

8. Кузнецов В. А. Ползучесть стохастически неоднородных сред в условиях плоского напряженного состояния // Математическая физика. — Куйбышев: КуАИ, 1976. — С. 107—110.
9. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. — М.: Наука, 1968. — 464 с.
10. Закономерности ползучести и длительной прочности: Справочник/ Под ред. С.А. Шестерикова. — М.: Машиностроение, 1983. — 101 с.

666.1.4: 681.7.068.4

ЧИСЛЕННОЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ СТЕКЛОМАССЫ

Канд. техн. наук, доц. В.А. ИЛЬИЧЕВ

Исследуется процесс вытяжки тонких стержней из разогретой стекломассы. Решается стационарная задача поведения стекломассы в зоне формирования оптических стержней. Задача сводится к интегрированию нелинейного дифференциального уравнения 2-го порядка относительно скорости. Уравнение не может быть проинтегрировано в замкнутом виде, поэтому, для нахождения решения использовалась система Рунге-Кутты. Решение позволяет вводить в полученное дифференциальное соотношение возмущения различных управляющих факторов. Таким образом, можно проследить, как меняется с течением времени отклик радиуса сечения волокна в определенном сечении на возмущение вязкости и найти распределение функции отклика радиуса сечения по длине волокна в произвольный фиксированный момент времени.

Process of extraction of pin-type rods from fluid glass is examined. Stationary problem of glass melt behavior in a zone of optical rods formation is solved. It's reduced to integration of a nonlinear differential second-degree equation against velocity. The equation cannot be integrated in a self-contained aspect; hence, for finding a solution the Runge-Kuttg system was used. Perturbations of various operating factors could be introduced into the obtained differential relation owing to the solution. Thus, it is possible to trace the response of beam cross-section radius in certain circumstances on viscous resistance and find a distribution of the response function of cut radius throughout the fiber length in the arbitrary fixed instant.

Рассматривается процесс вытяжки оптических стержней из разогретой стекломассы. Качество стержней зависит от множества физических и технологических факторов, оптимальное значение которых обеспечивается системой управления процессом вытяжки [1]. Для решения задач управления в выбранной области параметров необходимо знать статические и динамические свойства объекта управления. Статические свойства определяются чувствительностью процесса к различного рода возмущениям, в том числе и технологических параметров, в установившемся состоянии. Автором ищутся решения для установившегося движения стекломассы в зоне формирования оптического стержня.

В работе [2] показано, что основные характеристики в зоне формирования оптического стержня при установившемся движении могут быть определены для модели одномерного потока из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz}{dv} &= \frac{3\mu - v^2 \lambda \rho}{p - \lambda \rho g v} \\ \frac{dp}{dv} &= \frac{\rho(v p - 3\mu g)}{p - \lambda \rho g v} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где v, p — скорость и напряжение в рассматриваемом сечении зоны формирования; μ — динамическая вязкость стекломассы; ρ — плотность стекломассы; $\lambda = \mu/G$ — время максвелловской релаксации; G — модуль сдвига; z — аксиальная координата.

Рассмотрим интегрирование системы (1) при заданных граничных условиях: $z = 0, v = v_n, z = L, v = v_b$, где L — длина зоны формирования; v_n — скорость подачи стекломассы в зону формирования; v_b — скорость вытяжки.

При таких граничных условиях известной величиной можно полагать длину зоны формирования, а искомой — функцию $v = v(z)$.

В этом случае систему (1) целесообразнее представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dz} &= \frac{p - \lambda \rho g v}{3\mu - v^2 \lambda \rho} \\ \frac{dp}{dz} &= \frac{p - \lambda \rho g v}{\rho(v p - 3\mu g)} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

В систему уравнений (2) входит неизвестная функция $p = p(z)$. Чтобы решить задачу с заданными граничными условиями, можно систему (2) интегрировать при граничных условиях вида

$$z = L, v = v_b, p = p_0,$$

где p_0 — значения напряжения в конечном сечении зоны формирования.

Задав p_0 и решив систему (2), найдем $v_n(p_0)$.

Зададим необходимую погрешность Δ выполнения граничного условия $z = L, v = v_n$.

