№ 11 *2007*

539.3

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ СРЕД

Канд. техн. наук А. Ж. СЕЙТМУРАТОВ

Предлагается приближенный метод решения дине области амических задач для линейных вязкоупругих сред, проявляющих мгновенную упругость. Для сред удовлетворяющих модели Максвелла, метод дает точные результаты.

The approximate method of the dynamic tasks solution in non-linear viscoelastic environments which could reveal an instant elasticity is offered. For the environments meet the conditions of the Maxwell model the method yields exact results.

Ранее рассматривались, главным образом, простейшие задачи при частых видах ядер вязкоупругих операторов, в частности для тела Максвелла или в окрестности фронта вязкоупругой волны [1—3], а также асимптотические решения с применением метода перевала [4].

Постановка задачи. Приближенный метод решения

Линейные вязкоупругие тела, проявляющие мгновенную упругость, описываются двумя линейными временными операторами $L(\zeta)$ и $M(\zeta)$ больцмановского типа

$$L(\zeta)=\lambda\left[\zeta(t)-\int_0^t f_1(t-\xi)\zeta(\xi)\,d\xi\right];$$
$$M(\zeta)=\mu\left[\zeta(t)-\int_0^t f_2(t-\xi)\zeta(\xi)\,d\xi\right], \tag{1}$$

где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — ядра вязкоупругих операторов, которые удобно аппроксимировать в виде суммы экспонент, т.е. [5]

$$f_j(t)=\sum_{m=1}^{n}\frac{\gamma_{mj}}{\tau_m}\exp\left(-\frac{t}{\tau_m}\right),\qquad \sum_{m=1}^{n}\gamma_{mj}=1, \tag{2}$$

λ,μ — упругие постоянные, γ_{mj} — вязкие параметры, τ_m — времена релаксации.

Для простоты ограничимся рассмотрением плоских двумерных задач. Уравнение движения изотропной вязкоупругой среды приведем к виду

$$L_j(\Delta u_j)=\frac{1}{a_j^2}\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2},\qquad L_j(\Delta v_j)=\frac{1}{a_j^2}\frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2},\qquad j=1,2$$
$$L_1(\zeta)=\frac{1}{1+2\mu}\left[L(\zeta)+2M(\zeta)\right],\qquad L_2(\zeta)=\frac{1}{\mu}M(\zeta) \tag{3}$$

При этом функции u_j, v_j должны удовлетворять дополнительным зависимостям

$$\frac{\partial u_1}{\partial y}=\frac{\partial v_1}{\partial x}; \qquad \frac{\partial u_2}{\partial x}=-\frac{\partial v_2}{\partial y}; \qquad a_1^2=\frac{\lambda+2\mu}{p}; \qquad a_2^2=\frac{\mu}{p}.$$

В случае постоянства коэффициента Пуассона, что справедливо с большой степенью точности, ядра $f_1(t)$ и $f_2(t)$ равны между собой.

Для изложения приближенного метода рассмотрим произвольное интегро-дифференциальное уравнение

$$L(\Delta u)=\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

типа (3) и применим к нему преобразование Лапласа по t. В случае нулевых начальных данных, что несущественно для излагаемого подхода, для $u_0(x,y,p)$ получаем

$$\Delta u_0=\frac{Q^2(p)}{c^2}u_0, \qquad Q^2(p)=p^2\left[1-f_0(p)\right]^{-1},$$

$$f_0(p)=\int_0^\infty f(t)\exp(-pt)\,dt\ ,$$

где c — какая-либо из скоростей a_j.

