ОЛЬШАНСКИЙ
Василий Павлович
(Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства)

OL'SHANSKIY
Vasiliy Pavlovich
(Kharkiv, Ukraine, Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture)

ОЛЬШАНСКИЙ
Станислав Васильевич
(Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»)

OL'SHANSKIY
Stanislav Vasil'evich
(Kharkiv, Ukraine, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute»)

УДК 534.1

О прохождении резонанса в механической системе переменной массы

В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский

При исследовании прохождения резонанса в механической системе переменной массы машин, работающих в зарезонансных режимах, основной задачей является определение коэффициента динамичности в осцилляторе линейно-переменной массы при его нестационарных резонансных колебаниях под действием внешней силы переменной частоты. В отличие от существующих публикаций впервые получено аналитическое решение задачи Коши в квадратурах для случая, когда частота возмущающей силы меняется по линейному закону, как и масса. В статье с помощью ВКБ-метода приближенно описаны нестационарные резонансные колебания осциллятора линейно-переменной массы под действием внешней силы, частота которой меняется по линейному закону. Рассмотрены случаи разгона и выбега системы при увеличении и уменьшении массы осциллятора. Расчеты показали, что и в осцилляторе переменной массы при переходе через резонанс максимальные амплитуды колебаний наблюдаются не в момент равенства меняющихся во времени собственной частоты и частоты внешнего воздействия, а позже, т. е. при некотором смещении от этого момента времени. Величина смещения (запаздывания) уменьшается при увеличении силы вязкого трения. Полученные формулы позволяют рассчитать амплитуды опасных резонансных колебаний.

Ключевые слова: осциллятор, система переменной массы, коэффициент динамичности, резонанс, ВКБ-метод.

On the passage through a resonance in a variable-mass mechanical system

V.P. Ol'shanskiy, S.V. Ol'shanskiy

The study of passage through resonance is an essential problem in many technical applications especially when analyzing the dynamics of above-resonance machines. In this case, it is important to determine the dynamic factor of transient resonant oscillations of a linear variable-mass oscillator under the action of an external force of variable frequency. In contrast to the existing literature, a new analytical solution to the Cauchy problem is found by quadratures for case when the disturbing force frequency and mass vary linearly. In this paper, the WKB approximation is used to describe transient resonance oscillations of a linearly varying mass under the action of an external force whose frequency varies linearly as well. The acceleration and coasting of the system with an increasing and decreasing oscillating mass are considered. The calculations showed that the resonance mode of a variable mass oscillator is not observed when the time-varying natural frequency coincides with the frequency of an external action but at a later time. The offset time decreases with increasing viscous forces. The obtained formulas make it possible to calculate the amplitudes of dangerous resonant oscillations.

Keywords: oscillator, variable-mass system, dynamic factor, resonance, WKB method.

Исследованием резонанса системы с одной степенью свободы при действии возмущающей силы переменной частоты, а также переменной во времени амплитуды, занимались многие авторы [1–3]. Менее исследованным является вопрос прохождения резонанса осциллятором с переменной жесткостью или массой. Проблема такого резонанса возникает в устройствах, в которых систематически используют механизмы с переменной массой или жесткостью звеньев [4]: механизмы экскаваторов и грейферов; машины шахтного подъема; вибрационные конвейеры; емкости и бункеры для загрузки жидкостью или сыпучим веществом; подрессоренные платформы транспортных средств, загружаемые сыпучим грузом и пр. В отличие от публикации А.П. Бессонова в обзоре [5], где моделировалось прохождение резонанса на аналоговой машине, в данной работе строится приближенное аналитическое решение задачи Коши в квадратурах для случая, когда частота возмущающей силы меняется по линейному закону, как и масса.

Цель работы — определение коэффициента динамичности в осцилляторе линейно-переменной массы при его нестационарных резонансных колебаниях под действием внешней силы переменной частоты.

Решение задачи в квадратурах. С учетом диссипативной и реактивной сил, вынужденные резонансные колебания осциллятора описываются дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{m_0\gamma\varepsilon+\mu}{m_0(1+\gamma t)}\frac{dx}{dt}+\frac{\omega^2}{1+\gamma t}x=\frac{Q}{m_0(1+\gamma t)}\sin\left(at+\frac{bt^2}{2}\right), \tag{1}$$

где m_0 — начальная масса осциллятора; $m_0\gamma$ — скорость изменения массы во времени t; $\omega^2=c/m_0$; c — коэффициент жесткости пружины; μ — коэффициент вязкого трения; ε — коэффициент реактивности переменной массы, $0\le\varepsilon\le 1$; Q — амплитуда возмущающей силы; a, b — постоянные коэффициенты.