Если $|v_n(p_0) - v_n| < \Delta$, будем считать задачу решенной. Если $|v_n(p_0) - v_n| > \Delta$, то итеративным образом будем подбирать p_0 до выполнения заданного неравенства $|v_n(p_0) - v_n| < \Delta$.

Ясно, что при таком численном методе встает вопрос о сходимости решения и трудоемкости метода. Этих проблем можно избежать, если исключить функцию $p = p(z)$ из (2).

Из первого уравнения системы (2) следует:

$$p = v'(A + Bv^2) - Cv, \quad (3)$$

где $A = 3\mu$; $B = -\lambda\rho$; $C = -\rho\lambda g$; $v' = \frac{dv}{dz}$.

После дифференцирования по z выражения (3), имеем

$$p' = v''(A + Bv^2) + 2Bv(v')^2 - Cv'. \quad (4)$$

Из системы (2) находим

$$\frac{dp}{dz} = \frac{Dvp + E}{A + Bv^2}, \quad (5)$$

где $D = \rho$; $E = -3\mu\rho g$.

Правую часть уравнения (5) можно выразить через функцию $v = v(z)$, используя (4). Тогда (5) примет вид

$$p' = \frac{Dv(v'(A + Bv^2) - Cv) + E}{A + Bv^2}. \quad (6)$$

Используя (4), (6), получим

$$v'' = \frac{1}{A + Bv^2} \left((C + Dv)v' - 2Bv(v')^2 - \frac{CDv^2}{A + Bv^2} + \frac{E}{A + Bv^2} \right). \quad (7)$$

Возвращаясь к исходным физическим величинам, после преобразований уравнение (7) примет вид

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{\rho}{3\mu - \lambda\rho v^2} \left(2\lambda \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 + (v - \lambda g) \frac{dv}{dz} - g \right). \quad (8)$$

Граничные условия

$$z = 0, v = v_n, z = L, v = v_b. \quad (9)$$

Заметим, что из уравнения неразрывности следует:

$$v = v_n \frac{S_n}{S} = v_n \frac{r_n^2}{r^2}, \quad (10)$$

где S_n, r_n — соответственно площадь и радиус поперечного сечения зоны формирования при $z = 0$; r — текущий радиус поперечного сечения зоны формирования.

Введем безразмерную функцию

$$x = \frac{S_n}{S}. \quad (11)$$

Тогда при $z = 0, x = 1, z = L, x = k$, где k — коэффициент перетяжки.

Из соотношений $v = v_n x, v' = v_n x', v'' = v_n x''$ в (8) можно перейти к искомой функции x

$$x'' = \frac{\rho}{3\mu - \lambda\rho v_n^2 x^2} \left(2\lambda x v_n^2 (x')^2 + (v_n - \lambda g)x' - \frac{g}{v_n} \right). \quad (12)$$

Для возможной оценки влияния в дифференциальном уравнении (12) отдельных параметров приведем диапазоны и отдельные значения физических и геометрических факторов: $v_b = 1 \text{ м/мин} \dots 10 \text{ м/с}$, $v \in (0,017 \dots 10) [\text{м/с}]$; $D = 10 \dots 20 \text{ мм}$, $D \in [0,01 \dots 0,02] [\text{м}]$; $R \in [0,005 \dots 0,01] [\text{м}]$; $r = 0,25 \text{ мм} \dots 0,5 \text{ мм}$; $r \in [0,25 \cdot 10^{-3} \dots 0,5 \cdot 10^{-3}] [\text{м}]$;

$$v \in [v_n, v_b] = v_n \left[\left(\frac{r}{R} \right)^2, 1 \right]; v_n \leq 0,01 v_b; g = 9,8 \text{ м/с}^2; \rho \cong 2,5 \cdot 10^3 [\text{кг/м}^3];$$

$$G = 2500 \text{ кг/мм}^2 = 2,5 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \mu \in [10^6 \dots 10^8] [\text{Па} \cdot \text{с}]; \lambda = \frac{\mu}{G} \in \frac{1}{2,5} [10^{-4} \dots 10^{-2}] [\text{с}].$$

