№ 7 *2006*

539.3

ОБ АДЕКВАТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ В ВИДЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ И ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Канд. физ.- мат. наук, ст. препод. Н.В. МИНАЕВА

Получен критерий непрерывности зависимости решения дифференциального уравнения от исходных данных. На основе этого критерия найдена граница адекватности математической модели, описывающей изгиб стержня на упругом основании.

Continuity criterion of primitive integral where solution depends on input data is received. On the basis of this criterion the boundary of adequacy of the mathematical model describing curving of a rod on the elastic foundation is discovered.

I. Рассмотрим систему алгебраических уравнений

$$G_i(\xi_1,\dots,\xi;\lambda_1,\dots,\lambda_m)=0 \tag{1}$$

$$(i=1,2,\dots,n).$$

Пусть при $\lambda_j=\lambda_{j0}$ величины ξ_{j0} являются решением системы уравнений (1). Известно, например [1], что условиями существования функции $\xi_i=\xi_i(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ непрерывных, один раз дифференцируемых в некоторой окрестности точки $\lambda=\lambda_0$ и обладающих свойством $\xi_i(\lambda_0)=\xi_{i0}$, являются следующие условия.

Функции G_i определены и непрерывны, вместе со своими производными $\frac{\partial G_i}{\partial \xi_j},\frac{\partial G_i}{\partial \lambda_k}$, в некоторой окрестности точки $(\xi_0\lambda_0)$,

$$\Delta=\left.\begin{vmatrix}\frac{\partial G_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial G_n}{\partial \xi_n}\\ \frac{\partial G_n}{\partial \xi_1} & \frac{\partial G_n}{\partial \xi_n}\end{vmatrix}\right|_{\substack{\xi=\xi_0\\ \lambda=\lambda_0}}\neq 0\cdot \tag{2}$$

Составим следующую систему уравнений

$$G_i(\xi_{10}+\zeta_1,\dots,\xi_{n0}+\zeta_n;\lambda_{10}+\gamma_1,\dots,\lambda_{m0}+\gamma_m)=0, \tag{3}$$

$$(i=1,2,\dots,n).$$

Линеаризованная по ζ_i,γ_j система уравнений, соответствующая системе (3), будет такой

$$\left(\frac{\partial G_i}{\partial \xi_1}\zeta_1+\dots+\frac{\partial G_i}{\partial \xi_n}\zeta_n\right)_{\substack{\xi=\xi_0\\ \lambda=\lambda_0}}=-\left(\frac{\partial G_i}{\partial \lambda_1}\gamma_1+\dots+\frac{\partial G_i}{\partial \lambda_m}\gamma_m\right)_{\substack{\xi=\xi_0\\ \lambda=\lambda_0}} \tag{4}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Условием того, что система уравнений (4) в некоторой окрестности точки $\gamma = 0$ имеет ограниченное решение, является неравенство нулю ее определителя и ограниченность производных $\frac{\partial G_i}{\partial \xi_j}, \frac{\partial G_i}{\partial \lambda_k}$, т.е. условия (2).

Следовательно, условия теоремы о неявных функциях (2) можно заменить требованием существования в некоторой окрестности точки $\gamma = 0$ ограниченного решения линеаризованной по ζ_i, γ_j системы уравнений соответствующей системе (3). Итак, условия теоремы о неявных функциях (2) можно заменить более громоздким условием, предусматривающим построение вспомогательной системы уравнений (3) с последующей ее линеаризацией. Однако это условие оказывается весьма продуктивным.

Отметим, что условие существования ограниченного решения системы уравнений (4) можно заменить требованием существования только тривиального решения у соответствующей однородной системы уравнений с добавлением ограниченности производных $\frac{\partial G_i}{\partial \lambda_k}$ при $\lambda = \lambda_0, \xi = \xi_0$.

Пусть поведение исследуемого объекта описываются решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\Phi\,(f(x), x, u, u', \ldots, u^{(n)}) = 0 \qquad (5)$$

$$x \in [a, b]$$

с граничными (начальными) условиями вида

$$F_i\left(f(a), f(b), a, b, p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n\right) = 0 \qquad (6)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $p_j = u^{(j-1)}(a); q_j = u^{(j-1)}(b) \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$. (7)

Функция $f(x)$ характеризует рассматриваемый объект или внешнее воздействие на него.

