

РАСЧЕТ И КОНСТРУИРОВАНИЕ МАШИН

534.1:539.3

МЕТОД НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРИ НАЛИЧИИ ДВУХОПОРНЫХ ТЕЛ, УПРУГО СКРЕПЛЕННЫХ СО СТЕРЖНЕМ

Канд. техн. наук, доц. М.М. ИЛЬИН

При исследовании динамики корпусов кораблей в качестве модели для определения низших (балочных) собственных частот поперечных колебаний используется неоднородный стержень с жестко или упруго скрепленными в определенных сечениях телами. Однако блоки энергетического оборудования могут иметь фундаментные рамы достаточной протяженности, соизмеримой с длиной корпуса. В этом случае они должны моделироваться двухопорными телами, т.е. телами, упруго скрепленными с корпусом в двух, достаточно разнесенных по длине, сечениях. Предлагаемая методика позволяет модифицировать метод начальных параметров и включить двухопорные тела в стандартную процедуру расчета.

A non-uniform rod with rigid bodies hard-mounted or elastically mounted in certain sections is used as a model for finding lowest (beam) natural frequencies of transverse oscillation during the investigation of ship hull dynamics. However energy equipment blocks may have foundation frames commensurable with a hull. In this case they must be simulated by two-support rigid bodies; that is by bodies elastically mounted with a hull in two sections at a sufficient distance from each other. A proposed technique makes it possible to modify the initial parameters method and to include two-support bodies in a standard calculation procedure.

Неоднородный стержень со ступенчатым изменением по длине жесткости и погонной массы, несущий твердое тело, упруго скрепленное со стержнем в двух сечениях, представлен на рис. 1, где EJ_{i-1} , μ_{i-1} , EJ_i , μ_i , EJ_{i+1} , μ_{i+1} — соответственно изгибные жесткости и погонные массы трех последовательных участков; l_{i-1} , l_i — длины участков; m_i , l_{C_i} , I_i — масса, координата центра масс и момент инерции относительно центра масс упруго прикрепленного тела (УПТ); c_i — жесткости амортизаторов. Жесткости амортизаторов принимаются равными, хотя это и не принципиально.

Запишем уравнения, описывающие элементы расчлененной схемы (рис. 2)

1. Левый амортизатор

$$N_{1i}(t) = c_i[v_{1i}(t) - y_{i-1}(l_{i-1}, t)], \quad v_{1i}(t) = y_{i-1}(l_{i-1}, t) + \frac{N_{1i}(t)}{c_i}, \quad (1)$$

где $N_{1i}(t)$ — сила в левом амортизаторе; $v_{1i}(t)$ — перемещение левого конца УПТ; $y_{i-1}(l_{i-1}, t)$ — перемещение i -го стыка.

2. УПТ

$$m_i \ddot{y}_{C_i}(t) = -[N_{1i}(t) + N_{2i}(t)], \quad I_i \ddot{\varphi}_i(t) = N_{1i}(t)l_{C_i} - N_{2i}(t)(l_i - l_{C_i}),$$

$$y_{C_i}(t) = v_{1i}(t) \left(1 - \frac{l_{C_i}}{l_i}\right) + v_{2i}(t) \frac{l_{C_i}}{l_i}, \quad \varphi_i(t) = \frac{v_{2i}(t) - v_{1i}(t)}{l_i}, \quad (2)$$

где $N_{2i}(t)$ — сила в правом амортизаторе; $v_{2i}(t)$ — перемещение правого конца УПТ; y_{C_i} — перемещение центра масс УПТ; $\varphi_i(t)$ — угол поворота УПТ.

