l\,;$$

$$(v_0+\zeta_5)_{x=0}=(v_0+\zeta_5)_{x=l}=\frac{p_2-p_1}{4G}y\,;$$

$$(\sigma_n^0+\zeta_4)_{y=q_i}=p_1\,;\ (\tau^0+\zeta_3)_{y=q_i}=0\ (i=1,\,2).$$

Линеаризованная по ζ_i задача, соответствующая задаче (5), как следует из [3,4] с учетом того, что (4) является решением задачи (1)—(3) при $f(x) \equiv 0$, будет такой:

$$\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}+\frac{\partial\zeta_2}{\partial y}=0\,;\ \frac{\partial\zeta_3}{\partial x}+\frac{\partial\zeta_2}{\partial y}=0\,;$$

$$\frac{\partial\zeta_4}{\partial x}+\frac{\partial\zeta_5}{\partial y}=0\,;\;\zeta_1-\zeta_2=4G\frac{\partial\zeta_4}{\partial x}\,;\;\zeta_3=G\left(\frac{\partial\zeta_4}{\partial x}+\frac{\partial\zeta_5}{\partial x}\right); \tag{6}$$

$$\left[(p_2-p_1)\frac{\partial\zeta_5}{\partial x}+\zeta_3\right]_{y=\pm h}=0\,;\;\zeta_2(x,\pm h)=0 \tag{7}$$

$$\zeta_5(0,y)=\zeta_5(l,y)=\frac{\partial\zeta_4(0,y)}{\partial x}=\frac{\partial\zeta_4(l,y)}{\partial x}=0\,. \tag{8}$$

Решение задачи (6) будем искать в виде, удовлетворяющем условию несжимаемости

$$\zeta_4=\frac{\partial\Phi}{\partial y}\,;\;\zeta_5=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,. \tag{9}$$

Из остальных уравнений получаем следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}=0\,. \tag{10}$$

Решение уравнения (10) будем искать в виде

$$\Phi(x,y)=\varphi(y)\cos ax\,. \tag{11}$$

В результате подстановки (11) в (10) получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$f^{IV}-2a^2f''+a^4f=0\,. \tag{12}$$

Общее решение (12) имеет вид

$$\varphi(y)=c_1shay+c_2chay+c_3yshay+c_4ychay\,. \tag{13}$$

При $a=n\dfrac{\pi}{l}$ граничные условия (8), как следует из (9), (11), будут удовлетворены.

Из (6), (9),(11) и (13) получаем, что

$$\zeta_2=2a^2G(c_1chay+c_2shay+c_3ychay+c_4yshay)\sin ax\,;$$

$$\zeta_3=2aG[(ac_1+c_4)shay+(ac_2+c_3chay)+ac_3yshay+ac_4ychay)\cos ax\,; \tag{14}$$

$$\frac{\partial\zeta_5}{\partial x}=a^2(c_1shay+c_2chay+c_3yshay+c_4ychay)\cos ax\,.$$

В результате подстановки (14) в граничные условия (7) получаем следующие уравнения относительно произвольных постоянных c_i:

$$c_1ch\beta+c_2sh\beta+c_3hch\beta+c_4hsh\beta=0\,;$$

$$c_1ch\beta-c_2sh\beta-c_3hch\beta+c_4hsh\beta=0\,; \tag{15}$$

$$c_1a(1+\gamma)sh\beta+c_2a(1+\gamma)ch\beta+c_3[ch\beta+(1+\gamma)\beta sh\beta]+c_4[sh\beta+(1+\gamma)\beta sh\beta]=0\,;$$

$$-c_1a(1+\gamma)sh\beta+c_2a(1+\gamma)ch\beta+c_3[ch\beta+(1+\gamma)\beta sh\beta]-c_4[sh\beta+(1+\gamma)\beta sh\beta]=0\,,$$

где $\beta=ah$; $\gamma=\dfrac{p_2-p_1}{2G}=\gamma_2-\gamma_1$. (16)

Из равенства нулю определителя системы уравнений (15) получаем, что

$$\gamma = \frac{\beta - \beta th^2\beta \pm th\beta}{\beta(th^2\beta - 1)}. \qquad (17)$$

Обозначим наименьшую положительную величину из (17) через $\gamma_{кр}$. Тогда график функции $\gamma_2 = \gamma_{кр} - \gamma_1$ на плоскости параметров $\gamma_2 = \frac{p_2}{2G}$ и $\gamma_1 = \frac{p_1}{2G}$, как следует из (16), является границей области, в пределах которой решение задачи (4) и (1) при $f(x) \equiv 0$ имеет физический смысл.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ишлинский А. Ю. Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости // Укр. матем. журнал. — Т.6. — № 2. — 1954. — С. 140—146.
2. Ершов Л. В., Ивлев Д. Д. Об устойчивости полосы при сжатии // ДАН СССР: 1961. — Т. 138. — № 5. — С. 1047—1049.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 542 с.
4. Минаева Н. В. Адекватность математических моделей деформируемых тел. — М.: Научная книга, 2006. — 235 с.