Величину $Q^2(p)$ для ядра $f(t)$ вида (1.2) представим следующим образом:

$$\begin{aligned} &Q^2(p)=p^2+c_1p-c_2+c_2Q_1(p) \\ &c_1=\sum_{m=1}^{n}\frac{\lambda_m}{\tau_m}; \qquad c_2=\sum_{m=1}^{n}\sum_{l=1+m}^{n}\gamma_m\gamma_l\left(\frac{1}{\tau_m}-\frac{1}{\tau_l}\right)^2 \\ &\left|Q_1(p)\right|\le\left|\frac{1}{1+p\tau_1}\right| \end{aligned} \tag{4}$$

В частности, для материала Максвелла имеем лишь одно время релаксации. Тогда величина $Q^2(p)$ принимает простой вид

$$Q^2(p)=p^2+\frac{p}{\tau_1}. \tag{5}$$

Сделаем следующее предположение. Так как во многих динамических задачах для линейных вязкоупругих сред время протекания волновых процессов много меньше наименьшего времени релаксации τ_1, то для рассматриваемых промежутков времени t последним слагаемым в (4) можно пренебречь (для тела Максвелла отбрасываемый член тождественно равен нулю).

Плоская одномерная волна в вязкоупругой среде

Рассмотрим простейшую задачу о распространении в полупространстве $y>0$ плоской волны от приложенного к ее границе $y=0$ нормального давления. Задача сводится к решению уравнения

$$L_1\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2};\qquad a_1=a$$

относительно смещения v, удовлетворяющего граничным и начальным условиям

$$\sigma_{yy}=-F(t)\qquad (y=0);\qquad v=0\qquad (y=\infty);$$

$$v=\frac{\partial v}{\partial t}=0\qquad (t=0).$$

Применяя преобразование Лапласа по t, получаем задачу, решение которой имеет вид

$$v_0(y,p)=\frac{Q(p)}{\rho a p}F_0(p)\exp\left(-Q(p)\frac{y}{a}\right) \tag{6}$$

Обращая выражение (6) по p, когда величина $Q^2(p)$ определяется формулой (4) без последнего слагаемого, для смещения v и напряжения σ_{yy} получим

$$v(y,t)=\frac{1}{\rho a}\int_{\frac{y}{a}}^{t}F(t-\xi)\left[\exp\left(-\frac{c_1\xi}{2}\right)I_0\left(c_0\sqrt{\xi^2-\frac{y^2}{a^2}}\right)+\right.$$

$$\left.+c_0\int_{\frac{y}{a}}^{\xi}\exp\left(-\frac{c_1\eta}{2}\right)I_0\left(c_0\sqrt{\eta^2-\frac{y^2}{a^2}}\right)d\eta\right]d\xi;$$

$$c_0=\sqrt{\frac{c_1^2}{4}+c_2};$$

$$\sigma_{yy}(y,t)=-\exp\left(-\frac{c_1 y}{2a}\right)F\left(t-\frac{y}{a}\right)+$$

$$+\frac{c_0 y}{a}\int_{\frac{y}{a}}^{t}F(t-\xi)\exp\left(-\frac{c_1\xi}{2}\right)\left(\xi^2-\frac{y^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}I_1\left(c_0\sqrt{\xi^2-\frac{y^2}{a^2}}\right)d\xi.$$

Отсюда для тела Максвелла получаем точное решение, полученное в [1] по принципу соответствия, а в случае упругого тела, когда ядро $f(t)=0$, имеем известное решение о распространении плоской волны в упругой среде.

Нетрудно найти и приближенную зависимость величины напряжения от скорости частиц за фронтом волны

$$\sigma_{yy}(y,t)=-\rho a\left\{\frac{dv}{dt}+\int_{\frac{y}{a}}^{t}\frac{dv}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\exp\left(-\frac{c_1\xi}{2}\right)I_0(c_0\xi)\right]d\xi\right\},$$

которая является известным соотношением для плоской упругой волны.

