

РАЗНОЕ

517.957, 518.718.2, 519.711.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОГО
ЭЛЕКТРОПРИВОДА СИСТЕМЫ ТЕПЛОВОЙ ЗАЩИТЫ*

Д-р техн. наук, проф. С. Ф. ЯЦУН, д-р техн. наук, проф. Ж. Т. ЖУСУБАЛИЕВ,
д-р техн. наук, проф. В. С. ТИТОВ, асп. С. Ю. ЧЕВЫЧЕЛОВ, асп. А. А. МЕДВЕДЕВ

Предложена математическая модель управляемого электропривода вентилятора системы тепловой защиты в форме системы нелинейных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. Разработан алгоритм анализа устойчивости периодических движений. Выявлена граница области устойчивости по коэффициенту усиления. Показано, что потеря устойчивости приводит к удвоению периода колебаний. Установлено, что при больших коэффициентах усиления возникают хаотические режимы.

A new mathematical model for a controlled electric drive of the thermal protection system is offered in this article. The behavior of such system is described by a set of two coupled ordinary differential equations with discontinuous right-hand sides. We also developed an algorithm for an analysis of periodic motion stability. Under variation of the amplifier gain we locate the borderline of stability. We revealed that the loose of stability leads to oscillations on doubling frequency and found the chaotic oscillations appearing at the large values of the amplifier gain.

Системы тепловой защиты с активной подачей воздуха в зону теплообмена получают широкое распространение в связи с возможностью обеспечивать заданные условия эксплуатации объекта для различных температур окружающей среды. Достигается это в основном за счет управления скоростью потока воздуха, принудительно поступающего в систему тепловой защиты.

В качестве источника подачи воздуха обычно выступает вентиляторная установка, включающая в себя вентилятор с электродвигателем, датчик, регистрирующий число оборотов выходного вала, систему управления, обеспечивающую подачу электрического напряжения заданного уровня на электродвигатель.

Эта схема предполагает то, что в качестве привода применяется двигатель постоянного тока, позволяющий изменять число оборотов в широком диапазоне. В тоже время эффективность установки остается невысокой в силу низкого коэффициента полезного действия и высоких массогабаритных характеристик такого привода.

В настоящей статье предложена схема управления скоростью воздушного потока системы тепловой защиты, основанная на применении асинхронного двигателя и управляемой электромагнитной муфты, обеспечивающей управление числом оборотов вентилятора при практически постоянных оборотах на валу электродвигателя. Такой подход позволяет уменьшить габариты установки и повысить ее эффективность. Создание оборудования потребовало изучения качественных показателей системы автоматического управления, обеспечивающей заданное число оборотов вентилятора. При этом особое внимание уделяется исследованию устойчивости рассматриваемой системы.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 06-01-00811 а)

Постановка задачи

На рис. 1 приведена схема системы автоматического управления электроприводом вентилятора тепловой защиты. Устройство работает следующим образом. Электродвигатель подключен к сети переменного тока и вращается с постоянной угловой скоростью. Вал вентилятора связан с валом двигателя с помощью электромагнитной муфты M . Момент, передаваемый муфтой, пропорционален квадрату магнитного потока создаваемого в контуре электромагнита. Изменяя напряжение, подаваемое на катушку электромагнита муфты M , можно управлять величиной момента в диапазоне от нуля до максимального значения, который определяется геометрическими размерами электромагнита. В качестве регулируемого источника напряжения применен полупроводниковый преобразователь постоянного напряжения с широтно-импульсной модуляцией (ШИМ). Величина управляющего напряжения зависит от отклонения напряжения, пропорционального действительной угловой скорости вала вентилятора, определяемой датчиком угловой скорости ДС, от заданного U_y . Величина отклонения напряжения от заданного определяется в блоке DA_2 .

Элемент сравнения DA_1 вырабатывает напряжение, пропорциональное величине отклонения напряжения, в результате чего широтно-импульсный модулятор изменяет скважность импульса, что приводит к изменению среднего значения питающего электромагнит напряжения.