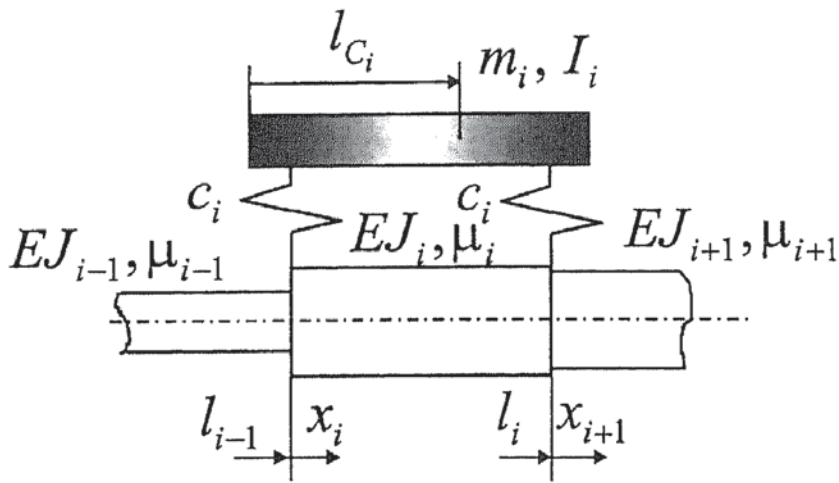


Рис. 1. Стык с упруго прикрепленным телом

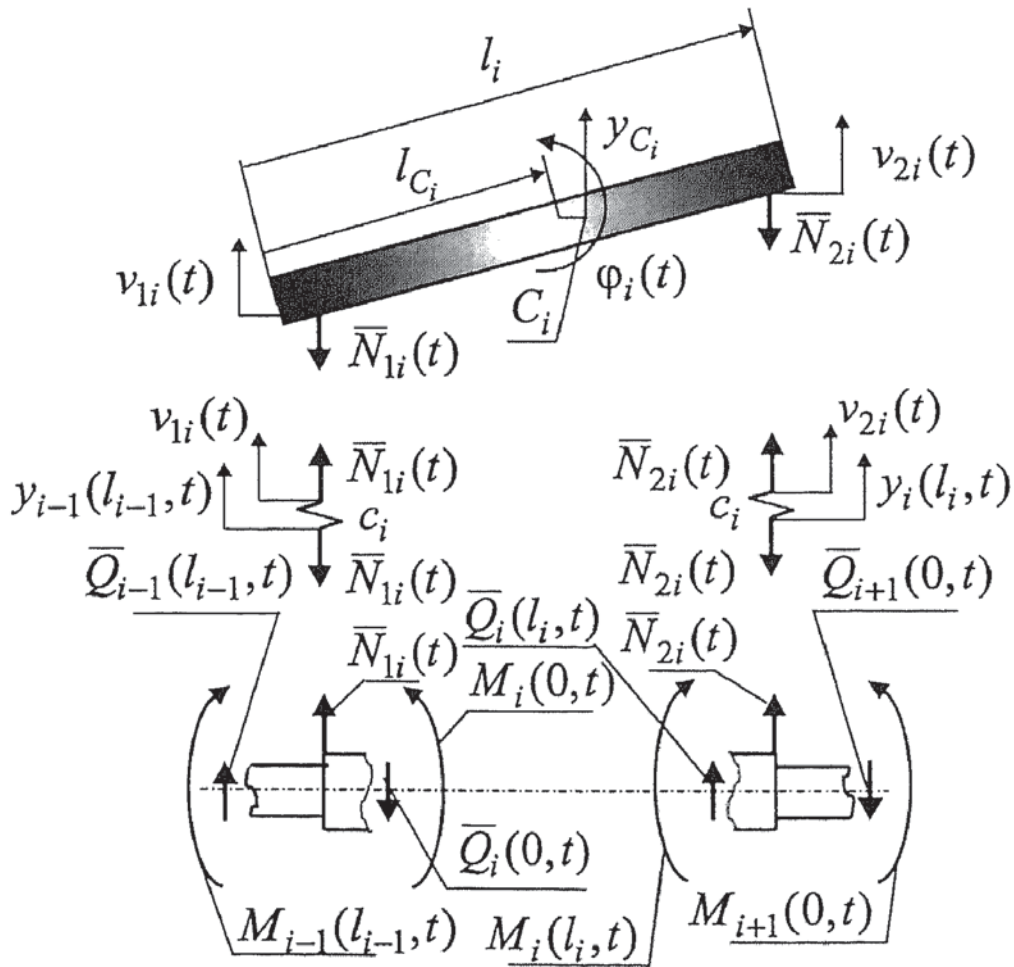


Рис. 2. Расчетная схема

3. Правый амортизатор

$$N_{2i}(t) = c_i[v_{2i}(t) - y_i(l_i, t)], \quad y_i(l_i, t) = v_{2i}(t) - \frac{N_{2i}(t)}{c_i}, \quad (3)$$

где $y_i(l_i, t)$ — перемещение $i+1$ -го стыка.

