

## РАСЧЕТ И КОНСТРУИРОВАНИЕ МАШИН

539.3

### РАЗРУШЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕЩИН И ЛОКАЛИЗАЦИИ ДЕФОРМАЦИЙ ПО СХЕМАМ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

Канд. физ-мат. наук, доц. С. Л. СТЕПАНОВ

*Для тонкостенных и оболочечных элементов конструкций, в которых имеются трещиновидные дефекты технологического или эксплуатационного характера, предлагается модель разрушения, основанная на представлении процесса деформирования в пластических зонах у вершин дефектов как жесткопластического течения. Это позволило сформулировать деформационный и энергетический критерии разрушения.*

*Сформулированная в рамках предложенной модели краевая задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма, решение которого доведено до численных результатов.*

*On base of deformation process presentation as hard plastic flow in defects' vertices of plastic zones for constructions with covering elements and thin wall elements. It allows to formulate deformation and energetic criterions.*

*Formulated by suggested model boundary value problem leads to Fredholm integral equation and its solution gives numeral results.*

В настоящее время не вызывает сомнений актуальность создания машиностроительных конструкций и изделий, обладающих большим ресурсом, прочностью и надежностью при различных и изменяющиеся условиях эксплуатации. Для решения поставленной задачи уже на стадии проектирования изделия необходимо разрабатывать не только рациональные силовые схемы элементов конструкции, но и применять материалы, обладающие высокими эксплуатационными свойствами и механическими характеристиками, такими, например, как удельная прочность, пластичность, трещиностойкость и т. д. Необходимо также учитывать возможность существования в конструкциях различного рода дефектов, которые могут иметь как технологический характер, так и возникать в процессе эксплуатации.

В свою очередь, решением проблемы несущей способности конструкций с трещиновидными дефектами, а также оценкой способности различных материалов сопротивляться разрушению занимается механика разрушения, в частности, механика упругопластического разрушения, которая, несмотря на большие усилия и значительные успехи как в теоретическом, так и в экспериментальном плане, все еще далека от своего завершения.

Ниже рассматриваются тонкостенные и оболочные элементы конструкций с трещиновидными дефектами, находящиеся в плоском напряженном состоянии. Для этого состояния известно модельное представление пластических областей у вершины трещин как узких, вытянутых вдоль трещины зон, предложенное Леоновым и Панасюком [1] и, независимо от них, Дагдейлом [2]. Хотя у этих авторов модели имели различный механический смысл и в [1], в отличие от Дагдейла, был введен критерий разрушения, названный критическим раскрытием трещины (КРТ), их математические формулировки и решения соответствующих краевых задач полностью совпадают, поэтому в библиографических источниках это представление чаще всего называют КРТ-модель.

В настоящем сообщении предлагается модель разрушения тонких пластин с трещинами, являющаяся продолжением и обобщением КРТ-модели и основанная на представлении пластических областей у вершины трещины как зон, в которых деформации происходят по схеме жесткопластического течения Прагера [3]. На рис. 1 представлена схема этого течения.

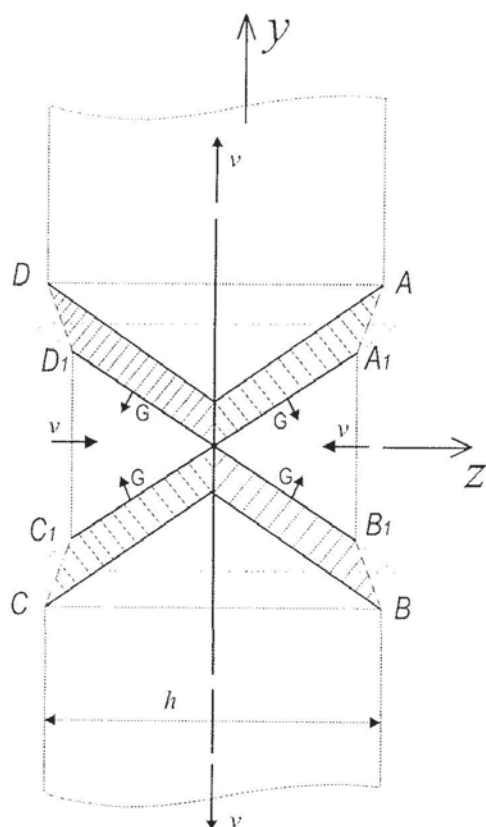


Рис. 1. Линии скольжения по схеме Прагера;  
v — смещение верхнего и нижнего концов полосы

