622.233.6

ВОЗНИКНОВЕНИЕ НЕНАГРУЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ОДНОРОДНОМ СТЕРЖНЕ ПРИ СОУДАРЕНИИ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ С ЖЕСТКОЙ ПРЕГРАДОЙ

Асп. А. А. БИТЮРИН, д-р техн. наук. В. К. МАНЖОСОВ

Рассмотрена волновая модель продольного удара стержневой системы о жесткую преграду. Установлены параметры стержневой системы, обеспечивающие возникновение ненагруженного состояния одного из ее участков.

The wave model of longitudinal impact by framework exposure to rigid obstruction is examined. The parameters of framework ensuring the origin of no-load condition inside one of its bloiks are set.

Эффективное применение ударных машин при обработке материалов и изделий в различных отраслях современной промышленности, снижение числа выхода из строя оборудования во время технологического процесса, сокращение численности брака обрабатываемых изделий требует учета многих факторов, выявление которых является широким направлением научно-исследовательской работы. Обрабатываемые материалы и изделия могут иметь различную твердость и крепость. Основными рабочими элементами любого ударного механизма являются ударная масса и рабочий инструмент, представляющие из себя в большинстве случаев системы однородных и неоднородных стержней определенной массы и размеров. Особый интерес представляет нанесение удара рабочим инструментом по абсолютно жесткой преграде, поскольку данная ситуация является аварийной. Следовательно, именно здесь в наибольшей степени встает вопрос правильного подбора рабочих элементов ударной машины с целью повышения ее надежности и предотвращения поломок.

Рассматривается модель продольного удара о жесткую преграду стержневой системы, состоящей из двухступенчатого и однородного стержней, (рис. 1). В сечении взаимодействия однородного стержня с жесткой преградой $x=l$ и в контактном сечении $x=l_1+l_2$ стержневой системы связи неудерживающие. Длина начального участка *1* двухступенчатого стержня равна l_1, конечного участка *2* стержня равна l_2, масса обоих участков — m_1. Длина однородного стержня (участок *3*) l_3, масса — m_2. Оба стержня движутся со скоростью V_0 в сторону жесткой преграды. Общая длина стержневой системы равна l. Используется волновая модель продольного удара [1—4]. Все стержни состоят из одного материала.

Движение поперечных сечений соударяемых стержней описывается волновыми уравнениями вида

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2}=0,\ \ 0\le x\le l_1, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2}=0,\ \ l_1\le x\le l_1+l_2, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial t^2}=0,\ \ l_1+l_2\le x\le l, \tag{3}$$

где $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$, $u_3(x,t)$ — продольные перемещения поперечных сечений соответственно участков *1*, *2* и *3*, x — координата сечения, t — время, a — скорость распространения продольной волны деформации.

Начальные условия определяют состояние стержней перед их соударением: при $t = t_0 = 0$

$$\frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial t} = V_0, \frac{\partial u_1(x,t_0)}{\partial x} = 0, \frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial t} = V_0, \frac{\partial u_2(x,t_0)}{\partial x} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u_3(x,t_0)}{\partial t} = V_0, \frac{\partial u_3(x,t_0)}{\partial x} = 0.$$

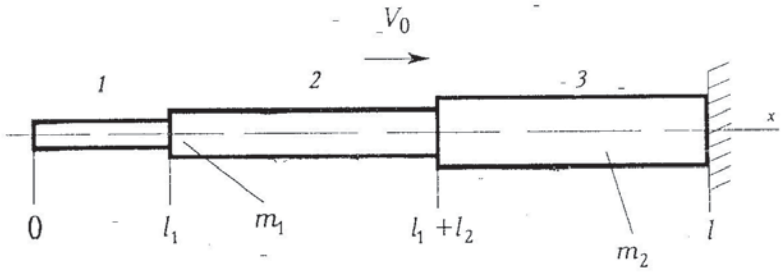

Рис. 1. Схема удара неоднородных стержней при неудерживающих связях

Краевые условия определяют отсутствие силы в сечении $x = 0$ и равенство нулю скорости сечения $x = l$ при взаимодействии участка 3 неоднородного стержня с жесткой преградой:

$$\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} = 0, \frac{\partial u_3(l,t)}{\partial t} = 0, \tag{5}$$