4. Левый i -ый и правый $i+1$ стыки (силовые условия)

$$Q_i(0, t) = Q_{i-1}(l_{i-1}, t) + N_{1i}(t), \quad Q_{i+1}(0, t) = Q_i(l_i, t) + N_{2i}(t), \quad (4)$$

где $Q_{i-1}(l_{i-1}, t)$, $Q_i(0, t)$, $Q_i(l_i, t)$, $Q_{i+1}(0, t)$ — поперечные силы в стержне.

Представим в соответствии с методом разделения переменных, входящие в (1)—(4) величины, в виде

$$\begin{aligned} N_{1i}(t) &= N_{1i}T(t); \quad N_{2i}(t) = N_{2i}T(t); \quad v_{1i}(t) = v_{1i}T(t), \\ Q_{i-1}(l_{i-1}, t) &= Q_{i-1}(l_{i-1})T(t); \quad Q_i(0, t) = Q_i(0)T(t), \\ Q_{i+1}(0, t) &= Q_{i+1}(0)T(t); \quad v_{2i}(t) = v_{2i}T(t), \\ y_{i-1}(l_{i-1}, t) &= X_{i-1}(l_{i-1})T(t); \quad y_i(l_i, t) = X_i(l_i)T(t), \\ y_{i+1}(0, t) &= X_{i+1}(0)T(t); \quad \ddot{T}(t) = -\omega^2 T(t). \end{aligned}$$

Тогда, после довольно громоздких преобразований (1)—(3), представим амортизаторы и УПТ в виде четырехполюсников

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_{1i} \\ N_{1i} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1/c_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{i-1}(l_{i-1}) \\ N_{1i} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} v_{2i} \\ N_{2i} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} km_{11} & km_{12} \\ km_{21} & km_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1i} \\ N_{1i} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} X_i(l_i) \\ N_{2i} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1/c_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2i} \\ N_{2i} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5)$$

где km_{11} ; km_{12} ; km_{21} ; km_{22} — элементы матрицы перехода через УПТ.

$$\begin{aligned} km_{11} &= \frac{I_i + m_i(l_i - l_{c_i})^2}{I_i - m_i l_{c_i}(l_i - l_{c_i})}, \quad km_{12} = -\frac{l_i^2}{\omega^2 [I_i - m_i l_{c_i}(l_i - l_{c_i})]}, \\ km_{21} &= \frac{\omega^2 I_i m_i}{I_i - m_i l_{c_i}(l_i - l_{c_i})}, \quad km_{22} = -\frac{I_i + m_i l_{c_i}^2}{I_i - m_i l_{c_i}(l_i - l_{c_i})}. \end{aligned}$$

Отметим, что знаменатель элементов km_{ij} может обратиться в нуль только в случае, когда УПТ представляет собой как бы гантель, состоящую из двух равных точечных масс, соединенных невесомым стержнем. Но в этом случае взаимное влияние масс отсутствует, и стык превратится в два последовательных стандартных стыка с упруго прикрепленными телами. Определитель матрицы $\Delta = -1$, т.е. преобразование, задаваемое ею, является невырожденным при любых значениях частоты.

Основываясь на (5), можно записать

$$\begin{pmatrix} X_i(l_i) \\ N_{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{i-1}(l_{i-1}) \\ N_{1i} \end{pmatrix} \quad (6)$$

где матрица s_i есть результат перемножения трех матриц

$$s_i = \begin{pmatrix} 1 & -1/c_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} km_{11} & km_{12} \\ km_{21} & km_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/c_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ее элементы равны

$$s_{11} = km_{11} - \frac{km_{21}}{c_i}; \quad s_{12} = km_{12} + \frac{km_{11} - km_{22}}{c_i} - \frac{km_{21}}{c_i^2},$$

$$s_{21} = km_{21}; \quad s_{22} = km_{22} + \frac{km_{21}}{c_i}.$$

Обозначим векторы формы на входе в i -ый участок и выходе из него

$$X_i(0) = [b_{1,i}, b_{2,i}, b_{3,i}, b_{4,i}]^T; \quad X_i(l_i) = [d_{1,i}, d_{2,i}, d_{3,i}, d_{4,i}]^T. \quad (7)$$

Тогда форма силы, приходящейся на левый амортизатор, запишется в виде

$$N_{1i} = \gamma d_{4,i-1}, \quad (8)$$

а форма поперечной силы на входе в i -ый участок в соответствии с (4) будет

$$b_{4,i} = (1 + \gamma) d_{4,i-1}, \quad (9)$$

где γ — пока неопределенный коэффициент.

