№ 10 *2007*

621.822

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ НЕСИММЕТРИЧНОГО ЖЕСТКОГО РОТОРА НА ПОДШИПНИКАХ ЖИДКОСТНОГО ТРЕНИЯ

Канд. техн. наук, доцент О. В. СОЛОМИН, асп. С. В. МАЙОРОВ

Рассматривается построение уравнений пространственного движения несимметричного жесткого ротора под действием произвольной системы внешних сил и моментов. В качестве реакций опорных узлов в разработанной математической модели роторной системы используются аппроксимации «короткого» подшипника. Приведены результаты моделирования в виде траекторий движений цапфы ротора в подшипниках жидкостного трения, положения оси ротора, разверток и спектра колебаний ротора.

In this article the system of equations of 3D-motion of a nonsymmetrical rigid rotor influenced by arbitrary external forces and moments is derived. 'Short' bearing approximations are used as reactions of fluid-film bearings in the mathematical model of the rotor system. Results of numerical modeling are given in the form of rotor orbits, position of a rotor axis, rotor vibrations and spectrums.

Распространение подшипников жидкостного трения в качестве опор высокоскоростных роторных систем при одновременном росте частот вращения роторов и повышении требований к вибрационной надежности агрегатов обусловливают необходимость совершенствования математических моделей для динамического анализа системы ротор—подшипники. Существуют различные подходы к решению задач динамики роторных систем, однако наиболее информативным с точки зрения динамического анализа является непосредственное интегрирование уравнений движения ротора совместно с уравнениями гидродинамики смазочного слоя подшипников [1—4]. В результате получаем траектории движения центра цапфы ротора в радиальном зазоре подшипника жидкостного трения. По форме, расположению и размерам таких траекторий можно судить об особенностях динамического поведения роторной системы в целом. Кроме того, дополнительная информация о частотных составляющих колебательного процесса может быть извлечена из временных реализаций перемещений цапфы ротора путем применения спектрального анализа или вейвлет-анализа.

Одна из основных проблем при использовании метода траекторий — построение адекватной модели динамики ротора. В частности, большинство исследований основано на применении предельно упрощенной и не отражающей реального распределения инерционных параметров модели неуравновешенного симметричного жесткого ротора [1—6]. В этом случае модель ротора сводится к одномассовому осциллятору с двумя степенями свободы, движение которого происходит в плоскости радиального зазора подшипника. Настоящая статья имеет своей целью устранение данного допущения и разработку модели пространственного движения ротора на подшипниках жидкостного трения.

Рассмотрим пространственное движение ротора (рис. 1, *а*). Введем неподвижную систему координат $OXYZ$, начало которой располагается на линии центров подшипников на левом торце ротора, ось Z совпадает с линией центров подшипников, ось Y направлена вертикально вниз (совпадает с вектором силы тяжести), а ось X направлена так, что образует с осями Z и Y правую систему координат.

Выделим две контрольные точки *1* и *2* (места установки датчиков перемещений), лежащие на оси симметрии ротора. Координаты этих контрольных точек X_i и Y_i ($i = 1, 2$) однозначно описывают положение жесткого ротора в пространстве при отсутствии осевых перемещений и постоянстве скорости вращения в предположении малости углов поворота ротора относительно главных центральных осей, перпендикулярных оси ξ. Учитывая малость зазора в подшипниках жидкостного трения по сравнению с длиной ротора, это предположение оправдано.