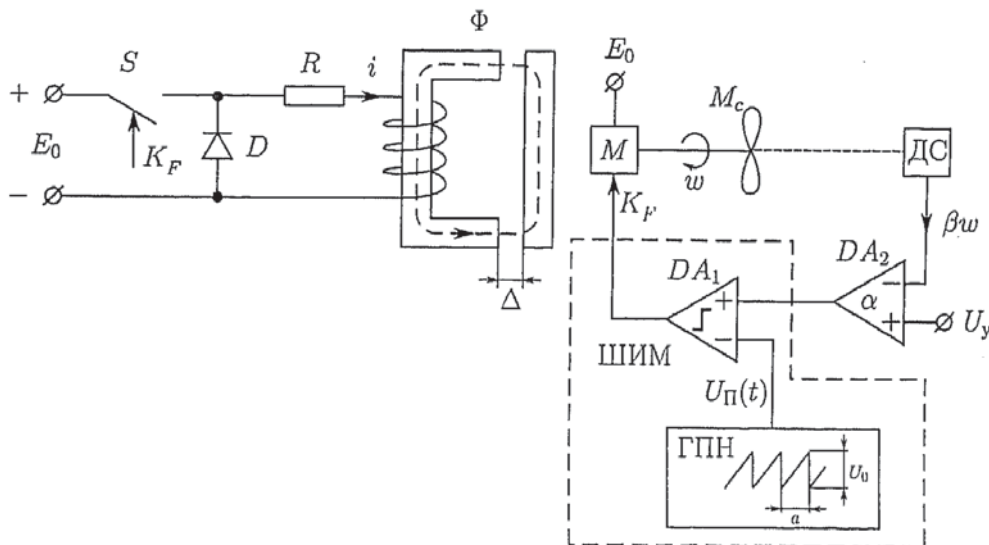


Рис. 1. Схема электропривода вентилятора системы тепловой защиты.

Дифференциальные уравнения, описывающие движение рассматриваемой системы имеют вид

$$\dot{X} = G(t, X); X = \begin{bmatrix} \Phi \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; G(t+a, X) \equiv G(t, X), \tag{1}$$

$$G = (g_1, g_2)', g_1 = -2\gamma R x_1 + E_0 K_F(\xi), g_2 = -\frac{\mu}{J} x_2 + \frac{\vartheta}{J} x_1^2;$$

$$K_F(\xi) = \frac{1}{2} [1 + \text{sign}(\xi)], \xi(t, X) = \alpha(U_c - \beta x_2) - U_0(t/a - E_1(t/a)).$$

Первое уравнение относительно переменной x_1 описывает процессы, протекающие в электрической цепи, а второе уравнение относительно x_2 является уравнением вращательного движения вала вентилятора.

Здесь Φ — магнитный поток; ω — угловая скорость; γ , ϑ — постоянные, определяемые свойствами электромагнитной муфты; R — активное сопротивление катушки электромагнита; μ — коэффициент сопротивления воздуха (зависит от геометрических размеров винта вентилятора); E_0 — напряжение питания; J — момент инерции, приведенный к валу; K_F — выходной сигнал модулятора; α — коэффициент усиления; $U_L(t)$ — пилообразное напряжение; U_c — управляющий сигнал; β — коэффициент передачи датчика обратной связи по угловой скорости ω ; U_0 — амплитуда пилообразного напряжения; a — период квантования; $E_1(t/a)$ — функция, выделяющая целую часть аргумента.

Фазовое пространство (t, X) динамической системы (1) разделяется на два подпространства: D_- , где $\xi(t, X) > 0$ и D_+ , где $\xi(t, X) < 0$. В подпространстве D_- функция $K_F = 1$ и уравнение движения имеет вид $\dot{X} = G_-(t, X)$, $\xi(t, X) > 0$. В подпространстве D_+ функция $K_F = 0$ и движение системы описывается уравнением $\dot{X} = G_+(t, X)$, $\xi(t, X) < 0$. Здесь $G_{\pm}(t, X)$ — непрерывные вектор-функции, получаемые подстановкой в правую часть системы (1) соответствующих значений коммутационной функции K_F .