а также определяют равенство сил и условия сопряжения в ударных сечениях $x = l_1 + l_2$ конечного участка *2* неоднородного двухступенчатого стержня и однородного стержня (участок *3*) при непосредственном их взаимодействии

$$EA_2 \frac{\partial u_2(l_1+l_2,t)}{\partial x} = EA_3 \frac{\partial u_3(l_1+l_2,t)}{\partial x}, \text{ если } \frac{\partial u_2(l_1+l_2,t)}{\partial x} < 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial u_2(l_1+l_2,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_3(l_1+l_2,t)}{\partial t}, \text{ если } \frac{\partial u_2(l_1+l_2,t)}{\partial x} < 0, \tag{7}$$

либо отсутствие сил в ударных сечениях стержней, если их взаимодействие отсутствует:

$$\frac{\partial u_2(l_1+l_2,t)}{\partial x} = 0, \frac{\partial u_3(l_1+l_2,t)}{\partial x} = 0, \text{ если } u_1(l_1+l_2,t) > u_2(l_1+l_2,t), \tag{8}$$

где E — модуль упругости первого рода, A_2 — площадь поперечного сечения участка *2* неоднородного стержня, A_3 — площадь поперечного сечения однородного стержня.

В переходном сечении $x = l_1$ начального и конечного участков ступенчатого стержня краевые условия также определяют равенство сил и равенство скоростей сопряженных сечений

$$EA_1 \frac{\partial u_1(l_1,t)}{\partial x} = EA_2 \frac{\partial u_2(l_1,t)}{\partial x}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial u_1(l_1,t)}{\partial t}=\frac{\partial u_2(l_1,t)}{\partial t}, \tag{10}$$

где A_1 — площадь поперечного сечения начального участка *1* ступенчатого стержня.

По методу Даламбера решение уравнений (1), (2) и (3) представляется в виде

$$u_1(x,t)=f_1(at-x)+\varphi_1(at+x),\ 0\le x\le l_1, \tag{11}$$

$$u_2(x,t)=f_2(at-x)+\varphi_2(at+x),\ l_1\le x\le l_1+l_2, \tag{12}$$

$$u_3(x,t)=f_3(at-x)+\varphi_3(at+x),\ l_1+l_2\le x\le l, \tag{13}$$

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}= -f_1'(at-x)+\varphi_1'(at+x),\ \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t}= a[f_1'(at-x)+\varphi_1'(at+x)], \tag{14}$$

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}= -f_2'(at-x)+\varphi_2'(at+x),\ \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t}= a[f_2'(at-x)+\varphi_2'(at+x)], \tag{15}$$

$$\frac{\partial u_3(x,t)}{\partial x}= -f_3'(at-x)+\varphi_3'(at+x),\ \frac{\partial u_3(x,t)}{\partial t}= a[f_3'(at-x)+\varphi_3'(at+x)], \tag{16}$$

где $f_1(at-x)$, $f_2(at-x)$, $f_3(at-x)$ — функции, описывающие прямые волны, распространяющиеся соответственно по участкам *1*, *2* и *3* в направлении оси *x*; $\varphi_1(at+x)$, $\varphi_2(at+x)$, $\varphi_3(at+x)$ — функции, описывающие обратные волны, распространяющиеся по участкам *1*, *2* и *3* в противоположном направлении; $f_1'(at-x)$, $f_2'(at-x)$, $f_3'(at-x)$, $\varphi_1'(at+x)$, $\varphi_2'(at+x)$, $\varphi_3'(at+x)$ − производные функций.

Перейдем к относительным величинам, характеризующим прямые и обратные волны: $\overline{f}'(at-x)=f'(at-x)/\frac{V_0}{a}$; $\overline{\varphi}'(at+x)=\varphi'(at+x)/\frac{V_0}{a}$. Относительная продольная деформация в сечении и скорость этого сечения соответственно: $\overline{\varepsilon}(x,t)=-\overline{f}'(at-x)+\overline{\varphi}'(at+x)$, $\overline{v}(x,t)=\frac{v(x,t)}{V_0}=\overline{f}'(at-x)+\overline{\varphi}'(at+x)$. Рассмотрим удар о жесткую преграду однородного и ступенчатого стержней с длинами участков: $l_1=0,2l$, $l_2=0,4l$, $l_3=0,4l$. Соотношение площадей поперечных сечений каждого предыдущего участка к последующему: $\lambda=\frac{A_1}{A_2}=\frac{A_2}{A_3}=0,33$. Применим метод характеристик для построения поля состояний (рис. 2).

Области состояний $\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_{14}$, $\mathbf{II}_0-\mathbf{II}_{20}$, $\mathbf{III}_0-\mathbf{III}_{19}$ с соответствующими значениями $\overline{f}'(at-x)$, $\overline{\varphi}'(at+x)$, $\overline{\varepsilon}(x,t)$, $\overline{v}(x,t)$ определяют параметры прямых и обратных волн деформаций, продольную деформацию и скорость поперечных сечений. Длительность состояния для произвольного сечения определяется разностью ординат *t*, которые имеют точки наклонных линий для этого сечения.