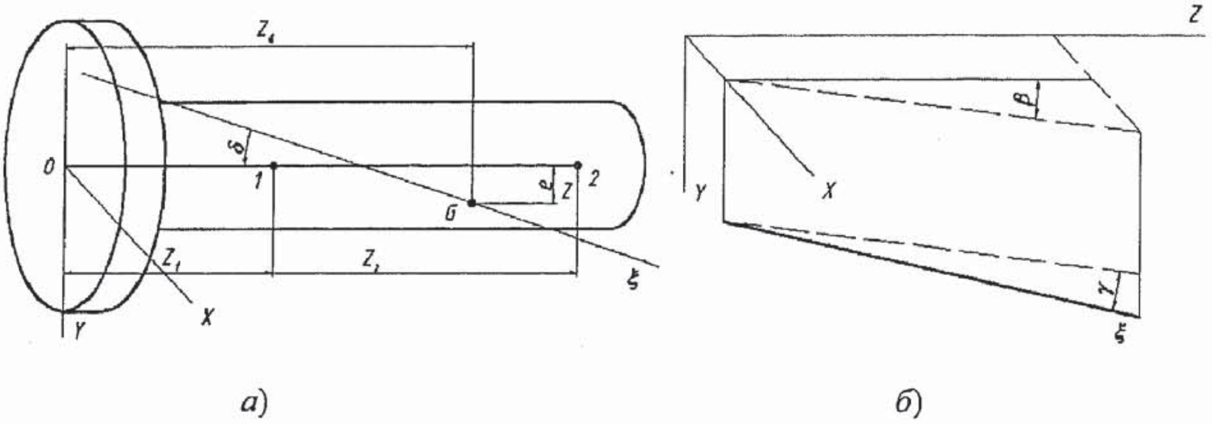

Рис. 1. Схема ротора (*а*) и принятая система координат (*б*)

Кроме того, на рис. 1, *а* приняты следующие обозначения: G — центр масс ротора; ξ — главная центральная ось ротора; δ — угол между осью симметрии ротора и главной центральной осью, характеризующий динамический дисбаланс; e — статический дисбаланс; Z_1, Z_2 и Z_G — расстояние по линии центров подшипников от начала координат до точек *1*, *2* и G соответственно. Далее обозначим:

$$\lambda_1 = \frac{Z_G - Z_1}{Z_2 - Z_1},\ \lambda_2 = 1 - \frac{Z_G - Z_1}{Z_2 - Z_1},\ \lambda = Z_2 - Z_1.$$

Введем в рассмотрение углы β и γ (рис. 1, *б*): β — угол между проекцией оси ξ на плоскость XZ и осью Z; γ — угол между осью ξ и ее проекцией на плоскость XZ.

С учетом принятых допущений во введенных обозначениях запишем

$$X_G = X_2\lambda_1 + X_1\lambda_2 + e\cos\omega t;\ Y_G = Y_2\lambda_1 + Y_1\lambda_2 + e\sin\omega t,$$

$$\beta = \frac{X_2 - X_1}{\lambda} + \delta\cos\omega t;\ \gamma = \frac{Y_2 - Y_1}{\lambda} + \delta\sin\omega t,$$

где ω — угловая скорость ротора относительно оси ξ.

Введем в рассмотрение подвижную систему координат $Gxyz$, которая будет проходить через главные центральные оси ротора (ось z совпадает с осью ξ). Пусть I_z — главный центральный момент инерции ротора относительно оси z; I — главный центральный момент инерции относительно оси, перпендикулярной оси z; m — масса ротора. В принятых обозначениях компоненты вектора угловой скорости с точностью до величин второго порядка малости можно записать в виде

$$\omega_x = -\frac{\dot{Y}_2 - \dot{Y}_1}{\lambda} - \delta\omega\cos\omega t;\ \omega_y = \frac{\dot{X}_2 - \dot{X}_1}{\lambda} - \delta\omega\sin\omega t,$$

$$\omega_z = \omega + \frac{\left(\dot{X}_2 - \dot{X}_1\right)\left(Y_2 - Y_1\right)}{\lambda^2} - \delta\omega \frac{Y_2 - Y_1}{\lambda} \sin \omega t + \delta \frac{\dot{X}_2 - \dot{X}_1}{\lambda} \sin \omega t .$$

Кинетическая энергия ротора согласно теореме Кенига [7] равна

$$T = \frac{1}{2} m\left(\dot{X}_G{}^2 + \dot{Y}_G{}^2\right) + \frac{1}{2} I_z \omega_z{}^2 + \frac{1}{2} I_z \left(\omega_x{}^2 + \omega_y{}^2\right).$$

Подставим это выражение в систему уравнений Лагранжа второго рода, имеющую согласно [7] вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum W_i ,$$

где t — время; q_i — виртуальное перемещение, последовательно принимающее значения X_1, X_2, Y_1 и Y_2; ΣW_i — обобщенная сила на q_i виртуальном перемещении.