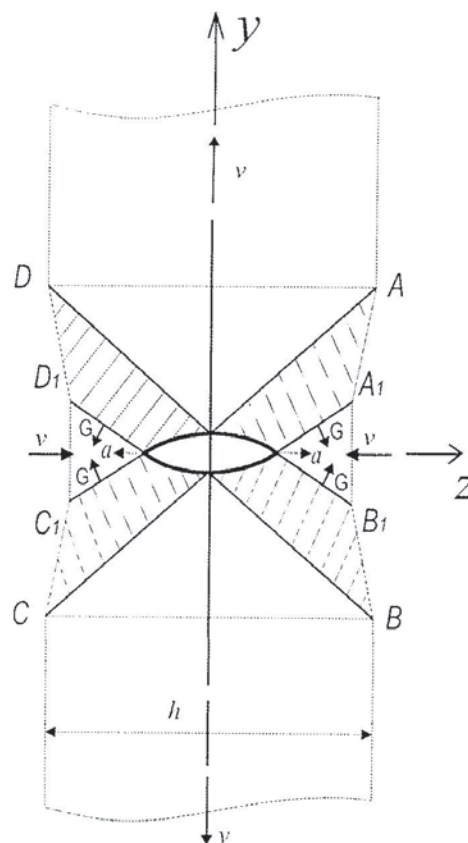


Рис. 2. Развитие внутренней трещины

Жесткопластический анализ соответствующей задачи о растяжении полосы при плоской деформации, включая обоснование и введение критериев разрушения, проведем, следуя результатам, полученным в [4]. Области  $A_1OB_1$  и  $C_1OD_1$  движутся как жесткие в направлении к точке  $O$ . Пластическая деформация локализуется вдоль изолированных линий скольжения  $B_1OD_1$  и  $A_1OC_1$ , которые являются линиями разрыва скоростей перемещений. При пересечении этих линий частицами материала происходит скачкообразное увеличение деформаций и их локализация в заштрихованных областях.

Мерой общих деформаций можно выбрать первое главное значение тензора конечных деформаций Альманси  $E_1$  и сформулировать следующий критерий: разрушение материала наступит в тсм случае, если расстояние между бесконечно близкими частицами изменяется на критическую величину, определяемую постоянной  $E_*$ :

$$\max E_1 \geq E_* . \quad (1)$$

В [4] показано, что можно сформулировать эквивалентный (1) критерий, использующий имеющую физический смысл величину объемной плотности энергии диссипации



$W$ , получаемой материальной частицей при пересечении линии разрыва скоростей перемещений:

$$\max W_1 \geq W_* \tag{2}$$

Здесь  $W$  определяется в виде

$$W_1 = \frac{[V_r]}{G + V_n} k, \tag{3}$$

где  $[V_r]$  – разрыв касательной составляющей скорости перемещения;  $V_n$  – нормальная компонента скорости движения частиц на линии разрыва;  $G$  – нормальная скорость движения линии разрыва;  $k$  – предел текучести материала на сдвиг. Величины  $E_1$  и  $W_1$  являются экспериментально определяемыми характеристиками материала.

Для рассматриваемой схемы течения входящие в (3) величины определяются следующими соотношениями

$$[V_r] = v \cdot \sqrt{2}; \quad V_n = \frac{v}{\sqrt{2}}; \quad \bar{W} = \frac{W}{k}; \quad E_1 = \frac{\bar{W}^2}{4} \left( \sqrt{1 + \frac{4}{\bar{W}^2}} - 1 \right), \tag{4}$$

где  $v$  – смещение берегов пластической зоны в единицу времени.

Очевидно, что в точке пересечения линий разрыва (точка  $O$ ) величины  $\bar{W}$  и  $E_1$  для разных линий определенным образом суммируются, вследствие чего в точке  $O$  зарождается внутренняя трещина, которая будет распространяться вдоль оси  $Z$  в обе стороны со скоростью  $a$  (рис. 2):

$$a = |G| \sqrt{2}; \quad a = v \left( \frac{2}{\bar{W}} - 1 \right). \tag{5}$$

Разрушение полосы произойдет при  $a + v = h/2$ , когда внутренняя трещина выйдет на свободную поверхность. Составив уравнение равновесия для полосы с учетом (5), получим

$$Ph = 2k(h - 2(a + v)) = \sigma_s \left( h - \frac{4v}{\bar{W}_*} \right), \tag{6}$$

где  $P$  – усилие, растягивающее полосу,  $\sigma_s$  – предел текучести.