Приближенное решение задачи Лэмба

Задача сводится к решению уравнений (3) для полуплоскости $y<0$ при следующих граничных и начальных условиях:

$$\sigma_{yy} = \sigma_0\delta(x)\delta(t); \qquad \sigma_{xy} = \sigma_1\delta(x)\delta(t) \qquad (y=0);$$
$$u_j = v_j = 0 \qquad \left(\sqrt{x^2+y^2} = \infty\right),$$
$$u_j = v_j = \frac{\partial u_j}{\partial t} = \frac{\partial v_j}{\partial t} = 0 \qquad (t=0).$$

В предположении постоянства коэффициента Пуассона применим к задаче преобразование Лапласа по t и Фурье по x. Тогда для функций

$$\bar{u}_{j0} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_0^{\infty} u_j \exp(i\omega x - pt)\,dt;$$
$$\bar{v}_{j0} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_0^{\infty} v_j \exp(i\omega x - pt)\,dt,$$

получаем

$$\bar{u}_{10} = A_1 \exp\left[yR_1(p)\right]; \qquad \bar{v}_{20} = A_2 \exp\left[yR_2(p)\right];$$
$$\bar{u}_{20} = -i\omega^{-1}R_2(p)\bar{v}_{20}; \qquad \bar{v}_{10} = i\omega^{-1}R_1(p)u_{10};$$
$$R_j(p) = \left[\omega^2 + \frac{Q^2(p)}{a_j^2}\right]^{\frac{1}{2}}; \qquad A_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}; \qquad j=1,2$$
$$\Delta = \left[\left(2\omega^2 a_2^2 + Q^2(p)\right)^2 - 4\omega^2 a_2^4 R_1(p) R_2(p)\right]; \tag{7}$$
$$\Delta_1 = -\frac{\omega Q^2(p)}{\rho p^2 a_2^2}\left[i\sigma_0\left(2\omega^2 a_2^2 + Q^2(p)\right) + 2\omega^2 a_2^2 \sigma_1 R_2(p)\right];$$
$$\Delta_2 = -\frac{\omega Q^2(p)}{\rho p^2 a_2^2}\left[2\omega^2 a_2^2 \sigma_0 R_1(p) - i\sigma_1\left(2\omega^2 a_2^2 + Q^2(p)\right)\right].$$

Исследуем величины напряжений. Исходя из вида решения (7), для преобразованных по Лапласу и Фурье величин напряжений σ_{ij}^0 получим выражения

$$\sigma_{ij}^{(0)} = Q(p)\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} P_{ij}^{(k)}(s)\exp\left[Q(p)\left(yR_{j0}(s) - isx\right)\right]ds;$$
$$P_{xx}^{(1)} = -i\frac{\Delta_{10}}{\Delta_0}\left[a_1^2 s^2 - \left(a_1^2 - 2a_2^2\right)R_{10}^2(s)\right]; \qquad P_{xx}^{(2)} = -P_{yy}^{(2)};$$
$$P_{xx}^{(2)} = -2s\frac{\Delta_{20}}{\Delta_0}R_{20}; \qquad P_{yy}^{(1)} = -i\frac{\Delta_{10}}{\Delta_0}\left[s^2\left(a_1^2 - 2a_2^2\right) - a_1^2 R_{10}^2(s)\right];$$
$$P_{xy}^{(1)} = 2sa_2^2\frac{\Delta_{10}}{\Delta_0}R_{10}(s); \qquad P_{xy}^{(2)} = -i\frac{\Delta_{20}}{\Delta_0}R_0(s);$$
$$R_{j0}(s) = \sqrt{s^2 + a_j^{-2}}; \qquad R_0(s) = \left(1 + 2s^2 a_2^2\right);$$

$$
\begin{aligned}
&\Delta_0 = \left[R_0^2(s) - 4s^2 a_2^4 R_{10}(s) R_{20}(s)\right];\\
&\Delta_{10} = -\left[i\sigma_0 R_0(s) + 2sa_2^2\sigma_1 R_{20}(s)\right];\\
&\Delta_{20} = -\left[2sa_2^2\sigma_0 R_{10}(s) - i\sigma_1 R_0(s)\right].
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Вычисляя квадратуры в выражениях (3.2) по контурам $\Gamma_1, \Gamma_2, \Delta\Gamma$ с использованием леммы Жордана и теории вычетов, следуя методу работы [6], можно получить выражения для напряжений $\sigma_{ij}^{(0)}$ в полуплоскости $y \le 0$. Например, для напряжения $\sigma_{xx}^{(0)}$ на свободной границе $y = 0$ при $\sigma_1 = 0$ получим выражение