После преобразований из уравнений Лагранжа получаем систему уравнений, описывающую пространственное движение жесткого несимметричного ротора,

$$\begin{gathered} m\ddot{X}_1 = m\frac{I_z}{I}\omega\lambda_1\left(\dot{Y}_2 - \dot{Y}_1\right) + me\omega^2\cos\omega t - m\frac{I - I_z}{I}\lambda\lambda_1\delta\omega^2\cos\omega t + \\ + \sum W_1\left(1 + m\frac{\lambda^2\lambda_1{}^2}{I}\right) + \sum W_2\left(1 - m\frac{\lambda^2\lambda_1\lambda_2}{I}\right); \end{gathered} \tag{1}$$

$$\begin{gathered} m\ddot{X}_2 = -m\frac{I_z}{I}\omega\lambda_1\left(\dot{Y}_2 - \dot{Y}_1\right) + me\omega^2\cos\omega t + m\frac{I - I_z}{I}\lambda\lambda_2\delta\omega^2\cos\omega t + \\ + \sum W_1\left(1 - m\frac{\lambda^2\lambda_1\lambda_2}{I}\right) + \sum W_2\left(1 + m\frac{\lambda^2\lambda_2{}^2}{I}\right); \end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered} m\ddot{Y}_1 = -m\frac{I_z}{I}\omega\lambda_1\left(\dot{X}_2 - \dot{X}_1\right) + me\omega^2\sin\omega t - m\frac{I - I_z}{I}\lambda\lambda_1\delta\omega^2\sin\omega t + \\ + \sum W_3\left(1 + m\frac{\lambda^2\lambda_1{}^2}{I}\right) + \sum W_4\left(1 - m\frac{\lambda^2\lambda_1\lambda_2}{I}\right); \end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered} m\ddot{Y}_2 = m\frac{I_z}{I}\omega\lambda_1\left(\dot{X}_2 - \dot{X}_1\right) + me\omega^2\sin\omega t + m\frac{I - I_z}{I}\lambda\lambda_2\delta\omega^2\sin\omega t + \\ + \sum W_3\left(1 - m\frac{\lambda^2\lambda_1\lambda_2}{I}\right) + \sum W_4\left(1 + m\frac{\lambda^2\lambda_2{}^2}{I}\right). \end{gathered} \tag{4}$$

Рассмотрим теперь определение обобщенных сил. Будем считать, что силы и моменты заданы в проекциях на оси X и Y. Очевидно, что силы и моменты, проекции которых на ось X равны нулю, не войдут в выражения для ΣW_1 и ΣW_2, так же как и силы, моменты проекции которых на ось Y равны нулю, не войдут в выражения для ΣW_3 и ΣW_4. Поэтому запишем выражения только для ΣW_1 и ΣW_2, так как для других обобщенных сил они могут быть получены аналогично

$$\sum W_1 = \frac{1}{Z_2 - Z_1}\sum_k M_{Yk} + \frac{1}{Z_2 - Z_1}\sum_m F_{Xm}\left(Z_2 - Z^F{}_m\right),$$

$$\sum W_2 = -\frac{1}{Z_2 - Z_1}\sum_k M_{Yk} + \frac{1}{Z_2 - Z_1}\sum_m F_{Xm}\left(Z^F{}_m - Z_1\right),$$

где $M_{Y\,k}$ — проекция k-го момента на плоскость XZ; $F_{X\,m}$ — проекция m-ой силы на ось X; $Z^F{}_m$ — точка приложения m-ой силы.

Для примера рассмотрим движение ротора, установленного на двух подшипниках жидкостного трения. В качестве контрольных точек примем геометрические центры подшипников. Тогда действующими на ротор внешними силами будут реакции подшипников и сила тяжести mg (g — ускорение свободного падения), входящая только в обобщенные силы ΣW_3 и ΣW_4.

Реакции смазочного слоя определяем путем интегрирования поля давления по поверхности цапфы ротора, которое, как правило, находят, решая уравнение Рейнольдса [1—4]. В ряде практических приложений может быть использована модель так называемого «короткого» подшипника, уравнение Рейнольдса для которого запишется в виде [2—6]

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\right] = 6\omega\frac{\partial h}{\partial\theta} + 12\frac{\partial h}{\partial t},$$