Полученные уравнения используем в качестве граничных условий для задачи о бесконечной пластине толщиной  $h$  с центральной трещиной длиной  $2l$ , растягиваемой на бесконечности усилиями  $P$  (рис. 3; сечению  $A-A$  соответствует рис. 2).

В пластических зонах длиной  $c - l$  реализуется рассмотренное выше течение по схеме Прагера и справедливо уравнение (6):

$$p(x) = \sigma_s \left( 1 - \frac{4v(x)}{h \bar{W}_*} \right). \tag{7}$$

Отметим, что в КРТ-модели вместо (7) используется условие  $p(x) = \sigma_s$ . Таким образом, в рассматриваемой задаче на части контура, соответствующего пластическим зонам, задается не распределение усилий, а связь между напряжениями и смещениями.

Предельное состояние пластины с трещиной определяется согласно КРТ-критерию при условии достижения раскрытием трещины в ее вершине критического значения:

$$v(l) \geq v_*, \tag{8}$$

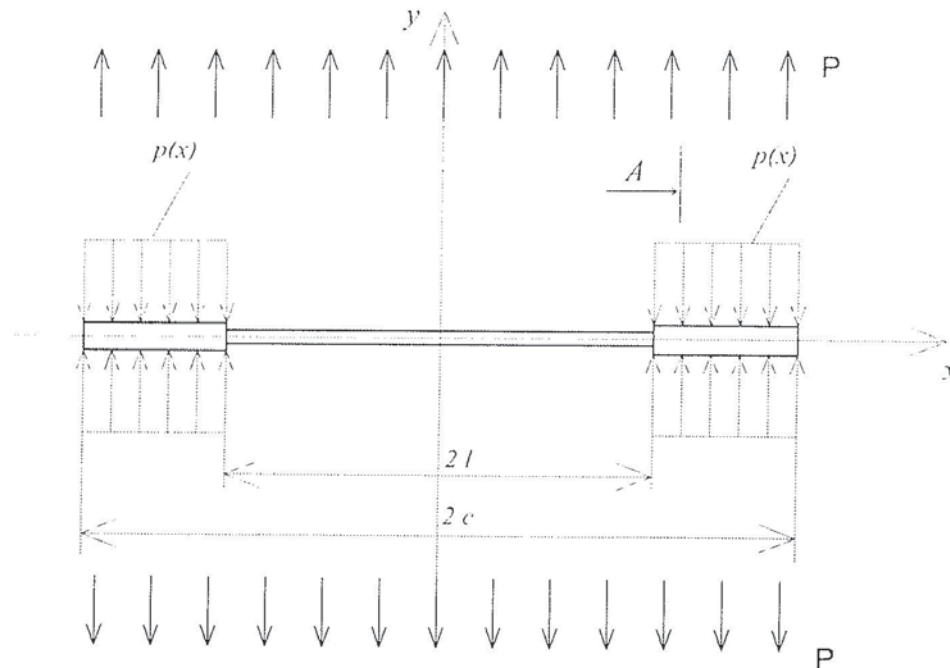


Рис. 3. Граничные условия для трещины

Очевидно, совершенно логичной будет выглядеть увязка этого условия с моментом выхода внутренней трещины на свободные поверхности. Исходя из этого, можно определить связь между КРТ-критерием и энергетическим критерием (2):

$$v(l) = \frac{\bar{W}_* h}{4}. \quad (9)$$

С другой стороны, условие (9) представляет собой теоретическую зависимость между критическим раскрытием трещины и толщиной материала. Ее характер качественно совпадает с характером имеющихся экспериментальных данных, приведенных в [5] для малых толщин и для начального возрастающего участка зависимости вязкости разрушения от толщины материала.

Решение упругой задачи с граничными условиями (7) будем искать путем суперпозиции двух решений, первое из которых – это однородное растяжение пластины без трещины, второе – решение для трещины с приложенными на ее берегах напряжениями, исчезающее на бесконечности. Поскольку первое решение не даст вклада в концентрацию напряжений, рассмотрим только второе состояние, для которого запишем на основании (7) следующие граничные условия:

$$p(x) = \begin{cases} -p, & |x| \leq l, \\ -p + \sigma_s \left( 1 - \frac{4v(x)}{h \bar{W}_*} \right), & l \leq |x| \leq c, \\ v(x) = 0, & |x| \geq c. \end{cases} \quad (10)$$

где  $v(x)$  – смещение берегов трещины и пластических зон.

