

ОБ АЛЬТЕРНАТИВНОМ МЕТОДЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ НАКОПЛЕННОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ В ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МКЭ

Асп. П. В. МАНАХОВ, д-р техн. наук, проф. О. Б. ФЕДОСЕЕВ

Изложена проблема расчета пластичных тел по теории пластического течения. Предложен альтернативный метод, основанный на решении системы нелинейных уравнений программными средствами, реализующими алгоритм минимизации невязки функции. Представлены примеры решения типовых задач механики с использованием предлагаемого подхода.

In this article the problem of the plastic bodies calculate on the theory of plastic flow has been set out. Alternative method based on a system of nonlinear equations solution by software tools realizing residual minimization algorithm of a function has been proposed. The examples of the routine problems solution of mechanics have been presented using the suggested approach to determination of plastic deformation. Estimate of the method outlooks has been accomplished.

Наибольшее распространение получили два варианта теории пластичности: теория пластического течения и деформационная теория пластичности, являющаяся частным случаем теории течения [1]. Для решения поставленной задачи о расчете пластических деформаций используется первый вариант по причине больших пластических деформаций и наличия сложного нагружения, которые характерны при обработке металлов давлением, резанием. Именно эти технологические процессы представляют интерес для авторов статьи.

В основе теории пластического течения лежит соотношение, связывающее компоненты приращения пластических деформаций $d\varepsilon_{ij}^p$ с поверхностью текучести F (ассоциированный закон) [2]

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (1)$$

где λ – некоторый бесконечно малый скалярный множитель [3]; σ_{ij} – составляющие тензора напряжения. Соотношение (1) не интегрируется, т. е. не сводится к конечному соотношению между компонентами напряжения и деформации, так как содержит неизвестный скалярный множитель λ , для определения которого нужно располагать дополнительным соотношением.

Другая проблема в расчете пластичности по теории течения состоит в том, что связь между напряжениями и приращениями пластических деформаций присутствует лишь с момента достижения напряжениями поверхности текучести $F(\sigma) = 0$. Кроме того, при увеличении нагрузки напряжения могут выйти за пределы поверхности текучести. Следовательно, на каждом шаге расчета необходимо изменять напряжения так, чтобы выполнялось условие текучести.

Следует отметить, что для решения неоднородных задач пластичности применимы только численные методы, в частности МКЭ.

Современная методика расчета пластических течений [1] предполагает построение упруго-пластической матрицы D_{ep} , связывающей приращения напряжений и деформаций,

$$d\sigma = D_{ep} d\varepsilon, \quad (2)$$

где $D_{ep} = D - D_p = D - DAA^T D(H + A^T D A)^{-1}$; D, D_p – упругая и пластическая матрицы соответственно; $A = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$; $H = \frac{\partial F}{\partial \chi} d\chi \frac{1}{\lambda}$; χ – параметр упрочнения. Вычисление величины

H проводят по диаграмме одноосного растяжения материала как тангенс угла наклона в точке, соответствующей текущему уровню деформаций [1, 4].

Очевидно, что установление зависимости (2) — трудоемкая процедура, так как необходимо определять H , а следовательно, множитель λ в (1), по экспериментальным данным на каждом шаге вычислений.

Для определения накопленных пластических деформаций, напряжений и перемещений достаточно хорошо разработаны различные итерационные методы. Основные из них: метод переменной и касательной жесткости [4, 5], метод начальных напряжений и начальных деформаций [4, 6]. Суть каждого из этих методов сводится к построению системы линейных уравнений вида

$$K\Delta u = \Delta P + K_p \Delta u \quad (3)$$

и решения полученной системы итерационным способом [1]

$$K\Delta u_n = \Delta P + K_p \Delta u_{n-1}, \quad (4)$$

$$\Delta u_0 = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где $K = \int_V B^T D B dV$ – упругая матрица жесткости; $K_p = \int_V B^T D_p B dV$ – пластическая матрица жесткости; ΔP – приращение нагрузки; Δu – приращение перемещения; n – номер итерации; B – так называемая матрица градиентов, содержащая производные от перемещений. Методом начальных деформаций и напряжений вносят изменения в ΔP на каждой итерации