Решим уравнение (1) при нулевых начальных условиях

$$x(0)=0;\quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=0. \tag{2}$$

В соответствии с методом Лагранжа, решение задачи Коши, представленной выражениями (1) и (2), имеет вид

$$x(t)=c_1(t)x_1(t)+c_2(t)x_2(t). \tag{3}$$

Здесь

$$c_{1,2}(t)=\mp\frac{Q}{m_0}\int_0^t\frac{x_{2,1}(t)\sin\left(at+bt^2/2\right)}{\Delta(t)(1+\gamma t)}dt; \tag{4}$$

$$\Delta(t)=x_1(t)\frac{dx_2}{dt}-x_2(t)\frac{dx_1}{dt};$$

$x_1(t)$, $x_2(t)$ удовлетворяют однородному уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{m_0\gamma\varepsilon+\mu}{m_0(1+\gamma t)}\frac{dx}{dt}+\frac{\omega^2}{1+\gamma t}x=0. \tag{5}$$

При $\mu=\varepsilon=0$ в (5) функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ выражаются через функции Бесселя индекса единица [6]. Далее, для упрощения задачи используем их ВКБ-приближения (приближения Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна) [7]. Чтобы получить эти приближения подставим в (5) произведение

$$x(t)=y(t)\exp\left[-\frac{1}{2}\int\frac{m_0\gamma\varepsilon+\mu}{m_0(1+\gamma t)}dt\right]=y(t)(1+\gamma t)^{-\frac{1}{2}(\varepsilon+\mu/m_0\gamma)}.$$

Для определения функции $y(t)$ используем уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\left\{\frac{\omega^2}{1+\gamma t}-\frac{1}{4}\left[\frac{m_0\gamma\varepsilon+\mu}{m_0(1+\gamma t)}\right]^2+\frac{1}{2}\frac{\gamma(m_0\gamma\varepsilon+\mu)}{m_0(1+\gamma t)^2}\right\}y=0,$$

которое решаем приближенно ВКБ-методом [8], в предположении, что $\omega/|\gamma|>>1$. Пренебрегая слагаемыми, порядок малости которых выше $(\omega/|\gamma|)^{-1}$, получаем

$$y_{1,2}(t) \approx \exp\left(\pm i\omega \int \frac{dt}{\sqrt{1+\gamma t}} + \frac{\gamma}{4}\int \frac{dt}{1+\gamma t}\right),\ i = \sqrt{-1}.$$

Вычислив эти интегралы, с учетом записанного выше выражения $x(t)$ и известной формулы Эйлера, находим ВКБ-приближения фундаментальных решений уравнения (5):

$$x_1(t) = (\eta/\eta_0)^{\beta}\cos(\eta);\ x_2(t) = (\eta/\eta_0 =)^{\beta}\sin(\eta),$$

где

$$\eta_0 = \frac{2\omega}{\gamma};\ \eta = \eta_0\sqrt{1+\gamma t};\ \beta = \frac{1}{2} - \varepsilon - \frac{\mu}{\gamma m_0}.$$

Подставляя (6) в (4), с учетом, что

$$\frac{dt}{d\eta} = \frac{2\eta}{\gamma\eta_0^2};\quad \Delta(t) = \frac{\gamma\eta_0}{2}\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^{2\beta-1};\ 1+\gamma t = \frac{\eta^2}{\eta_0^2},$$

решение (3) сводим к виду

$$x(t) = \frac{Q}{c}\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^{\beta}\left[a_1(\eta)\cos(\eta) + a_2(\eta)\sin(\eta)\right]. \quad (7)$$

Здесь

$$a_1(\eta) = -\eta_0\int_1^{\eta/\eta_0} y^{-\beta}\sin(\eta_0 y)\times$$
$$\times\sin\left[\frac{1}{\gamma}(y^2-1)\left(a + \frac{b}{2\gamma}(y^2-1)\right)\right]dy;$$

$$a_2(\eta) = \eta_0\int_1^{\eta/\eta_0} y^{-\beta}\cos(\eta_0 y)\times$$
$$\times\sin\left[\frac{1}{\gamma}(y^2-1)\left(a + \frac{b}{2\gamma}(y^2-1)\right)\right]dy. \quad (8)$$

