№ 4 *2006*

539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ АДЕКВАТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СТАТИКИ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ

Канд. физ.-мат. наук, ст. препод. Н. В. МИНАЕВА, канд. физ.-мат. наук, доц. Ю. Г. МОРОЗОВ

Рассматривается дискретная система, состоящая из двух жестких стержней, соединенных между собой и с опорой вязкоупругими связями. *Эта система находится под воздействием следящей силы. Показано, что область адекватности математической модели в рамках статики существенно зависит от отношения коэффициентов вязкости.*

The lumped parameter system consisting of two rigid cores, bridged together and with the seat per viscoelastic parts is considered.This system is under action of trackering force. It is shown, that the area of adequacy of mathematical model within the limits of a static essentially correlates with coefficients of viscosity.

Рассмотрим поведение стержневой системы, нагруженной, как показано на рис. 1.

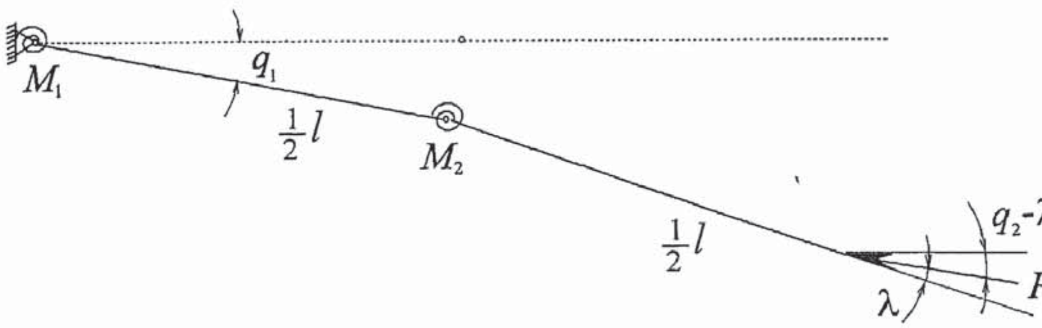

Рис. 1

Поведение рассматриваемой стержневой системы будет описываться решением следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{1}{8}ml^2[\frac{8}{3}\ddot{q}_1+\ddot{q}_2\cos(q_2-q_1)]=2M_2-2M_1+$$

$$+Pl\sin(q_1-q_2+\lambda)+\frac{1}{8}ml^2\dot{q}_2^2\sin(q_2-q_1),$$

$$\frac{1}{8}ml^2[\ddot{q}_1\cos(q_2-q_1)+\frac{2}{3}\ddot{q}_2]=Pl\sin\lambda- \tag{1}$$

$$-2M_2+\frac{1}{8}ml^2\dot{q}_1^2\sin(q_1-q_2),$$

где m — масса стержневой системы

$$M_1=M_1(q_1,\dot{q}_1);\quad M_2=M_2(q_2-q_1,\dot{q}_2-\dot{q}_1) \tag{2}$$

с начальными условиями

$$q_1(0)=\xi_1;\quad q_2(0)=\xi_2;\quad \dot q_1(0)=\eta_1;\quad \dot q_2(0)=\eta_2. \tag{3}$$

При $P=\text{const}$ система уравнений (1) допускает решения $q_i=h_i^{(j)}=\text{const}\quad (i=1,2,...,s)$, удовлетворяющие начальным условиям (3) при

$$\xi_1=h_1^{(j)};\quad \xi_2=h_2^{(j)};\quad \eta_1=\eta_2=0, \tag{4}$$

где $h_i^{(j)}$ — решения системы уравнения статики, которая при

$$M_1(q_1,0)=kq_1;\quad M_2(q_2-q_1,0)=k(q_2-q_1) \tag{5}$$

имеет вид

$$\begin{aligned}&2q_2-4q_1+\alpha\sin(q_1-q_2+\lambda)=0,\\&2q_2-2q_1-\alpha\sin\lambda=0,\end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\alpha=\frac{Pl}{k}. \tag{7}$$

Нелинейная система уравнений (6) имеет следующее единственной (s = 1) решение

$$\begin{aligned}&q_1=h_1=\frac{\alpha}{2}[\sin\lambda+\sin(\lambda-\frac{1}{2}\alpha\sin\lambda)],\\&q_2=h_2=\frac{\alpha}{2}[2\sin\lambda+\sin(\lambda-\frac{1}{2}\alpha\sin\lambda)].\end{aligned} \tag{8}$$

При всех ли значениях параметров α, λ решение (8) задачи (1), определяющее при P = const состояние покоя, имеет физический смысл, т.е. является адекватным?

Для ответа на этот вопрос, как известно, например, из [1, 2], надо рассмотреть знаки вещественных частей корней характеристического уравнения

$$\left|\mu^2A^{-1}(h^{(j)},\lambda)-\mu B'(h^{(j)},0,\lambda)-G'(h^{(j)},P,0,\lambda)\right|=0, \tag{9}$$

где G' и B' — матрицы Якоби.