Пусть при $f(x) = f_0(x)$ задача (5), (6) допускает решение

$$u = u_0(x). \qquad (8)$$

Решение (8) имеет физический смысл, если у функции (8) есть окрестность такая, что решение задачи (5), (6) непрерывно зависит от $f(x)$ при $f(x) = f_0(x)$.

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение

$$\Phi\,(f_0(x) + \lambda(x), x, u_0 + \zeta, u_0' + \zeta', \ldots, u_0^{(n)} + \zeta^{(n)}) = 0 \qquad (9)$$

с граничными (начальными) условиями

$$F_i(f_0(a)+\lambda(a), f(b)+\lambda(b), a, b, p_{10}+r_1,\ldots, p_{n0}+r_n; q_{10}+$$
$$+s_1,\ldots, q_{n0}+s_n)=0$$

где
$$p_{j0}=u^{(j-1)}(a); q_{10}=u^{(j-1)}(b)$$
$$r_j=\zeta^{(j-1)}(a); s_j=\zeta^{(j-1)}(b) \tag{10}$$

Линеаризованная по ζ_i, γ_j задача соответствующая задаче (9), (10), будет такой

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial u}\zeta+\frac{\partial\Phi}{\partial u'}\zeta'+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial u^{(n)}}\zeta^{(n)}\right]_{\substack{u=u_0\\ f=f_0}}=-\left.\frac{\partial\Phi}{\partial f}\right|_{\substack{u=u_0\\ f=f_0}}\gamma, \tag{11}$$

$$\left[\frac{\partial F_i}{\partial p_i}r_i+\frac{\partial F_i}{\partial p_n}r_n+\frac{\partial F_i}{\partial q_1}s_1\ldots+\frac{\partial F_i}{\partial q_n}s_n\right]_{\substack{p=p_0\\ q=q_0\\ s=s_0}}=-\left.\frac{\partial F_i}{\partial f(a)}\right|_{\substack{p=p_0\\ q=q_0\\ s=s_0}},$$
$$\lambda(a)-\left.\frac{\partial F_i}{\partial f(b)}\right|_{\substack{p=p_0\\ q=q_0\\ s=s_0}}\lambda(b). \tag{12}$$

Следуя [2], [3] и изложенному выше, сформулируем следующую теорему, соответствующую теореме о неявных функциях [4] для частичного случая, когда операторное уравнение — дифференциальное уравнение.

Теорема. Пусть функция Φ и F_i в задаче (5), (6) обладают следующими свойствами.

1. Непрерывны при $f=f_0$; $u=u_0$; $f(a)=f_0(a)$; $f(b)=f_0(b)$; $p_0=u_0^{(j-1)}(a)$; $q_j=u_0^{(j-1)}(b)$ $(j=1,2,\ldots,n)$.

2. $u_0(x)$ — решение задачи (5), (6) при $f(x)=f_0(x)$, т.е.

$$\Phi(f_0, x, u_0, u_0',\ldots, u_0{}^{(n)})=0,$$

$$F_i(f_0(a)+\lambda(a), f(b)+\lambda(b), a, b, u_0(a), u_0'(a)\ldots u^{(n-1)}(a),$$
$$u_0(b),\ldots, u_0^{(n-1)}(b))=0$$
$$(i=1,2,\ldots,n).$$

3. Частично производные $\frac{\partial\Phi}{\partial u^{(i)}}$; $\frac{\partial F_i}{\partial p_j}$; $\frac{\partial F_i}{\partial q_j}$; $\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}$; $\frac{\partial F_i}{\partial f(a)}$; $\frac{\partial F_i}{\partial f(b)}$; непрерывны при $f=f_0$; $u=u_0$; $f(a)=f_0(a)$; $f(b)=f_0(b)$; $p_0=u_0^{(j-1)}(a)$; $q_j=u_0^{(j-1)}(b)$ $(j=1,2,\ldots,n)$ и функция $\left.\frac{\partial\Phi}{\partial u^{(n)}}\right|_{\substack{f=f_0\\ u=u_0}}$ отлична от нуля при $x\in[a,b]$.

4. Тривиальное решение однородной задачи, соответствующей задаче (11), (12), единственно.

Тогда существует $\varepsilon > 0$, $b > 0$ и $\varphi(f, x)$ такие, что

$$\Phi(f_0, x, \varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n)}) = 0$$

при $\|f - f_0\| < \delta$, $\|\varphi - \varphi_0\| < \varepsilon$,

где, например $\|f - f_0\| = \max \|f(x) - f_0(x)\|$, $x \in [a, b]$ т.е. решение уравнения (5)

$$u = \varphi(f, x)$$

непрерывно зависит от f при $f(x) = f_0(x)$.