Используя формулы (7) и (8) для вычисления $x(t)$, находим выражение

$$x(t) = \frac{Q}{m_0\omega}\int_0^t\left(\frac{1+\gamma t}{1+\gamma\tau}\right)^{\beta/2}\times$$
$$\times\frac{\sin\left[\eta_0\left(\sqrt{1+\gamma t} - \sqrt{1+\gamma\tau}\right)\right]}{\sqrt{1+\gamma\tau}}\sin\left(a\tau + \frac{1}{2}b\tau^2\right)d\tau. \quad (9)$$

В пределе, когда $\gamma \to 0$, $\beta \to -\infty$, а

$$\lim_{\gamma\to 0}\eta_0\left(\sqrt{1+\gamma t} - \sqrt{1+\gamma\tau}\right) = \omega(t-\tau),$$

$$\lim_{\gamma\to 0}\left(\frac{1+\gamma t}{1+\gamma\tau}\right)^{\beta/2} = \exp\left[-\frac{\mu}{2m_0}(t-\tau)\right],$$

выражение (9) сводится к более компактной формуле:

$$x(t) = \frac{Q}{m_0\omega}\int_0^t e^{-\frac{\mu}{2m_0}(t-\tau)}\sin\omega(t-\tau)\sin\left(a\tau + \frac{1}{2}b\tau^2\right)d\tau.$$

Это приближенное выражение, полученное предельным переходом для осциллятора постоянной массы $m = m_0 = \text{const}$, совпадает с известным точным решением [2], после замены в нем ω на $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\mu}{m_0}\right)^2}$. Следовательно, погрешность принятого ВКБ-приближения мала при $\frac{c}{m_0} >> \frac{1}{4}\left(\frac{\mu}{m_0}\right)^2$.

Выделяя в (9) амплитуду вынужденных колебаний $am\,x(t)$, получаем формулу максимального коэффициента динамичности перемещений осциллятора

$$K_{д} = \frac{cam\,x(t)}{Q} = \omega t\sqrt{b_1^2(t) + b_2^2(t)}, \quad (10)$$

где

$$b_1(t) = \int_0^1\left(\frac{1+\gamma t}{1+\gamma t y}\right)^{\beta/2}\times$$
$$\times\frac{\sin\left[\eta_0\left(\sqrt{1+\gamma t} - \sqrt{1+\gamma t y}\right)\right]}{\sqrt{1+\gamma t\, y}}\times$$
$$\times\cos\left[at(y-1) + \frac{bt^2}{2}(y^2-1)\right]dy; \quad (11)$$

$$b_2(t) = \int_0^1\left(\frac{1+\gamma t}{1+\gamma t y}\right)^{\beta/2}\times$$
$$\times\frac{\sin\left[\eta_0\left(\sqrt{1+\gamma t} - \sqrt{1+\gamma t y}\right)\right]}{\sqrt{1+\gamma t\, y}}\times$$
$$\times\sin\left[at(y-1) + \frac{bt^2}{2}(y^2-1)\right]dy.$$

Интегралы (11) не выражаются через элементарные или затабулированные специальные функции, поэтому их вычисляют на компьютере.

Численные результаты и их анализ. Рассмотрим колебания осциллятора возрастающей массы, для следующих исходных данных: $m_0 = 10$ кг; $c = 160$ Н/м; $\varepsilon = 0{,}5$; $\gamma = 0{,}025$ с$^{-1}$; $Q = 1$ Н. Зависимости коэффициента динамичности при разгоне осциллятора для $a = 0{,}266$ с$^{-1}$, $b = 0{,}15$ с$^{-2}$ представлены на рис. 1, *а*; для $a = 6{,}266$ с$^{-1}$, $b = -0{,}15$ с$^{-2}$ при выбеге осциллятора — на рис. 1, *б*.

Для принятых исходных данных совпадение собственной частоты осциллятора возрастающей массы с частотой внешнего возмущения происходит при $t = 20$ с. Однако, как при разгоне, так и при выбеге, максимум амплитуды колебаний достигается при $t > 20$ с. На рисунке видно смещение нестационарного резонанса вправо, т. е. запаздывание его во времени. При выбеге уровень амплитуд колебаний осциллятора возрастающей массы немного выше, чем при разгоне.

Сравним результаты, полученные приближенно с помощью интегралов (11) с результатами численного интегрирования уравнения (1). Зависимость вынужденных колебаний в резонансной области, к которым приводит численное решение задачи Коши для выражений (1) и (2) на компьютере, при разгоне и выбеге представлены на рис. 2. В расчетах использованы те же исходные (численные) данные, что и при получении кривых *2* на рис. 1.