Матрицы A, G, B в рассматриваемом примере имеют следующий вид:

$$A=\frac{1}{8}ml^2\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix};\quad G=\begin{pmatrix}G_1\\G_2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}, \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}&a_{11}=\frac{8}{3};\quad a_{12}=a_{21}=\cos(q_2-q_1);\quad a_{22}=\frac{2}{3},\\&G_1=2M_2(q_2-q_1,0)-2M_1(q_1,0)+Pl\sin(q_1-q_2+\lambda),\\&G_2=-2M_2(q_2-q_1,0)+Pl\sin\lambda,\end{aligned} \tag{11}$$

$$B_1 = 2[M_2 - M_2(q_2 - q_1, 0) - M_1 + M_1(q_1, 0)] +$$
$$+\frac{1}{8} ml^2 \dot{q}_2^2 \sin(q_2 - q_1),$$
$$B_2 = -2M_2 + 2M_2(q_2 - q_1, 0) + \frac{1}{8} ml^2 \dot{q}_1^2 \sin(q_1 - q_2).$$

Компоненты матриц G' и B'согласно соотношениям (5), (11) в этом примере будут такими:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k} G'_{11} = \alpha \cos(q_1 - q_2 + \alpha) - 4,\\
&\frac{1}{k} G'_{12} = 2 - \alpha \cos(q_1 - q_2 + \alpha),\\
&\frac{1}{k} G'_{21} = 2, \quad \frac{1}{k} G'_{22} = -2,\\
&B'_{11} = -2(b_1 + b_2); \quad B'_{12} = B'_{21} = 2b_2; \quad B'_{22} = -2b_2
\end{aligned} \tag{12}$$

где, как и ранее,

$$b_1 = \frac{\partial M_1(0,0)}{\partial \dot{q}_1}; \quad b_2 = \frac{\partial M_2(0,0)}{\partial \dot{q}_2}. \tag{13}$$

Характеристическое уравнение будет иметь вид

$$a_0 \mu_1^4 + a_1 \mu_1^3 + a_2 \mu_1^2 + a_3 \mu_1 + a_4 = 0, \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned}
&a_0 = \frac{1}{576}(16 - 9\cos^2 \gamma_1),\\
&a_1 = \frac{1}{12}[1 + (5 + 3\cos\gamma_1)n]\beta,\\
&a_2 = \frac{1}{24}(24 + 24n\beta^2 - \alpha\cos(\lambda - \gamma_1)(2 + 3\cos\gamma_1) + 12\cos\gamma_1,\\
&a_3 = 2(n+1)\beta,\\
&a_4 = 4,\\
&\gamma = \frac{1}{2}\alpha \sin\lambda; \quad \beta_2 = n\beta_1 = n\beta.
\end{aligned} \tag{15}$$

Согласно критерию Гурвица для того, чтобы корни уравнения (14) имели отрицательные вещественные части, необходимо выполнить условия ($a_0 > 0$)

$$\begin{aligned}
&a_1 > 0; \quad a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0,\\
&a_1 a_2 - a_3 a_0 > \frac{a_1^2 a_4}{a_3}; \quad a_4 > 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

Поскольку, как следует из (15), $a_3 > 0$ и $a_4 > 0$, то из всех условий (16) надо рассматривать только третье. Оно после подстановки соотношений (14) примет такой вид:

$$\alpha < \frac{1}{\cos(\lambda-\gamma)(2+3\cos\gamma)}[24+12\cos\gamma+24n\beta^2 - \\ -\frac{(16-9\cos^2\gamma)(n+1)}{1+(5+3\cos\gamma)n} - 4\frac{1+(5+3\cos\gamma)n}{1+n}]. \quad (17)$$

Как видно из (17), критерий адекватности состояния, соответствующего решению (8), зависит как от параметров, характеризующих рассматриваемую систему и внешнее воздействие на нее, так и остальных параметров, характеризующих диссипацию энергии в системе, т.е. от β и n.

Рассмотрим более подробно условие (17). На рис. 2 представлены качественные графики зависимости критического значения параметра нагрузки α от n для двух случаев: $\lambda = 0$ и $\lambda = 0{,}1$ при ничтожно малом коэффициенте вязкости, т.е. при $\beta = 0$

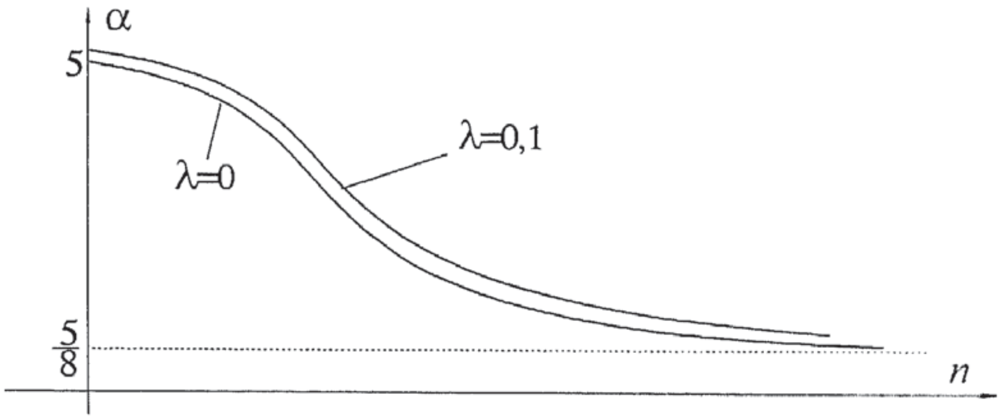

Рис. 2

Следовательно, в качестве нижней границы области адекватности решения (8) можно брать значение α, определяемое из (17) при $n \to \infty$, т.е. из соотношения

$$\alpha_* = \frac{(2+3\cos\gamma_2)}{(5+3\cos\gamma_2)\cos(\lambda-\gamma_2)},$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2}\alpha\sin\lambda.$$

Итак, в случае невыполнения условия (17) решение (8) нелинейной системы (1) не имеет физического смысла, т.е деформируемая механическая система, представленная на рис. 1, не имеет ни одного положения равновесия и рассматривать ее в рамках статики бессмысленно (математическая модель в рамках статики не будет адекватной).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В. В. Статистические методы в строительной механике. — М.: Литература по строительству, 1965. — 279 с.
2. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969. — 424 с.