Границей указанных подпространств является двумерная поверхность, определяемая уравнением $\xi(t, X) = 0$, на которой сшиваются фазовые траектории, а правая часть (1) терпит разрыв первого рода. В окрестности этой границы вектор-функцию $G(t, X)$ можно представить в виде

$$G(t, X) = G_-(t, X) + \{G_+(t, X) - G_-(t, X)\} \eta(\xi(t, X)),$$

где $\eta(\cdot)$ — функция Хевисайда.

В исследованиях приняты следующие значения параметров модели: $2\gamma R = 10 \text{ с}^{-1}$; $\mu = 0,2$; $J = 10^{-3} : 3 \cdot 10^{-2}$; $E_0 = 45 \text{ В}$; $U_y = 10 \text{ В}$; $a = 10^{-3} \text{ с}$; $\beta = 0,5$; $U_0 = 2,5 \text{ В}$; $\alpha > 0$ — варьируемый параметр.

Анализ устойчивости

Эксплуатационный режим работы рассматриваемой системы — режим вынужденных колебаний с частотой модуляции $f = 1/a$. Изменения параметров, определяемые условиями эксплуатации, а также режимами работы системы, могут привести к потере устойчивости периодического движения. Потеря устойчивости обычно сопровождается возникновением устойчивых колебаний на пониженных частотах, кратных частоте модуляции, либо недетерминированных режимов, которые могут быть квазипериодическими или хаотическими.

Возникновение недетерминированных режимов приводит к снижению точности регулирования, многократному увеличению коэффициента пульсаций и динамических ошибок. Поэтому разработка алгоритма анализа устойчивости периодических движений является одной из важных задач при проектировании нелинейных импульсных систем.

Пусть $X_c(t)$ — периодическое движение динамической системы (1) с периодом внешнего воздействия $T = a$, т.е. $\dot{X}_c(t) \equiv G(t, X_c)$, $X_c(t+T) \equiv X_c(t)$.

Устойчивость периодического движения определяется собственными числами $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N$ матрицы монодромии $F(T)$, т.е. корнями характеристического уравнения [1,2]

$$\det(F(T) - \rho E) = 0.$$

Здесь N — порядок системы; E — единичная матрица. Собственные числа матрицы монодромии называются множителями или мультипликаторами Флоке [1,2].

Периодическое движение X_c асимптотически устойчиво, если все мультипликаторы Флоке лежат внутри единичного круга в комплексной плоскости относительно начала координат, т.е. $|\rho_i| < 1, i = 1, 2, \dots, N$.

Матрица монодромии $F(T)$ находится из решения системы матричных уравнений [3]:

$$\begin{aligned} \dot{F}(t) &= \frac{\partial G(t, X_c)}{\partial X} F(t), F(0) = E, \\ \frac{\partial G(t, X_c)}{\partial X} &= \frac{\partial G_-(t, X_c)}{\partial X} + \frac{\partial \Delta G(t, X_c)}{\partial X} \eta(\xi(t, X_c)) + A_k^\pm \delta(t - t_k) = \\ &= A(t) + A_k^\pm \delta(t - t_k) \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $F(t)$ — фундаментальная матрица; $\frac{\partial G(t, X_c)}{\partial X}$ — матрица Якоби; $\delta(t - t_k)$ — функция Дирака;

$$\Delta G(t, X_c) = G_+(t, X_c) - G_-(t, X_c),$$

где G_-, G_+ — гладкие вектор-функции, определенные соответственно в областях $t_{k-1} < t < t_k$ и $t_k < t < t_{k+1}$; $t_k, k = 1, p$ — моменты разрыва правой части (1) на периодическом решении $X_c(t)$, где p — число точек разрыва на периоде T .