$\Delta P = \int_V B^T \Delta \sigma dV$, $\Delta \sigma = D\Delta \varepsilon + \Delta \sigma_0$ – для начальных напряжений, (5)

$$\Delta P = \int_V B^T D \Delta \varepsilon dV, \quad \Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_0 + \frac{\Delta \sigma}{D} \quad \text{– для начальных деформаций,} \quad (6)$$

где $\Delta \sigma_0$ – приращение начальных напряжений; $\Delta \varepsilon_0$ – приращение начальных деформаций. Существенным недостатком метода начальных деформаций является его неприменимость при рассмотрении идеальной пластичности, поскольку в этом случае деформации при заданных напряжениях нельзя определить однозначно.

Методом переменной и касательной жесткости вносят изменения в матрицу упругой жесткости K ; в последнем случае расчет ведут методом Ньютона – Рафсона. Одним из недостатков метода переменной жесткости является то, что на каждой итерации приходится заново строить матрицы жесткости и решать полученные уравнения.

Итерационный процесс продолжают до тех пор, пока отличие искомого приращения на соседних итерациях не станет меньше наперед заданного малого числа.

Несмотря на наглядность и очевидность данных итерационных процессов, использование их в расчетной программе ведет не только к увеличению ее объема, но и сопровождается сложностью оценки точности результатов и контроля количества итераций. Кроме того, как уже отмечалось выше, на каждом шаге очередного приращения нагрузки нужно проверять условия текучести, которое в обобщенной форме имеет вид

$$\sigma_e - \sigma_T = 0, \quad (7)$$

где σ_e – эквивалентное напряжение, вычисление которого зависит от выбора гипотезы начала текучести (гипотезы Мизеса, Треска – Сен-Венана, Мора – Кулона); σ_T – экспериментально определяемый предел текучести.

Основная роль предлагаемого метода вычисления накопленной пластической деформации состоит в расширении круга рассматриваемых задач, упрощении структуры программы, экономии памяти ЭВМ и возможности оценивать качество вычислительного процесса. В основе данного метода лежит решение системы нелинейных уравнений, состоящей из соотношений Прандтля—Рейса (для трехмерного случая шесть уравнений), и условие пластичности, которое для определенности дается в форме Мизеса

$$\begin{cases} d\varepsilon_{ij}^p = \lambda s_{ij} \\ \sigma_i - \sigma_T = 0 \end{cases} \quad (8)$$

где s_{ij} – компоненты девиатора напряжения;

$$\sigma_i = \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)}$$

— интенсивность напряжений.

Дифференциальные уравнения Прандтля – Рейса представляются в конечно-разностной форме. Переходя к скоростям деформации, получим

$$\frac{\varepsilon_{ij}^{p(k)} - \varepsilon_{ij}^{p(k-1)}}{\Delta t^{(k)}} = \lambda s_{ij}^{(k-1)}, \quad (9)$$

где k – номер шага вычислений; $\Delta t^{(k)}$ – интервал времени, принятый на k -ом шаге.

Таким образом, для каждого конечного элемента в общем трехмерном случае имеются семь уравнений с семью неизвестными ε_{ij} , λ (здесь речь идет о симплекс-элементе, деформации и напряжения внутри которого не меняются).

Для решения данной системы нелинейных уравнений обращаются к целевой функции, алгоритм работы которой использует начальные значения искомым величин и базируется на минимизации суммы квадрат, входящих в систему функций методами Гаусса – Ньютона и Левенберга – Марквардта [7]. Таким образом можно управлять процессом поиска решений, в частности устанавливать максимальное количество обращений к функциям системы уравнений, устанавливать максимальное количество итераций, прекращать итерации при достижении точности значений функций.