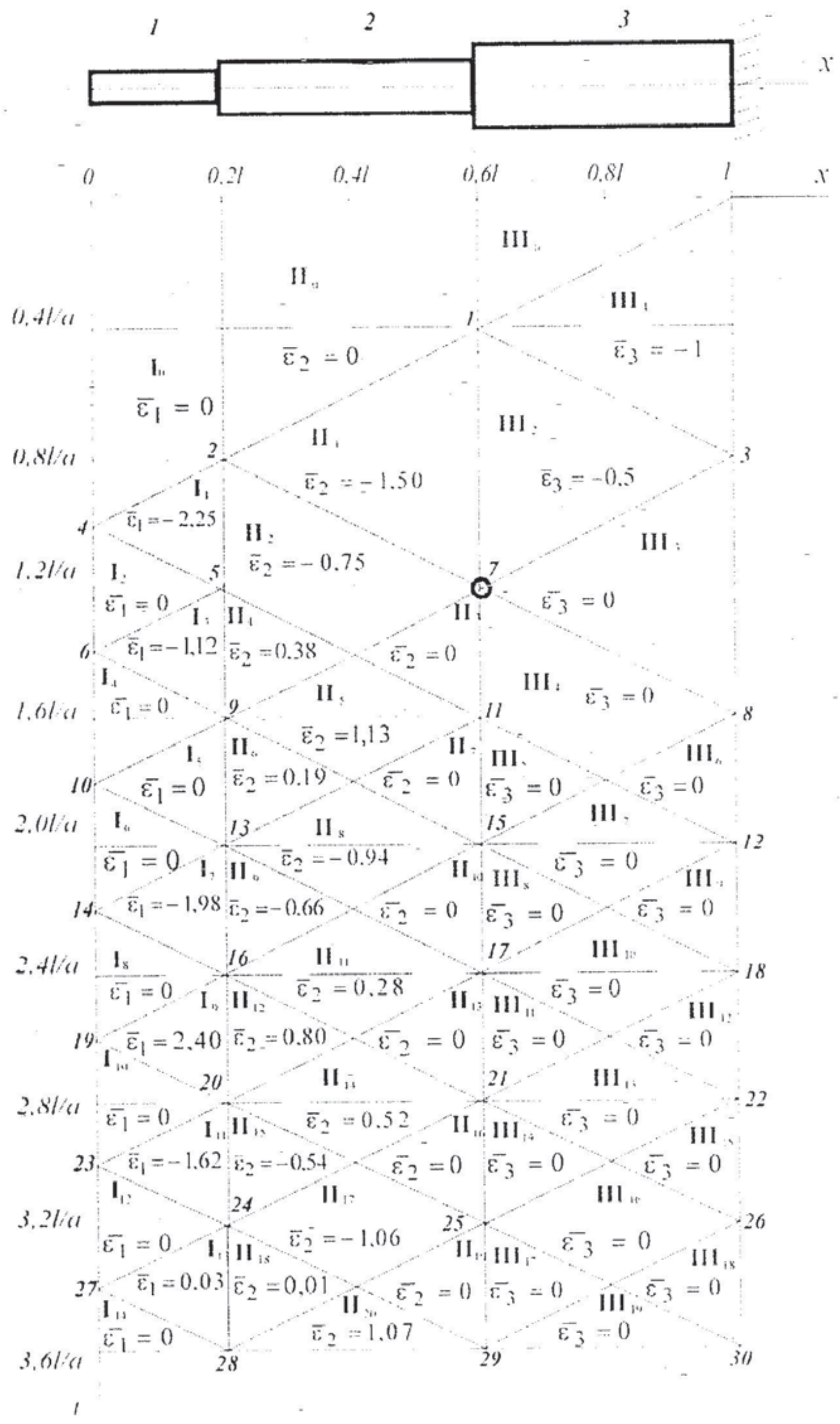

Рис. 2. Поле состояний при ударе однородного и ступенчатого стержней о жесткую преграду при неудерживающих связях

В момент времени $t=0,4l/a$ к сечению $x=l_1+l_2$ справа подходит обратная волна $\overline{\varphi}_3'(at+x)=-0,5$ (линия $l-1$, рис. 2), слева падает начальная прямая волна $\overline{f}_0'(at-x)=0,5$. Эти волны формируют в сечении новые прямую волну $\overline{f}_3'(at-0,6l)=0$ (линия l—3, рис. 2) и обратную волну $\overline{\varphi}'(at+0,6l)=-1$ (линия 1—2, рис. 2).