где h — функция радиального зазора; p — функция распределения давления; μ — динамическая вязкость жидкости; z и θ — осевая и окружная координаты. В этом случае реакции смазочного слоя в принятой системе координат можно определить по следующим соотношениям [5, 6]:

$$R_X = -\mu\pi R L^3\left[\frac{\omega y + 2\dot{x}}{2\left(h_0{}^2 - x^2 - y^2\right)^{3/2}} + \frac{3x\left(x\dot{x} + y\dot{y}\right)}{\left(h_0{}^2 - x^2 - y^2\right)^{5/2}}\right];$$

$$R_Y = -\mu\pi R L^3\left[\frac{2\dot{y} - \omega x}{2\left(h_0{}^2 - x^2 - y^2\right)^{3/2}} + \frac{3y\left(x\dot{x} + y\dot{y}\right)}{\left(h_0{}^2 - x^2 - y^2\right)^{5/2}}\right],$$

где R и L — радиус и длина подшипника соответственно; h_0 — радиальный зазор; x и y — координаты центра цапфы ротора относительно линии центров подшипника. Тогда выражения для обобщенных сил примут следующий вид:

$$\sum W_1 = -\mu_1\pi R_1 L_1{}^3\left[\frac{\omega Y_1 + 2\dot{X}_1}{2\left(h_{01}{}^2 - X_1{}^2 - Y_1^2\right)^{3/2}} + \frac{3X_1\left(X_1\dot{X}_1 + Y_1\dot{Y}_1\right)}{\left(h_{01}{}^2 - X_1{}^2 - Y_1{}^2\right)^{5/2}}\right]; \quad (5)$$

$$\sum W_2 = -\mu_2\pi R_2 L_2{}^3\left[\frac{\omega Y_2 + 2\dot{X}_2}{2\left(h_{02}{}^2 - X_2{}^2 - Y_2^2\right)^{3/2}} + \frac{3X_2\left(X_2\dot{X}_2 + Y_2\dot{Y}_2\right)}{\left(h_{02}{}^2 - X_2{}^2 - Y_2{}^2\right)^{5/2}}\right]; \quad (6)$$

$$\sum W_3 = -\mu_1\pi R_1 L_1{}^3\left[\frac{2\dot{Y}_1 - \omega X_1}{2\left(h_{01}{}^2 - X_1{}^2 - Y_1^2\right)^{3/2}} + \frac{3Y_1\left(X_1\dot{X}_1 + Y_1\dot{Y}_1\right)}{\left(h_{01}{}^2 - X_1{}^2 - Y_1{}^2\right)^{5/2}}\right] + \lambda_2 mg; \quad (7)$$

$$\sum W_4 = -\mu_2\pi R_2 L_2{}^3\left[\frac{2\dot{Y}_2 - \omega X_2}{2\left(h_{02}{}^2 - X_2{}^2 - Y_2{}^2\right)^{3/2}} + \frac{3Y_2\left(X_2\dot{X}_2 + Y_2\dot{Y}_2\right)}{\left(h_{02}{}^2 - X_2{}^2 - Y_2{}^2\right)^{5/2}}\right] + \lambda_1 mg, \quad (8)$$

где индексы «1» и «2» указывают на принадлежность параметров μ, h_0, R и L к первому и второму подшипникам соответственно.

Видно, что при полученных выражениях для обобщенных сил система уравнений (1) — (4) с учетом нелинейных членов (5) — (8) не может быть решена аналитическими методами. Поэтому для ее решения был использован многошаговый метод Адамса-Башфорта-Моултона [8].

Расчеты проводились для роторной системы с тривиальными начальными условиями при следующих параметрах: два одинаковых «коротких» подшипника; $\mu = 0{,}03$ Па·с; $R = 50$ мм; $L = 25$ мм; $h_0 = 100$ мкм; $\omega = 500$ рад/с; $e = 10$ мкм; $\delta = 0{,}03$ рад; $m = 1$ кг; $I_z = 0{,}005$ кг·м²; $I = 0{,}0075$ кг·м²; $Z_1 = 75$ мм; $Z_2 = 500$ мм; $Z_G = 250$ мм. На рис. 2 — 4 представлены результаты расчетов, выполненных по описанной выше модели.