Введем нормированные величины

$$\mu = \mu_0 \cdot 10^6; G = G_0 \cdot 10^{10}; \rho = \rho_0 \cdot 10^3.$$

Представим (12) через эти нормированные параметры

$$x'' = \frac{\rho_0}{3\mu_0 - \frac{\mu_0}{G_0} \rho_0 (v_n x)^2 \cdot 10^{-7}} \times \\ \times \left(2 \frac{\mu_0}{G_0} x (v_n x')^2 x \cdot 10^7 + \left(v_n x \cdot 10^{-3} - \frac{\mu_0}{G_0} g \cdot 10^7 \right) x' - \frac{g}{v_n \cdot 10^3} \right). \quad (13)$$

Обращает на себя внимание присутствие в (13) малых слагаемых в правой части уравнения: $2 \frac{\mu_0}{G_0} x (v_n x')^2 x \cdot 10^7$, $\left(v_n x \cdot 10^{-3} - \frac{\mu_0}{G_0} g \cdot 10^7 \right) x'$ по сравнению с $\frac{g}{v_n \cdot 10^3}$, а также

$\frac{\mu_0}{G_0} \rho_0 (v_n x)^2 \cdot 10^{-7}$ по сравнению с $3\mu_0$.

Конечно, роль этих слагаемых повышается с увеличением коэффициента перетяжки. Можно выявить диапазон управляющих параметров, при котором (13) можно заметить уравнением

$$x'' = -\frac{\rho g}{3\mu_0 v_n} \text{ при } z=0, x=1, z=L, x=k. \quad (14)$$

Решение (14) может быть представлено в виде

$$x = -\frac{\rho g}{3\mu_0 v_n} + \left(\frac{k-1}{L} - \frac{\rho g}{G\mu v_n} L \right) z + 1.$$

На рис. 1 представлена относительная погрешность δ аналитического решения уравнения (14) по отношению к численному решению уравнения (13). Расчет велся для параметров $\mu_0 = 1$; $\rho_0 = 2,5$; $G_0 = 2,5$; $v_n = 4,2 \cdot 10^{-4} \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$; $k = 400$; $L = 0,3 \text{ м}$. В рассмотренном случае погрешность не превышала 0,3 %.

Таким образом, в зависимости от параметров процесса можно выбрать метод решения задачи.

Полученные решения стационарной задачи движения стекломассы в зоне формирования оптического стержня соответствует стабильным условиям протекания процесса

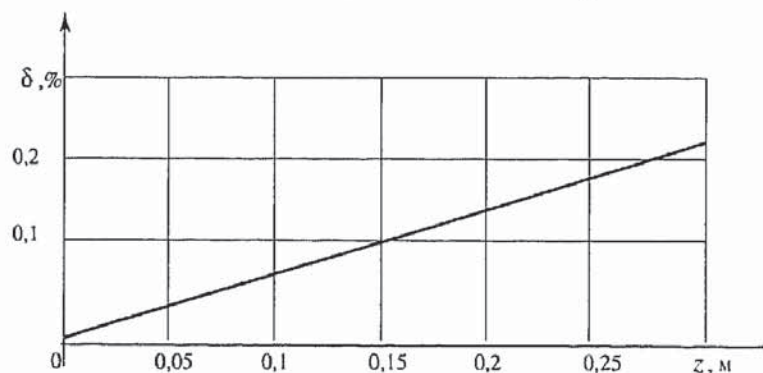


Рис. 1. Погрешность приближенного решения

вытяжки. Если к параметрам, соответствующим невозмущенному движению стекломассы r, v, μ , добавить отклонения первого порядка этих величин $\bar{r}, \bar{v}, \bar{\mu}$, то можно получить уравнения, связывающие эти отклонения. Считая одни из отклонений возмущениями, а другие откликами на эти возмущения, можно оценить чувствительность зоны формирования к изменению технологических параметров, а следовательно, определить

точность поддержания этих параметров на заданном уровне.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уваров В. П., Ильичев В. А. Математические модели процесса вытяжки оптических стержней. — СПб.: ХИМИЗДАТ, 2003. — 136 с.
2. Ильичев В. А., Уваров В. П. Определение формы зоны вытягивания вязкой стекломассы в стационарном режиме // Проблемы машиноведения и машиностроения: Межвуз. сб. — СПб.: СЗТУ, 2002. — Вып. 25. — С. 170—173.