В области первого состояния третьего участка $\mathbf{III}_1$ его поперечные сечения охвачены начальной прямой волной $\overline{f}_0'(at-x)=0,5$ и отраженной от сечения $x = l$ обратной волной $\overline{\varphi}_3'(at+x)=-0,5$ (линия *1 – 1*, рис. 2). Относительная продольная деформация в данной области $\overline{\varepsilon}_3(x,t)=-1$, относительная скорость $\overline{v}_3(x,t)=0$.

В области второго состояния третьего участка $\mathbf{III}_2$ его поперечные сечения охвачены новой прямой волной $\overline{f}_3'(at-x)=0$ (линия *1—3*, рис. 2) и обратной волной $\overline{\varphi}_3'(at+x)=-0,5$ (линия *1 – 1*, рис. 2). Относительная продольная деформация в этой области $\overline{\varepsilon}_3(x,t)=-0,5$, относительная скорость $\overline{v}_3(x,t)=-0,5$.

В момент времени $t=0,8l/a$ прямая волна $\overline{f}_3'(at-x)=0$ достигнет сечения $x=l$ и отразится в виде обратной волны $\overline{\varphi}_3'(at+l)=0$ (линия *3 – 7*, рис. 2). При $t=1,2l/a$ данная обратная волна подойдет к сечению $x=l_1+l_2$, связь в котором неудерживающая. В этот же момент времени к сечению $x=l_1+l_2$ слева подойдет прямая волна $\overline{f}_2'(at-x)=-0,25$ (линия *2 – 7*, рис. 2), имеющая отрицательный знак. Вследствие неудерживающей связи, скорость сечения $x=l_1+l_2$ на участке 3 в момент времени $t=1,2l/a$ будет равна нулю, а на участке 2 в этот же момент времени будет равна: $\overline{v}_2(0,6l,t)= -0,5$.

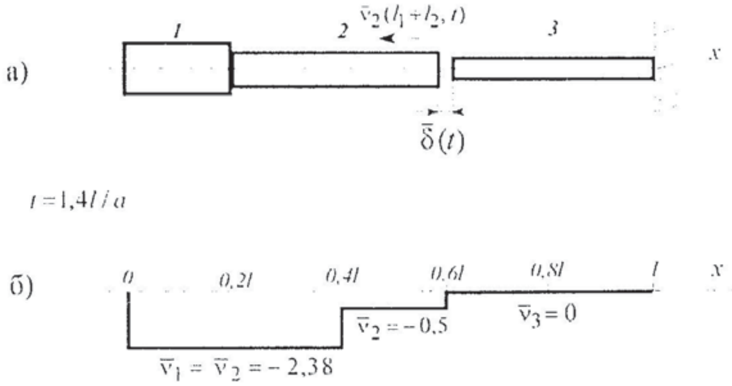

Рис. 3

Следовательно, на основании граничного условия (8) сечения $x=l_1+l_2$ второго и третьего участков окажутся свободными, и произойдет отрыв ступенчатого и однородного стержней (рис. 3, *а*). На рис. 2 отрыв показан жирным кружком. Однородный стержень (участок *3*) будет охвачен нулевыми прямой и обратной волнами, которые распространяясь по его длине и отражаясь от сечений $x=l_1+l_2$ и $x=l$, не изменят своих величин. По этой причине скорости v и деформации ε во всех сечениях однородного стержня будут также равны нулю, и стержень будет находиться в ненагруженном состоянии.

При отрыве ступенчатого стержня от однородного, вследствие распространения и преобразования прямых и обратных волн на участках *1* и *2*, скорость сечения $x=l_1+l_2$ на втором участке будет отрицательной. Таким образом, повторные соударения стержней в сечении $x=l_1+l_2$ и возникновение новых состояний на однородном участке *3* не произойдут. Относительное расстояние $\overline{\delta}(t)$ (рис. 3, *а*) между однородным и ступенчатым стержнями с течением времени будет увеличиваться. Соответствующие величины функций $\overline{f}'$, $\overline{\varphi}'$, $\overline{\varepsilon}$, $\overline{v}$ для каждой области состояний представлены в таблице. На рис.

3, *б* представлена диаграмма относительной скорости $\overline{v}$ поперечных сечений стержней в момент времени $t = 1,4l/a$.