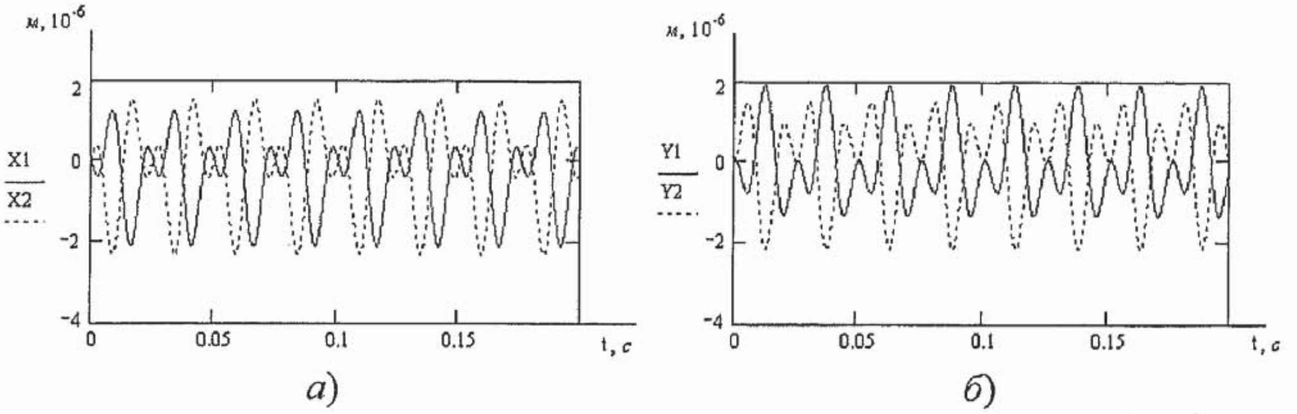

Рис. 2. Временные реализации перемещений по осям X (*а*) и Y (*б*)

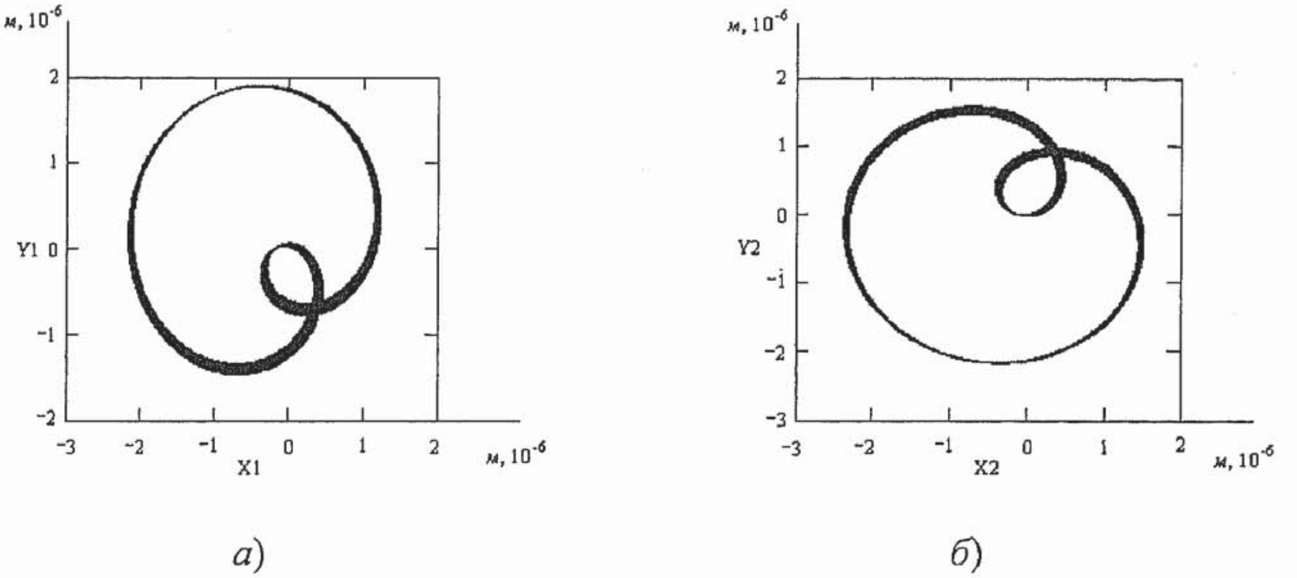

Рис. 3. Траектории центра цапфы в первом (*а*) и во втором (*б*) подшипниках

Анализ временных реализаций перемещений опорных участков ротора (рис. 2) и траекторий движения центров цапф ротора (рис. 3) иллюстрирует возникновение автоколебательного режима в рассматриваемой роторной системе, известного как эффект «полускоростного вихря» [1—4]. Рассмотрение частотного состава колебаний (рис. 4, *а*) свидетельствует о наличии двух составляющих: оборотной частоты $f_1 \approx 80$ Гц, связанной с наличием неуравновешенности, и автоколебательной составляющей $f_2 \approx 40$ Гц, обусловленной нелинейными реакциями подшипников. Построение анимационной картины движения (рис. 4, *б*) в пакете MathCAD наглядно иллюстрирует динамику ротора по типу конической прецессии.