Общая последовательность вычисления пластических деформаций такова. Пусть имеется зависимость пути движения внешней силы от времени $s = v(t)$. Заданный интервал времени (или общий путь движения внешней силы) разбивается на определенное число шагов, которым соответствует определенный временной интервал (равный или переменный). На начальном этапе решается упругая задача до того момента, когда напряжения в конечном элементе не выйдут на поверхность текучести. Далее ведется пошаговая процедура вычисления пластических деформаций. На первом шаге принимаются нулевые пластические деформации и интенсивность напряжения, равная начальному значению предела текучести. Решая систему линейных уравнений (8), получают $\varepsilon_{ij}^{(1)}$, $\lambda^{(1)}$. Используя уравнения Ламе, модифицированные с учетом наличия пластических деформаций, находят узловые перемещения u_{ki} ($i = 1, 2, 3$) конечноэлементной модели. Следующий этап – определение суммарных деформаций ε_{ij}

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (10)$$

(тензорная форма записи), вычисление упругих деформаций ε_{ij}^e

$$\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p, \quad (11)$$

напряжений σ_{ij} по закону Гука, а также компонент девиатора напряжений. По известной эмпирической формуле для данного уровня пластических деформаций находят предел текучести σ_T и решают системе нелинейных уравнений на втором шаге временного интервала. Процесс повторяют снова для следующего интервала времени Δt и пути s продвижения внешней силы.

Изложенный выше подход к определению пластических деформаций используется для решения типовых задач механики. Удобным вычислительным инструментом является программный пакет Matlab.

На рис. 1 представлена расчетная схема нагружения тела прямоугольного сечения в случае плоской деформации. Ширина модели $a = 20$ мм; высота модели $h = 20$ мм; модуль упругости материала $E = 200$ ГПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$; предел текучести недеформированного материала $\sigma_{T0} = 320$ МПа; скорость движения сжимающего усилия $V = 1$ мм/с = const; продолжительность пластического деформирования $t = 5$ с; количество шагов $n = 100$. Трение между штампом и моделью отсутствует.

Закон упрочнения материала выбран в виде линейной зависимости от накопленных пластических деформаций ε^p :

$$\sigma_T = \sigma_{T0} + A\varepsilon^p, \quad (12)$$

где $A = 0,2$ — принятый коэффициент упрочнения.

Согласно [8] $\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0, \sigma_{22} = \text{const}$ $\varepsilon_{11}^e = \frac{\nu(1+\nu)\sigma_{22}}{E}; \varepsilon_{22}^e = \frac{\nu(1-\nu^2)\sigma_{22}}{E}$. Результаты

расчетов получились следующие: $\sigma_{22} = 320,1$ МПа; $\varepsilon_{11}^p = \varepsilon_{22}^p = -0,2504$, осадка тела в процессе пластической деформации равна 1 мм. Форма деформированного тела и суммарная его осадка Δ показаны на рис. 2. На рис. 3 продемонстрировано изменение множителя λ в процессе пластической деформации для упрочняющегося материала (рис. 3, а) и идеально пластичного (рис. 3, б).

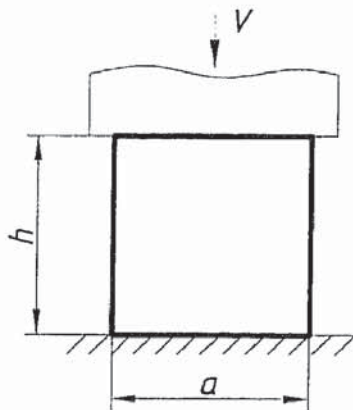


Рис. 1. Расчетная схема плоской деформации при сжатии тела прямоугольного сечения