2. В качестве примера рассмотрим продольно-поперечный изгиб шарнирно закрепленного по концам стержня длины l, находящегося на упругом основании. Стержень находится под воздействием моментов M_i и продольных сил p, приложенных на его концах.

В безразмерных переменных ось стержня будет описываться решением следующей задачи

$$u^{(IV)}(x) - f^{(IV)}(x) + \alpha u''(x) + cu(x) - cf(x) = 0 \tag{13}$$

$u(0) = u(1) = 0$; $u''(0) - f''(0) = m_1$; $u''(1) - f''(1) = m_2$, где $\alpha = \dfrac{pl^2}{EI}$;

$c = \dfrac{\tilde{c}\, l^4}{EI}$; $m_i = \dfrac{M_i}{EI}$; $\tilde{c}$ — коэффициент жесткости основания; $f(x)$ — функция, описывающая ось стержня в свободном состоянии.

Пусть при $f(x) = f_0(x)$ и $c(x) = c_0$ задача (13) допускает решение

$$u = u_0(x). \tag{14}$$

Функцию (14) можно брать в качестве приближенного решения задачи (13) при $f(x)$ и $c(x)$ достаточно мало отличающихся от $f_0(x)$ и c_0, если решение задачи (13) непрерывно зависит от $f(x)$ и $c(x)$ при $f(x) = f_0(x)$, $c(x) = c_0$.

Для проведения анализа этой непрерывности, как следует из изложенной выше теоремы, надо построить вспомогательную однородную задачу относительно функций $\zeta(x)$, которая в данном случае будет такой

$$u^{(IV)} + \zeta^{(IV)} - f_0 + \alpha u_0'' + \alpha \zeta'' + c_0 u_0 + c_0 f_0 = 0$$

$$u_0(0) - \zeta(0) = u_0(1) + \zeta(x) = 0 \tag{15}$$

$$u_0''(0) + \zeta''(0) - f(0) = m_1$$

$$u_0''(1) + \zeta''(1) - f(1) = m_2.$$

Поскольку функция $u_0(x)$ является решением задачи (13) при $f = f_0$ $c = c_0$, то из (15) получаем следующую задачу

$$\zeta^{IV}(x) + \alpha\zeta''(x) + c_0\zeta = 0 \tag{16}$$

$$\zeta(0) = \zeta(1) = \zeta''(0) = \zeta''(1) = 0 .$$

Следовательно, исследование непрерывности зависимости решения задачи (13) от исходных данных свелось к исследованию существования только тривиального решения задачи (16).

Характеристическое уравнения для (16) имеет вид

$$\mu^4 + \alpha\mu^2 + c_0 = 0 . \tag{17}$$

Общее решение уравнения (16) запишется в виде

$$\zeta = c_1 \sin\varphi_1 x + c_2 \cos\varphi_1 x + c_3 \sin\varphi_2 x + c_4 \cos\varphi_2 x , \tag{18}$$

где $\varphi_1 = \sqrt{\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - c_0}}$; $\varphi_2 = \sqrt{\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - c_0}}$. (19)

Подставив (18) в граничные условия (16), получим однородную систему уравнений относительно произвольных постоянных c_i. Она имеет нетривиальное решение при условии, что

$$\begin{vmatrix} \sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 \\ \varphi_1^2 \sin\varphi_1 & m_2^2 \sin\varphi_2 \end{vmatrix} = 0 . \tag{20}$$

Поскольку $\varphi_1 \neq \varphi_2$, то из (20) получаем, что

$$\varphi_1 = n\pi \text{ или } \varphi_2 = n\pi . \tag{21}$$

Подставив любые из (21) в (19), получаем следующее условие существования нетривиального решения задачи (16)

$$\frac{c_0}{\pi^4} = \frac{n^2\alpha}{\pi^2} - n^4, \tag{22}$$

определяющее верхнюю границу области адекватности решения (14) рассматриваемой задачи (13), описывающий продольно-поперечный изгиб стержня на упругом основании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. — М.: Изд-во техн.-теор. лит., 1956. — Т.1, 2. — 464 с.
2. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1968. — 526 с.
3. Бибиков Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Высшая школа, 1991. — 302 с.
4. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 542 с.