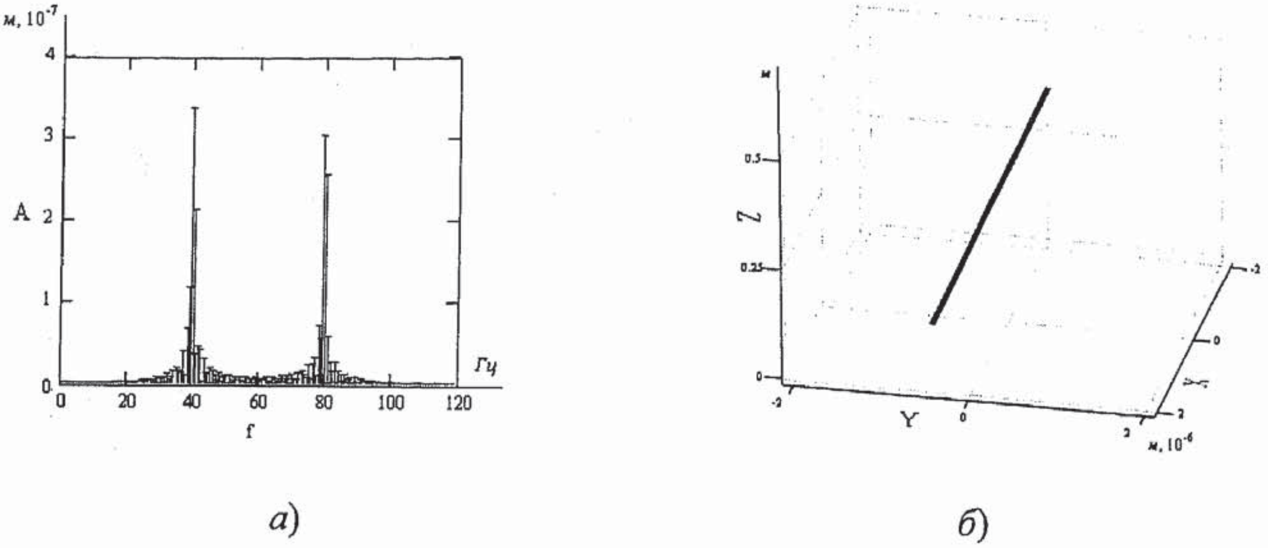

Рис. 4. Спектр колебаний (*а*) и пространственное положение оси ротора (*б*)

Предложенные расчетные соотношения могут быть применены для проведения проектировочных и проверочных расчетов роторных систем. Отметим, что реакции опор (подшипников, уплотнений, демпферов) должны определяться с учетом конкретных геометрических особенностей, гидродинамических и теплофизических процессов. Данные уравнения могут использоваться для построения эталонных вибрационных диагностических признаков дефектов роторных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гидростатические опоры роторов быстроходных машин / Н. П. Артеменко и др. — Харьков: Основа, 1992. — 198 с.
2. Yamamoto T., Ishida Y. Linear and nonlinear rotordynamics. A modern treatment with applications. – New York: John Willey&Sons, 2001. — 326 p.
3. Genta G. Dynamics of rotating systems. — New York: Springer, 2005. — 660 p.
4. Handbook of rotordynamics / Edited by Ehrich F. – New York: McGraw-Hill, 1992. – 542 p.
5. Capone G, Russo M. Short bearing theory prediction of inertial turbulent journal orbits // Journal of tribology. — 1990. — Vol. 112, October. — P. 643 — 649.
6. Chu F., Zhang Z. Periodic, quasi-periodic and chaotic vibrations of a rub-impact rotor system supported on oil film bearings // Int. J. of Engineering Science, 1997. – № 10/11. P. 963 – 973.
7. Никитин Н. Н. Курс теоретической механики. — М.: Высшая школа, 1990. — 607 с.
8. Мэтьюз Д. Г., Финк К.Д. Численные методы. — М: Вильямс, 2001. — 720 с.