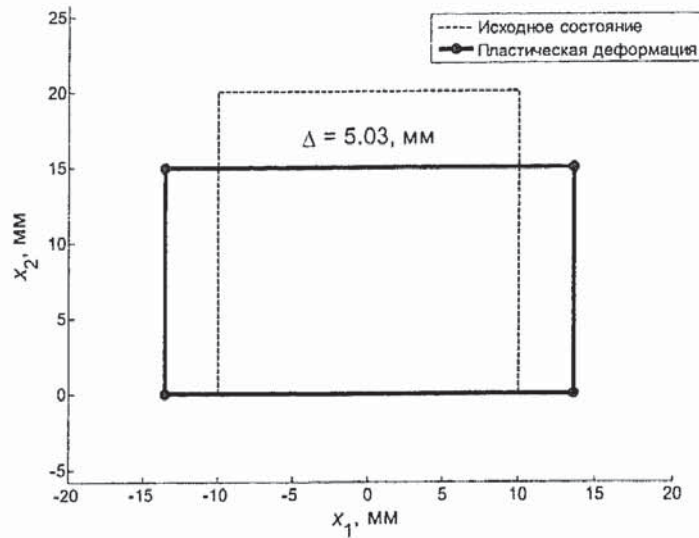


Рис. 2. Изменение формы тела для расчетной схемы по рис. 1

Другой пример решения задачи пластичности – вдавливание плоского штампа (рис. 4).

На рис. 5 показаны полученные методом конечных элементов по схеме упруго-пластического тела деформированное состояние полуплоскости и картина распределения напряжений σ_{22} . Основные характеристики процесса приняты такими же, как и в первом примере; кроме того, ширина штампа $a = 30$ мм, продолжительность пластического деформирования $t = 10$ с. Конечные элементы – линейные треугольные в количестве 4096.

Для сравнения на рис. 6 дано наглядное решение той же задачи по схеме жестко-пластического тела (решение Прандтля [3]) при тех же начальных условиях. Очевидно, что допущения, принимаемые при таком подходе (пренебрежение упругими деформациями и упрочнением материала), вносят значительную погрешность в результат вычислений и, как следствие этого, в значение равномерного напряженного состояния в треугольных областях BDE , AFG и FBC (рис. 6). Сопоставление картин распределения напряжений по этим двум схемам позволяет предположить, что МКЭ может дать более точное описание поведения тела в состоянии пластического течения.

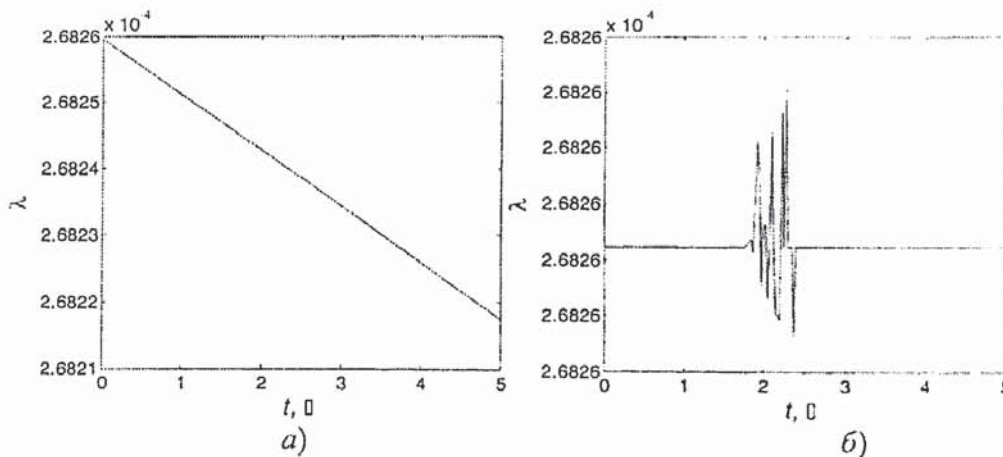


Рис. 3. Изменение множителя λ в зависимости от времени t для случая a — упрочнения, $A = 0,2$, b — идеальной пластичности