Сравнивая амплитудные значения перемещений при разгоне (см. рис. 1, *а* и 2, *а*), а также

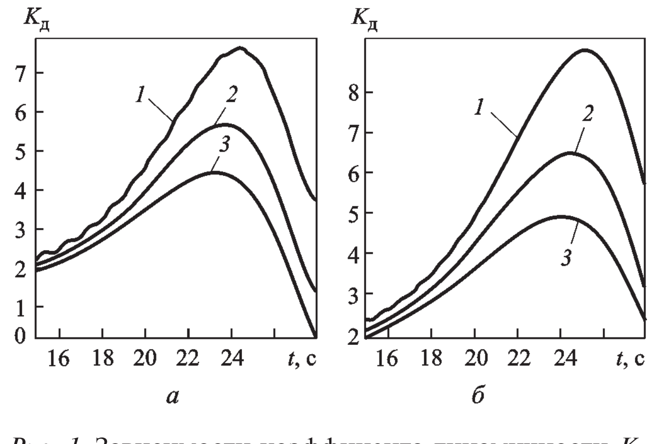

Рис. 1. Зависимости коэффициента динамичности $K_д$ от времени t при разгоне (*а*) и при выбеге (*б*):

1 — μ = 3 кг/с; *2* — μ = 6 кг/с; *3* — μ = 9 кг/с

при выбеге (см. рис. 1, *б* и 2, *б*), можно отметить близкие значения коэффициентов динамичности. Следовательно, приближенные формулы (11) обладают достаточной точностью.

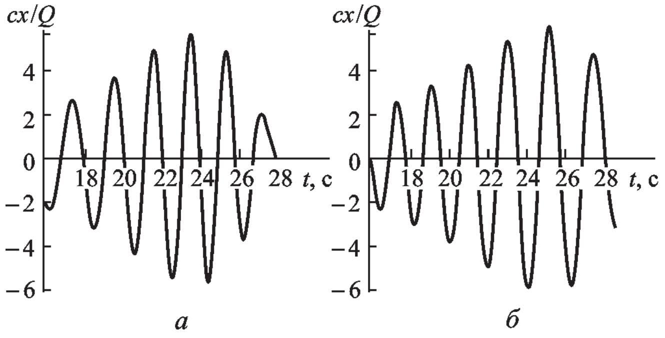

Рис. 2. Зависимость вынужденных колебаний x от времени t при разгоне (*а*) и при выбеге (*б*)

Рассмотрим колебания осциллятора убывающей массы для следующих исходных данных: $m_0 = 10$ кг; $c = 160$ Н/м; $\varepsilon = 0{,}5$; $\gamma = -0{,}05$ с$^{-1}$; $Q = 1$ Н. Зависимости коэффициента динамичности, соответствующие разгону осциллятора при $a = 1{,}6569$ с$^{-1}$ и $b = 0{,}4$ с$^{-2}$, представлены на рис. 3, *а*, а при выбеге осциллятора при $a = 9{,}6569$ с$^{-1}$ и $b = -0{,}4$ с$^{-2}$ — на рис. 3, *б*.

В данном примере совпадение собственной частоты осциллятора убывающей массы с частотой внешней силы происходит при $t = 10$ с. Но, как при разгоне, так и при выбеге, максимальные резонансные амплитуды достигаются при $t > 10$ с. На кривых нестационарный резонанс смещается вправо. Уровень амплитуд

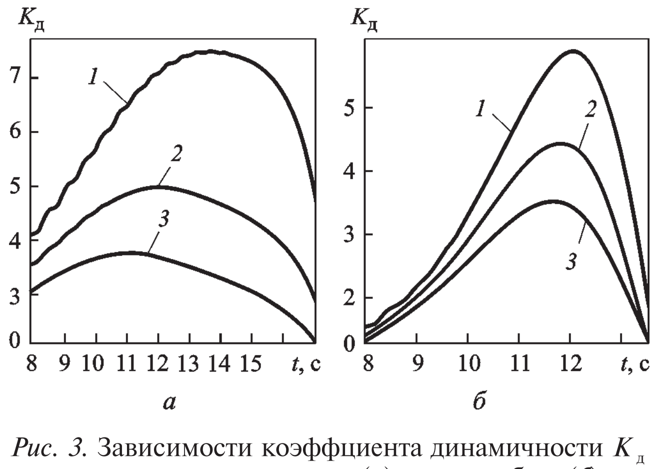

Рис. 3. Зависимости коэффциента динамичности $K_д$ от времени t при разгоне (*а*) и при выбеге (*б*):

1 — μ = 3 кг/с; *2* — μ = 5 кг/с; *3* — μ = 7 кг/с колебаний при разгоне осциллятора убывающей массы оказался выше уровня амплитуд при выбеге.