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{xx}^{(0)} = Q(p)\left\{\left[P_{xx}^{(1)} + P_{xx}^{(2)}\right]\left(s - ia_R^{-1}\right)\exp\left[i|x|sQ(p)\right]\right\}_{s=ia_R^{-1}} +\\
&+Q(p)\int_{a_2^{-1}}^{a_1^{-1}} \sigma_0\left[\frac{F_1(i\eta)}{\Delta_0(i\eta)} + \frac{F_2(i\eta)}{\overline{\Delta}_0(i\eta)}\right]\exp\left[-\eta|x|sQ(p)\right]d\eta;\\
&\overline{\Delta}_0(s) = \left[R_0^2(s) + 4s^2a_2^4R_{10}(s)R_{20}(s)\right];\\
&F_{1,2}(s) = 4s^2R_{10}(s)R_{20}(s) \mp \left(2s^2 + a_2^{-2}\right)\times\\
&\times\left[2s^2 - a_2^{-2}\left(1 - 2\frac{a_2^2}{a_1^2}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{9}
$$

(причем данное выражение близко по постановке задачи работе [7], где вычислено неверно).

Для того, чтобы обратить выражение (9) по p, необходимо обратить по p выражение

$$Q(p)\exp\left[-\alpha Q(p)\right],$$

которое для величины $Q^2(p)$, определяемой по формуле (4), легко обращается. Получим

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_0 - i\infty}^{\alpha_0 + i\infty} Q(p)\exp\left[-\alpha Q(p) + pt\right]dp = \exp\left(-\frac{1}{2}c_1 t\right)\left\{\delta'(t-\alpha)I_0\left(c_0\sqrt{t^2-\alpha^2}\right) - \right.\\
&-2\delta(t-\alpha)\left(t^2-\alpha^2\right)^{-\frac{1}{2}}I_1\left(c_0\sqrt{t^2-\alpha^2}\right) + c_0\left[\left[\left(t^2-\alpha^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\alpha^2\left(t^2-\alpha^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\times\right.\\
&\times I_1\left(c_0\sqrt{t^2-\alpha^2}\right) +\\
&\left.\left. + c_0\alpha^2\left(t^2-\alpha^2\right)^{-\frac{1}{2}}I_1'\left(c_0\sqrt{t^2-\alpha^2}\right)\right]H(t-\alpha)\right\}.
\end{aligned}
$$

Для вязкоупругой плоскости, материал которой удовлетворяет модели Максвелла, формула (9) дает точное выражение $\sigma_{xx}^{(0)}$ на границе $y = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бленд Д. Теория линейной вязкоупругости. — М.: Мир, 1965.
2. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупургости. — М.: Мир, 1974.
3. Галин Л. А., Шматкова А. А. О движении штампа по границе вязкоупругой полуплоскости // ПММ. — 1968. — Т. 32. — Вып. 3.
4. Брук С. З. Задача Лемба для вязкоупругой полуплоскости // Известия АН СССР. МТТ. — 1972. — № 3.
5. Филиппов И. Г. Динамические задачи линейной теории вязкоупругости / Избранные проблемы прикладной механики. — М.: ВИНИТИ, 1974.
6. Cagniard L. Reflection and refraction of progressive seismic waves. — New York, McGraw-Hill, 1962.
7. Chwalczyk F., Rafa J., Wlodarczyk E. Propagation of two-dimensional non-stationary stress waves in a semiinfinite viscoelastic body, produced by a normal load moving over surface with subsonic velocity. — Proc. Vibrat. Problems, 1972,. — Vol. 13. — №. 3. — Pp. 241—257.