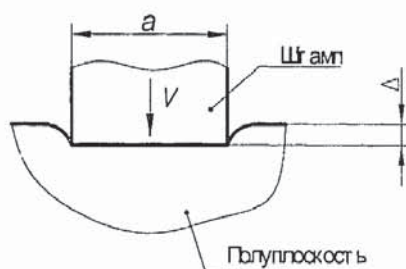


Рис. 4. Расчетная схема вдавливания плоского штампа

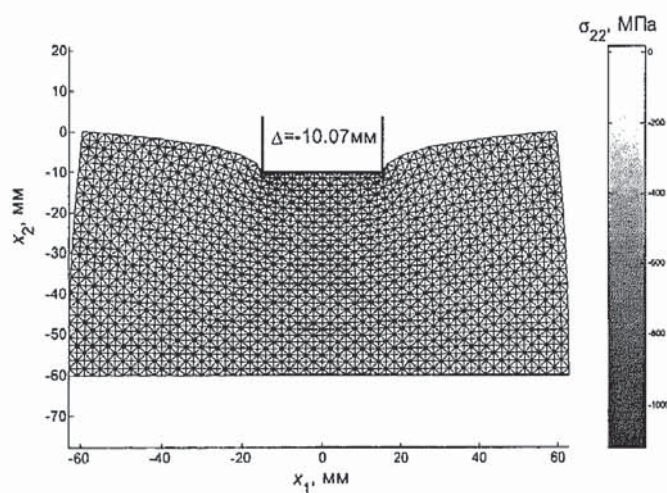


Рис. 5. Решение упруго-пластической задачи для расчетной схемы по рис. 4 с помощью МКЭ

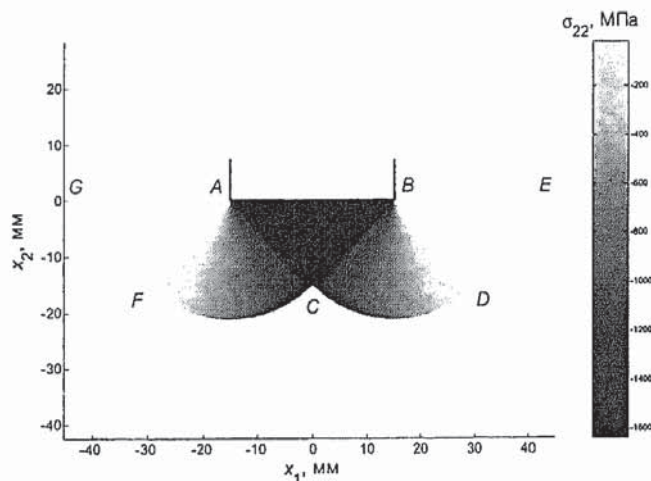


Рис. 6. Решение Прандтля для расчетной схемы по рис. 4

В заключение хотелось бы сказать о перспективах предлагаемого метода при решении задач пластичности. Современный уровень развития вычислительной техники позволяет создавать модели сложных технологических процессов. При этом важную роль играет правильная постановка задачи, корректное описание граничных условий. Естественно, что с подобной проблемой гораздо легче справится инженер-физик, представляющий

физическую сущность процесса. Поиск же решений имеющихся определяющих уравнений — прямая задача математика. Вследствие актуальности такого разделения функций можно предположить, что изложенный подход к определению пластических деформаций имеет все шансы получить дальнейшее развитие и способствовать описанию сложных физических явлений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Еременко С. Ю. Методы конечных элементов в механике деформированных тел. — Харьков: Изд-во «Основа» при Харьковском ун-те, 1991. — 272 с.
2. Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Тарлаковский Д. В. Теория упругости и пластичности. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 416 с.
3. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969. — 420 с.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975. — 541 с.
5. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. — М.: Мир, 1976. — 464 с.
6. Писаренко Г. С., Мажаровский Н. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Справочное пособие. — К.: Наукова думка, 1981. — 496 с.
7. Кетков Ю. Л., Кетков А. Ю., Шульц М. М. Matlab 6.x: программирование численных методов. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004. — 672 с.
8. Рекач В. Г. Руководство к решению задач прикладной теории упругости. — М.: Высшая школа, 1984. — 383 с.