Матрицы $A(t)$ и A_k^\pm , согласно [3,4], определяются следующими выражениями (см. также [5, 6]):

$$A(t) = \frac{\partial G_-(t, X_c)}{\partial X} = \frac{\partial G_+(t, X_c)}{\partial X} = \begin{bmatrix} -2\gamma R & 0 \\ 2\vartheta & -\frac{\mu}{J} \end{bmatrix} x_{1c}; \quad A_k^\pm = \frac{\Delta G_k \left(\frac{\partial \xi}{\partial X} \right)'}{\frac{\partial \xi^\pm}{\partial X}} \Big|_{X=X_c, t=t_k},$$

$$\frac{d\xi^\pm}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial X} \right)' G_k^\pm, \quad \Delta G_k = G_k^+ - G_k^-, \quad G_k^\pm = \lim_{t \rightarrow t_k^\pm} G_\pm(t, X_c),$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial X} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_1}, \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \right); \quad A_k^+ = A_k^- = \frac{1}{-\frac{U_0}{a} - \frac{\alpha\beta}{J} [\vartheta x_{1c}^2(t_k) - \mu x_{2c}(t_k)]} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение уравнения (2) кусочно-непрерывно с разрывом первого рода в точках $t = t_k, k = 1, p$. Величина скачка в точках разрыва определяется матрицей пересчета M_k [3, 4, 5, 6]:

$$F(t_k + 0) = M_k F(t_k - 0), \quad M_k = E + A_k^- = (E - A_k^+)^{-1}, \quad F(t_k \pm 0) = \lim_{t \rightarrow t_k^\pm} F(t).$$

Правая часть (1) на периодическом решении имеет две точки разрыва $t_1 = t_*$ и $t_2 = a$. Матрица $A(t)$ в интервале $0 < t < T = a$ непрерывна, а в точке $t = a$ один ее элемент терпит разрыв первого рода. Матрица A_k^\pm имеет смысл только при $t_k = t_*$.

Основную трудность при анализе устойчивости составляет расчет периодического движения $X_c(t)$ с тем, чтобы найти матрицу Якоби $\frac{\partial G(t, X_c)}{\partial X}$. При анализе

устойчивости важно, чтобы выбранный алгоритм позволял находить как устойчивые, так и неустойчивые T -периодические движения. Для поиска периодического движения $X_c(t)$ мы использовали подход, основанный на расчете начальных условий Q для $X_c(t)$ из решения краевой задачи (см., например, [2]):

$$Q = X(T, Q), \quad (3)$$

где $X(t, Q)$ — решение задачи Коши с условием $X(0) = Q$. Если найдено Q из решения системы нелинейных трансцендентных уравнений (3), то искомое периодическое движение $X_c(t)$ находится интегрированием системы дифференциальных уравнений (1) с начальным условием $X(0) = Q$ на одном периоде $0 \leq t \leq T$.

Уравнение (3) решалось численно путем минимизации функции $W(Q) = \|Q - X(T, Q)\|$ [7] в пространстве переменных $Q = (q_1, q_2)'$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма. Минимизация функции $W(Q)$ осуществлялась методом прямого поиска по Хуку-Дживсу.

Уравнения (1) и (2) решались численно методом Рунге-Кутты 4-го порядка. Численная процедура решения дифференциальных уравнений (1) предусматривает на каждом шаге интегрирования контроль за изменением знака функции $\xi(t, X)$. При смене знака $\xi(t, X)$ с «+» на «-» решение с заданным шагом прерывается. Далее следует уточнение момента переключения t_k модулятора (смены знака $\xi(t, X)$) путем решения $\xi(t_k, X(t_k)) = 0$ методом деления отрезка пополам до заданной точности счета.