Введем матрицы c_i и g_i , четвертого и второго порядка, соответственно, с элементами

$$c_{mn} = a_{mn} d_{n,i-1}, \quad (m, n = 1, 2, 3, 4)$$

$$g_{11} = s_{11} d_{1,i-1}; \quad g_{12} = s_{12} d_{4,i-1}; \quad g_{21} = s_{21} d_{1,i-1}; \quad g_{22} = s_{22} d_{4,i-1},$$

где a_{mn} — элементы матрицы перехода через однородный участок.

Тогда, в соответствии с (6),

$$\begin{aligned} d_{1,i} &= X_i(l_i) = g_{11} + \gamma g_{12}, \\ N_{2i} &= g_{21} + \gamma g_{22}, \end{aligned} \quad (10)$$

а после перехода через i -ый участок

$$\begin{aligned} d_{1,i} &= c_{11} + c_{12} + c_{13} + (1 + \gamma)c_{14}, \\ d_{2,i} &= c_{21} + c_{22} + c_{23} + (1 + \gamma)c_{24}, \\ d_{3,i} &= c_{31} + c_{32} + c_{33} + (1 + \gamma)c_{34}, \\ d_{4,i} &= c_{41} + c_{42} + c_{43} + (1 + \gamma)c_{44}. \end{aligned} \quad (11)$$