Таблица

Величины функций прямых и обратных волн, деформаций и скоростей

Области состояния	$\overline{f}'$	$\overline{\varphi}'$	$\overline{\varepsilon}$	$\overline{v}$	Области состояния	$\overline{f}'$	$\overline{\varphi}'$	$\overline{\varepsilon}$	$\overline{v}$
ПЕРВЫЙ УЧАСТОК									
I_0	0,50	0,50	0,00	1,00	I_1	0,50	–1,75	–2,25	–1,25
I_2	–1,75	–1,75	0,00	–3,50	I_3	–1,75	–0,63	1,12	–2,38
I_4	–0,63	–0,63	0,00	–1,26	I_5	–0,63	–0,63	0,00	–1,26
I_6	–0,06	–0,06	0,00	–0,12	I_7	–0,06	–2,04	–1,98	–2,10
I_8	–2,04	–2,04	0,00	–4,08	I_9	–2,04	0,36	2,40	–1,68
I_{10}	0,36	0,36	0,00	0,72	I_{11}	0,36	–1,26	–1,62	–0,90
I_{12}	–1,26	–1,26	0,00	–2,52	I_{13}	–1,26	–1,23	0,03	–2,51
I_{14}	–1,23	–1,23	0,00	–2,46					
ВТОРОЙ УЧАСТОК									
II_0	0,50	0,50	0,00	1,00	II_1	0,50	–1,00	–1,50	–0,50
II_2	–0,25	–1,00	–0,75	–1,25	II_3	–0,25	–0,25	0,00	–0,50
II_4	–1,38	–1,00	0,38	–2,38	II_5	–1,38	–0,25	1,13	–1,63
II_6	–0,44	–0,25	0,19	–0,69	II_7	–1,38	–1,38	0,00	–2,76
II_8	–0,44	–1,38	–0,94	–1,82	II_9	–0,72	–1,38	–0,66	–2,10
II_{10}	–0,44	–0,44	0,00	–0,88	II_{11}	–0,72	–0,44	0,28	–1,16
II_{12}	–1,24	–0,44	0,80	–1,68	II_{13}	–0,72	–0,72	0,00	–1,44
II_{14}	–1,24	–0,72	0,52	–1,96	II_{15}	–0,18	–0,72	–0,54	–0,90
II_{16}	–1,24	–1,24	0,00	–2,48	II_{17}	–0,18	–1,24	–1,06	–1,42
II_{18}	–1,25	–1,24	0,01	–2,49	II_{19}	–0,18	–0,18	0,00	–0,36
II_{20}	–1,25	–0,18	1,07	–1,43					
ТРЕТИЙ УЧАСТОК									
III_0	0,50	0,50	0,00	1,00	III_1	0,50	–0,50	–1,00	0,00
III_2	0,00	–0,50	–0,50	–0,50	III_3	0,00	0,00	0,00	0,00
III_4	0,00	0,00	0,00	0,00	III_5	0,00	0,00	0,00	0,00
III_6	0,00	0,00	0,00	0,00	III_7	0,00	0,00	0,00	0,00
III_8	0,00	0,00	0,00	0,00	III_9	0,00	0,00	0,00	0,00
III_{10}	0,00	0,00	0,00	0,00	III_{11}	0,00	0,00	0,00	0,00
III_{12}	0,00	0,00	0,00	0,00	III_{13}	0,00	0,00	0,00	0,00
III_{14}	0,00	0,00	0,00	0,00	III_{15}	0,00	0,00	0,00	0,00
III_{16}	0,00	0,00	0,00	0,00	III_{17}	0,00	0,00	0,00	0,00
III_{18}	0,00	0,00	0,00	0,00	III_{19}	0,00	0,00	0,00	0,00

Следует отметить, что ненагруженное состояние однородного стержня имеет место только при данных значениях l_1, l_2 и λ. При других параметрах l_1, l_2 и λ скорости и деформации в сечениях однородного стержня будут отличны от нуля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Удар. Распространение волн деформаций в ударных системах / О. Д. Алимов, В. К. Манжосов, В. Э. Еремьянц. — М.: Наука, 1985. — 354 с.
2. Модель продольного удара однородного и неоднородного стержней о жесткую преграду при неудерживающих связях / А. А. Битюрин, В. К. Манжосов // Вестник УлГТУ. — 2006. — № 1. — С. 20—23.
3. Малков О. Б. Динамика стержневых систем с внутренними граничными поверхностями. — Омск, 2000. — 112 с.
4. Манжосов В. К. Модели продольного удара. — Ульяновск, 2006. — 159 с.