В полученной задаче на оси  $x$  касательные напряжения  $\sigma_{xy} = 0$ . В этом случае напряжения и перемещения могут быть выражены через одну аналитическую функцию комплексного переменного по формулам Колосова—Мусхелишвили. Не останавливаясь

на подробностях ее отыскания [6], [7], сразу выпишем решение в наиболее удобном для дальнейшего исследования виде:

$$v(x) = \frac{1}{\pi E} \int_{-c}^c p(\xi) \Gamma(c, x, \xi) d\xi, \quad |x| \leq c; \quad (11)$$

$$\sigma(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{x^2 - c^2}} \int_{-c}^c \frac{p(\xi) \sqrt{c^2 - \xi^2}}{x - \xi} d\xi, \quad |x| \leq c.$$

Подставим граничные условия (10) в первое уравнение (11) и после некоторых преобразований получим неоднородное уравнение Фредгольма второго рода относительно смещений берегов трещины  $v(x)$ :

$$v(x) - \lambda \frac{2}{h} \left( \int_{-c}^{-l} + \int_l^c \right) v(\xi) \Gamma(c, x, \xi) d\xi = f(x). \quad (12)$$

Здесь

$$\Gamma(c, x, \xi) = \ln \frac{c^2 - x\xi + \sqrt{(c^2 - x^2)(c^2 - \xi^2)}}{c^2 - x\xi - \sqrt{(c^2 - x^2)(c^2 - \xi^2)}}, \quad \lambda = \frac{2\sigma_s}{\pi \bar{W} E}, \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{\sigma_s}{\pi E} \left( \frac{P}{\sigma_s} \int_{-c}^c \Gamma(c, x, \xi) d\xi - \left( \int_{-c}^{-l} + \int_l^c \right) \Gamma(c, x, \xi) d\xi \right).$$

К (12) для определения величины  $c$  необходимо присоединить условие плавности смыкания берегов пластических зон или эквивалентное условие конечности напряжений:

$$\lim_{x \rightarrow c} v'(x) = 0. \quad (14)$$

Полученное неоднородное интегральное уравнение (12) с ядром, обладающим логарифмической особенностью, согласно первой теореме Фредгольма имеет решение при любой правой части  $f(x)$ , поскольку соответствующее однородное уравнение не имеет решений, отличных от тривиального нулевого. Действительно, равенство нулю правой части в (12) означает отсутствие внешних сил, действующих на контур трещины, что сразу же позволяет сделать вывод о справедливости тождества  $v(x) \equiv 0$ .

Таким образом, согласно теории интегральных уравнений, решение (12) можно представить в виде ряда

$$v(x) = v_0(x) + \lambda v_1(x) + \lambda^2 v_2(x) + \dots \quad (15)$$

Этот ряд будет сходящимся при достаточно малом  $\lambda$  поэтому необходимо сделать оценку величины этого параметра. В выражении (13) для большинства металлов справедлива оценка  $0,001 \leq \sigma_s / E \leq 0,01$ , причем нижняя граница соответствует пластичным материалам, верхняя более хрупким.

Имеющиеся экспериментальные значения  $\bar{W}$  находятся в пределах  $0,3 \leq \bar{W} \leq 2$ . Здесь нижняя граница соответствует более хрупким материалам, верхняя – идеально пластичным. Комбинируя эти оценки, можно получить средневзвешенное значение  $\lambda$  для основных конструкционных металлов:  $\lambda_{cp} \approx 0,003$ .

Полученный порядок малости величины  $\lambda$  позволяет сделать вывод о сходимости ряда (15) и, следовательно, о возможности нахождения решения (12) в виде (15). Де-



тальное исследование сходимости этого решения выходит за рамки настоящей работы, однако следует отметить, что точным условием сходимости является нормируемость ядра:

$$\left( \int_{-c}^{-l} + \int_l^c \right) |\Gamma(c, x, \xi)|^2 d\xi \leq A,$$

которую можно доказать непосредственным интегрированием. Здесь  $A$  – ограниченная постоянная.

Подставив ряд (15) в (12) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $\lambda$ , получим рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} v_i(x) &= \frac{2}{h} \left( \int_{-c}^{-l} + \int_l^c \right) \Gamma(c, x, \xi) v_{i-1}(\xi) d\xi, \quad i = 1, 2, \dots \\ v_0(x) &= f(x), \quad |x| \leq c. \end{aligned} \quad (16)$$

Принимая во внимание, что  $\lambda \sim 10^{-5}$ , для дальнейшего исследования ограничимся двумя членами ряда (15) и запишем решение уравнения в виде:

$$\begin{aligned} v_i(x) &= f(x) + \lambda \frac{2}{h} \left( \int_{-c}^{-l} + \int_l^c \right) f(\xi) \Gamma(c, x, \xi) d\xi, \\ f(x) &= \frac{\sigma_s}{\pi E} \left\{ 2\sqrt{c^2 - x^2} \left( \pi \frac{P}{\sigma_s} + 2 \arccos \frac{l}{c} \right) - \frac{l-x}{c} \Gamma(c, x, l) - \frac{l+x}{c} \Gamma(c, x, -l) \right\}, \\ \lim_{x \rightarrow c} v'(x) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Отметим, что нулевое приближение этого решения  $v_0(x) = f(x)$  совпадает с решением КРТ-модели.