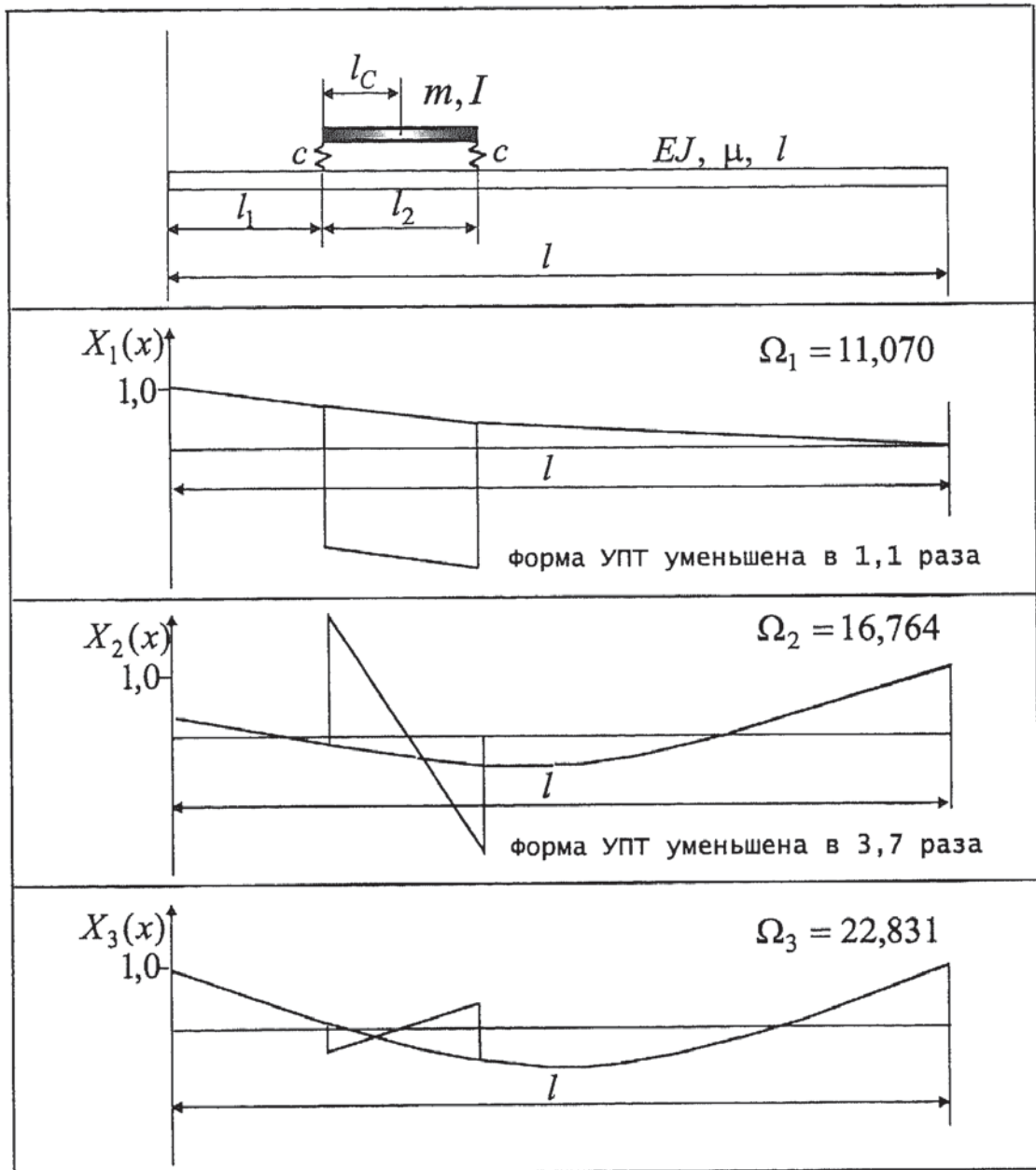


Рис. 3. Результаты расчета

Сопоставив первые уравнения (10) и (11), определим коэффициент γ

$$\gamma = \frac{c_{11} + c_{12} + c_{13} + c_{14} - g_{11}}{g_{12} - c_{14}}. \quad (12)$$

Зная γ , по (8), (9) определим форму силы в левом амортизаторе и форму поперечной силы на входе в i -ый участок. Вектор формы на выходе из i -го участка определим по (11). По (10) определим форму силы в правом амортизаторе. По (1) и (3) определим формы перемещений левого и правого концов УПТ. В соответствии с (4) форма поперечной силы на входе в $i+1$ -ый участок будет иметь вид

$$b_{4,i+1} = d_{4,i} + g_{21} + \gamma g_{22}.$$

Предложенный алгоритм позволяет включать рассматриваемый случай в стандартную процедуру* метода начальных параметров. При подготовке расчета необходимо только задать в исходных данных дополнительно сосредоточенную массу m_i , момент инерции I_i , смещение центра масс l_{C_i} и жесткость амортизаторов c_i .

В качестве примера рассмотрим однородный стержень длины l (рис. 3), к которому упруго прикреплено твердое тело длины $0,2l$. Погонная масса стержня и изгибная жесткость равны μ и EJ соответственно. Твердое тело считается однородным (центр масс находится в средней точке $l_c = 0,1l$), его масса, момент инерции относительно центра масс и жесткость амортизаторов равны

$$m = 0,2\mu l, \quad I = 6,67 \cdot 10^{-4} \cdot \mu l^3, \quad c = 9,6EJ/l^3.$$

Свяжем размерные частоты ω с безразмерными Ω соотношением

$$\omega = \Omega \sqrt{EJ/\mu}.$$

Тогда безразмерные парциальные частоты УПТ будут равны

$$\Omega_{1\text{парц}} = 9,8 \text{ и } \Omega_{2\text{парц}} = 16,97,$$

причем первая из них соответствует поступательному движению УПТ вместе с центром масс, а вторая — вращению УПТ относительно центра масс.

На рис. 3 представлены результаты расчета собственных форм и частот колебаний для первых трех тонов. Первый из них связан с поступательным движением УПТ, второй — с вращением УПТ относительно центра масс, третий соответствует первому тону изгибных колебаний однородного стержня. Видим, что возможность для УПТ совершать колебания относительно центра масс приводит к «лишнему» второму тону колебаний, что необходимо учитывать при исследовании вынужденных колебаний.

*Колесников К. С. Динамика ракет: Учебник для вузов. 2-е изд. — М.: Машиностроение, 2003. — 520 с.