Результаты анализа устойчивости

Результаты анализа устойчивости представлены в табл. В первом столбце приведены значения коэффициента усиления α . Во втором и третьем столбцах — значения мультипликаторов ρ_1, ρ_2 . Последний столбец указывает на периодичность $T = m\alpha$, $m = 1, 2, \dots$ устойчивых колебаний. С увеличением коэффициента усиления сначала величина одного из вещественных мультипликаторов устойчивого периодического движения сравнивается с другим, тоже вещественным, после чего они образуют комплексно-сопряженную пару. Затем, мультипликаторы вновь становятся вещественными. Если дальше увеличивать α , то при $\alpha \approx 222$ наибольший по модулю мультипликатор ρ_2 (табл.) выходит из единичного круга через -1 и периодическое движение становится неустойчивым. Потеря устойчивости сопровождается мягким возникновением устойчивого режима с удвоенным периодом, происходит суперкритическая бифуркация удвоения периода. На рис. 2 и рис. 3 приведены диаграммы устойчивых режимов до и после бифуркации удвоения периода, соответственно.

На рис. 3, а цифра 1 соответствует неустойчивому периодическому режиму с периодом внешнего воздействия, а цифра 2 — устойчивому режиму удвоенного периода. На рис. 3, б показана отдельно диаграмма устойчивых колебаний с удвоенным периодом.

Таблица

α	ρ_1	ρ_2	$m = T / a$
250,0	-0,54800	-1,47900	2
240,0	-0,59884	-1,35460	2
230,0	-0,67500	-1,20000	2
225,0	-0,73900	-1,09600	2
222,0	-0,80790	-1,00330	2, граница потери устойчивости
221,8	-0,81500	-0,99450	1
221,0	-0,85500	-0,94755	1
220,0	$-0,8790 + j 0,0728$	$-0,8790 - j 0,0728$	1
218,0	$-0,8890 + j 0,1419$	$-0,8890 - j 0,1419$	1
210,0	$-0,8550 + j 0,2818$	$-0,8550 - j 0,2818$	1
200,0	$-0,8107 + j 0,3914$	$-0,8107 - j 0,3914$	1

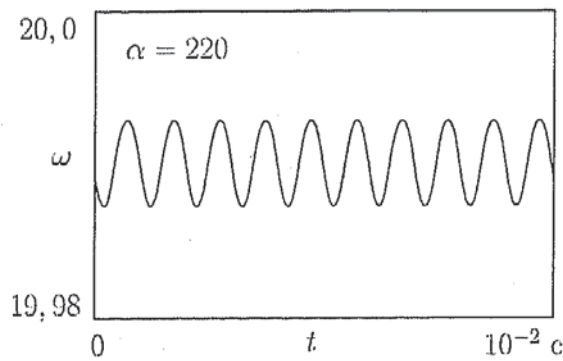


Рис. 2. Диаграмма устойчивых вынужденных колебаний с периодом внешнего воздействия при коэффициенте усиления $\alpha = 220$. Мультипликаторы Флоке комплексно-сопряженные $\rho_{1,2} = -0,897 \pm j 0,0728$ и по модулю меньше единицы

Исследования показали, что при больших коэффициентах усиления наблюдаются хаотические колебания (рис. 4). Возникновение хаотических колебаний приводит к значительному возрастанию амплитуды переменной составляющей магнитного потока и угловой скорости вращения (рис. 2 и 4).