Таким образом, получено решение краевой задачи (10) в квадратурах, пригодное после регуляризации для численного анализа. В качестве иллюстрации численных результатов на рис. 4 представлена в изометрическом изображении схема деформирования пластической зоны в момент выхода внутренней трещины на свободные боковые поверхности.

Расчеты проводились для малоуглеродистой стали Ст. 3 при  $\lambda = 0,03$ ;  $\bar{W}_* = 0,63$  (это значение вместе с  $v_* = 0,1575$  было определено в [8]) и при  $h = 2$  мм;  $l = 40$  мм;  $P/\sigma_s = 0,296$ .

На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы.

1. Построена модель разрушения для трещины в плоском напряженном состоянии, являющаяся развитием КРТ-модели и более детально описывающая процесс деформирования материала в пластических зонах.

2. Использование подходов теории жесткопластического тела позволило полнее осмыслить физический и механический смысл критического раскрытия трещины как критерия разрушения.

3. Установлена возможность практического использования предложенного модельного представления для оценки предельного состояния тонкостенных элементов конструкций с трещиновидными дефектами.

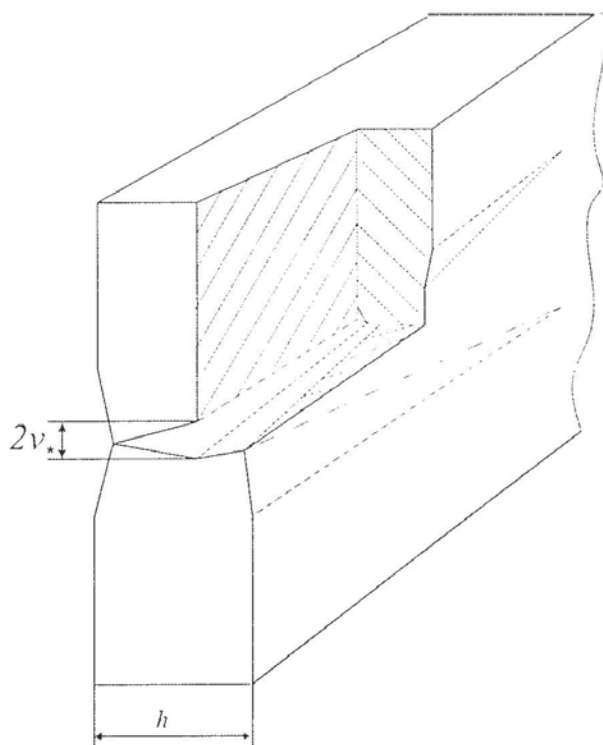


Рис. 4. Схема деформирования пластической зоны у вершины трещины

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Леонов М. Я., Панасюк В. В. Развитие мельчайших трещин в твердом теле. // Прикладная механика, 1959. — Т. 5. — № 4. — С. 391.
2. Dugdale D. Yielding of steel sheets containing slits. // J. Mech. and Phys. Solids. 1960. — V. 8. — № 2. — P. 100.
3. Онат Е., Прагер В. Образование шейки при пластическом течении растягиваемого плоского образца // В сб.: Механика, 1955. — № 4 (32). — С. 93.
4. Хромов А. И. Деформация и разрушение жесткопластических тел. // Владивосток: Дальнаука, 1996. — 181 с.
5. Сроули Дж., Браун У. Ф. Методы испытания на вязкость разрушения // В сб.: Прикладные вопросы вязкости разрушения, М.: Мир, 1968. — С. 228—229.
6. Слепьян Л. И. Механика трещин. — Л.: Судостроение, 1981. — 295 с.
7. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацишин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. — Киев: Наукова думка, 1976. — 442 с.
8. Степанов С. Л. Экспериментальные исследования разрушения материалов при шейкообразовании и локализации пластических деформаций по жесткопластической схеме Оната и Прагера. // Вестник СамГТУ, 2004. — № 26. — С. 127—130.