Выводы

1. Применение ВКБ-метода позволяет построить в квадратурах приближенное решение задачи о нестационарном резонансе в осцилляторе переменной массы при линейном изменении частоты внешней силы.

2. Расчеты показали, что и в осцилляторе переменной массы при переходе через резонанс максимальные амплитуды колебаний наблюдаются не в момент равенства меняющихся во времени собственной частоты и частоты внешнего воздействия, а при некотором запаздывании от этого момента времени.

3. Установлено, что величина смещения (запаздывания) уменьшается при увеличении силы вязкого трения. Сила трения также оказывает значительное влияние на уровень резонансных амплитуд колебаний.

Литература

[1] Katsuhiko Ogata. *System Dynamics*. University of Minnesota, 2005. 617 p.

[2] Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. *Метод ВКБ в расчетах нестационарных колебаний осцилляторов*. Харьков, Міськдрук, 2014. 264 с.

[3] Митропольский Ю.А. *Избранные труды*. В 2 т. Т. 2. Киев, Наукова думка, 2012. 504 с.

[4] Cveticanin L. *Dynamics of Machines with Variable Mass*. Taylor & Francis Ltd, 1998. 300 p.

[5] Cveticanin L. A review on dynamics of mass variable systems. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*, 2012, vol. 6, no. 1, pp. 56–74.

[6] Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. Моделирование колебаний осциллятора линейно-переменной массы при импульсном нагружении. *Вісник НТУ «ХПІ»: Математичне моделювання в техніці та технологіях*, 2013, № 37(1010), с. 125—130.

[7] Karnakov B.M., Krainov V.P. *WKB Approximation in Atomic Physics*. Springer, 2013. 176 p.

[8] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2001. 576 с.

References

[1] Katsuhiko Ogata. *System Dynamics*. Fourth Edition. University of Minnesota, 2005. 617 p.

[2] Ol'shanskii V.P., Ol'shanskii S.V. *Metod VKB raschetakh nestatsionarnykh kolebanii ostsilliatorov* [WKB method for unsteady oscillator]. Khar'kov, Mis'kdruk publ., 2014. 264 p.

[3] Mitropol'skii Iu.A. *Izbrannye trudy* [Selected Works]. Kiev, Naukova dumka publ., vol. 2, 2012. 504 p.

[4] Cveticanin L. *Dynamics of Machines with Variable Mass*. Taylor & Francis Ltd, 1998. 300 p.

[5] Cveticanin L. A review on dynamics of mass variable systems. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*, 2012, vol. 6, no. 1, pp. 56–74.

[6] Ol'shanskii V.P., Ol'shanskii S.V. Modelirovanie kolebanii ostsilliatora lineino-peremennoi massy pri impul'snom nagruzhenii [Modeling oscillator linearly variable mass under impact loading]. *Visnik NTU «KhPI»: Matematichne modeliuvannia v tekhnitsi ta tekhnologiiakh* [Herald of NTU «KPI»: Mathematical modeling in engineering and technologies]. 2013, no. 37(1010), pp. 125—130.

[7] Karnakov B.M., Krainov V.P. *WKB Approximation in Atomic Physics*. Springer, 2013. 176 p.

[8] Zaitsev V.F., Polianin A.D. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniiam* [Handbook of Differential Equations]. Moscow, FIZMATLIT publ., 2001. 576 p.

Статья поступила в редакцию 30.01.2014

Информация об авторах

ОЛЬШАНСКИЙ Василий Павлович (Харьков) — доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Теоретической механики и деталей машин». Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства (61002, Харьков, Украина, ул. Артема, 44).

ОЛЬШАНСКИЙ Станислав Васильевич (Харьков) — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Системы и процессы управления». Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт» (61002, Харьков, Украина, ул. Фрунзе, 21, e-mail: stasolsh77@gmail.com).

Information about the authors

OL'SHANSKIY Vasiliy Pavlovich (Kharkiv) — Dr. Sc. (Phys. Math.), Professor of «Theoretical Mechanics and Machine Parts» Department. Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture (KhPVNTUA, Artema str., 44, 61002, Kharkiv, Ukraine).

OL'SHANSKIY Stanislav Vasil'evich (Kharkiv) — Cand. Sc. (Phys. Math.), Associate Professor of «Control Processes and Systems» Department. National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute» (NTU KhPI, Frunze str., 21, 61002, Kharkiv, Ukraine, e-mail: stasolsh77@gmail.com).