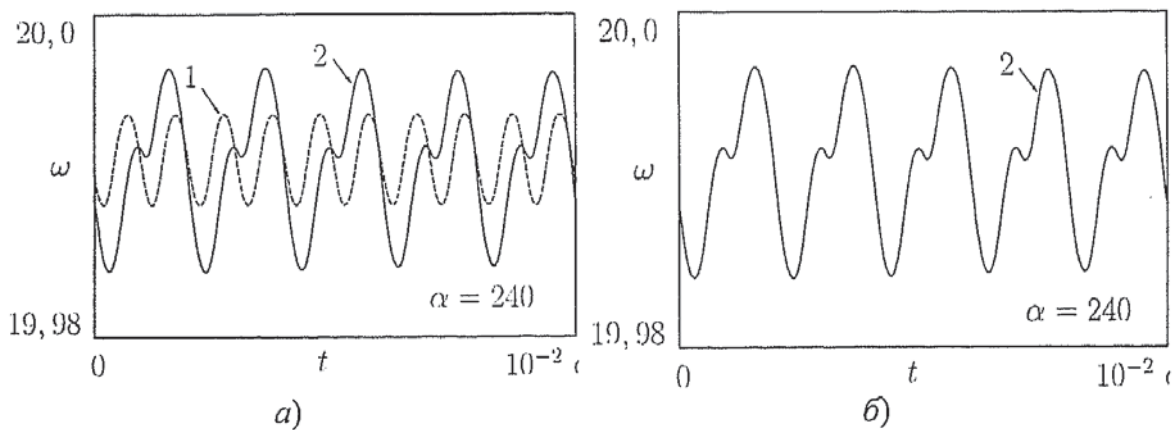


Рис. 3. Устойчивые колебания с удвоенным периодом $T = 2a$ при коэффициенте усиления $\alpha = 240$

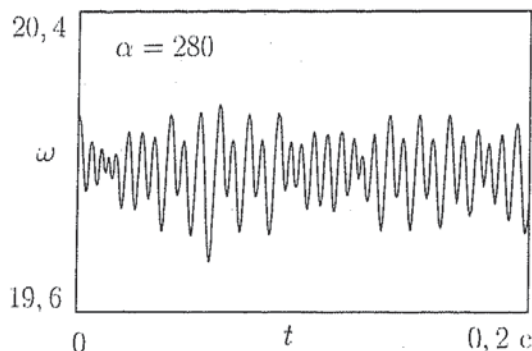


Рис. 4. Недетерминированный режим, возникающий при больших значениях коэффициента усиления α

На рис. 4 показана диаграмма, соответствующая недетерминированному режиму, возникающему при больших коэффициентах усиления α .

Выводы

1. Предложена математическая модель управляемого электропривода вентилятора системы тепловой защиты, описывающая электромеханические процессы в приводе вентилятора.
2. Разработан алгоритм исследования устойчивости вынужденных колебаний нелинейной электромеханической системы. Выявлена граница области устойчивости по коэффициенту усиления, в которой периодическое движение теряет устойчивость, и возникают устойчивые колебания с удвоенным периодом. Показано, что потеря устойчивости происходит через суперкритическую бифуркацию удвоения периода. Установлено, что при больших значениях коэффициента усиления возникают хаотические колебания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Теория бифуркаций / В. И. Арнольд, и др. - М: ВИНТИ, 1986. — 215 с.
2. Бондарь В. А. Методы анализа и расчета электронных схем: Учебное пособие / В. А. Бондарь, В. С. Баушев, А. В. Кобзев. - Томск: Изд-во Том. ун-та, 1989. — 307 с.
3. Исследование локальной устойчивости периодических режимов в нелинейных импульсных системах / О. А. Алейников, В. С. Баушев, А. В. Кобзев, Г. Я. Михальченко // Электричество. 1992. — № 4. — С. 16—21.
4. К расчету локальной устойчивости периодических режимов в импульсных системах автоматического регулирования / В. С. Баушев, Ж. Т. Жусубалиев, Ю. В. Колоколов, И. В. Терехин // Автоматика и телемеханика. 1992. — № 9. — С. 93-100.
5. Айзерман М. А. Устойчивость по линейному приближению периодического решения системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями / М. А. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер // Прикл. математика и механика. 1957. — Т. 21. — №2. — С. 658-669.
6. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А. Ф. Филиппов. — М: Наука, 1985. — 224 с.
7. Баушев В. С. К анализу релейных САР тока в режимах электродинамического торможения высокоскоростных электропоездов / В. С. Баушев, Ж. Т. Жусубалиев, Ю. В. Колоколов // Электричество. 1989. — № 7. — С. 66—70.