УДК 517.947.44

Применение метода моментов для корреляционного анализа динамики конечноэлементных моделей конструкций*

О.Н. Тушев, А.М. Донских

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.

Application of the method of moments for the correlation analysis of the dynamics of finite element models of structures

O.N. Tushev, A.M. Donskikh

Bauman Moscow State Technical University, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation.

e-mail: donskihalexey@mail.ru

Вычисление вероятностных характеристик конструкций на основе модели высокой размерности для нестационарных режимов функционирования в настоящее время является актуальной задачей. Разработанная методика позволяет с инженерной точностью рассчитать эти характеристики. В работе внешнее случайное воздействие считается квазистационарным. Решена задача определения моментных характеристик фазовых координат линейной модели конструкции при квазистационарных аддитивных воздействиях. Для снижения порядка разрешающей системы уравнений использовано усеченное разложение решения по ортогональному базису собственных векторов. Матрица диссипации принимается пропорциональной матрицам масс и жесткости. Система уравнений 2-го порядка относительно модальных координат трансформируется к векторному уравнению в канонической нормальной форме Коши с применением уравнения формирующего фильтра, преобразующего белый шум в реальные случайные процессы. Уравнение фильтра строится с помощью преобразования, применяемого для стационарных случайных процессов, спектральная плотность которых имеет дробно-рациональную структуру. Используются известные уравнения метода моментов относительно вектора математических ожиданий и матрицы корреляционных моментов, позволяющие точно решить задачу для нестационарных и стационарных режимов функционирования конструкции в рамках корреляционной теории. Приведен пример расчета математических ожиданий и дисперсий перемещений рамы для переходного процесса методом конечных элементов с использованием ортогональных разложений по модальным координатам. Показано, что хорошая точность достигается при небольшом количестве членов ряда.

Ключевые слова: моментные характеристики, квазистационарное воздействие, метод конечных элементов, модальные координаты, уравнение формирующего фильтра, метод моментов.

The calculation of the probability characteristics of structures on the basis of a multidimensional model for non-stationary modes of operation is of great importance. The

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ №14–08–01197.

developed method makes it possible to calculate these characteristics with engineering accuracy. In this paper, an external quasi-stationary random action is considered. The moment characteristics of the phase coordinates of a linear model of the structure under quasi-stationary additive actions are determined. To reduce the order of the system of equations, the modal truncation is used. The dissipation matrix is assumed to be proportional to the mass and stiffness matrices. The system of equations of the second order in modal coordinates is reduced to the vector equation of the Cauchy canonical normal form using the shaping filter equation that converts the white noise in real random processes. The filter equation is constructed by applying the transformation that is valid for stationary random processes whose spectral density has a rational structure. The well-known equations of the method of moments in terms of the vector of expectations and the matrix of correlation moments are used, which makes it possible to accurately solve non-stationary and stationary problems within the framework of the correlation theory. The expectations and variances of the displacements of a frame in a transient process are calculated by the finite element method using the mode superposition. It is shown that even a small number of series members can provide good accuracy.

Keywords: moment characteristics, quasi-stationary effects, finite element method, modal coordinates, shaping filter, method of moments.

Динамика конструкций во многих случаях описывается системой обыкновенных линейных дифференциальных уравнений высокого порядка, что характерно при использовании метода конечного элемента. При этом стационарные стохастические нагрузки на конструкцию в ряде случаев могут с удовлетворительной точностью моделироваться квазистационарными случайными процессами. Для решения многих практических задач такая модель является предпочтительной, а часто и единственно возможной, поскольку информация для построения более точной модели нестационарного случайного воздействия отсутствует или является слишком приближенной.

Для существенного снижения размерности разрешающей системы уравнений часто используется разложение решения в усеченный ряд по модальным координатам, что обеспечивает, как правило, достаточную точность в рабочем диапазоне частот и широко описано в литературе для решения различных задач динамики конструкций, например [1–10].

Наименее известен и отражен в публикациях метод моментов для решения стохастических задач динамики. Впервые этот метод представил Д.Б. Дункан в 1953 г. [11], а наиболее полно описан в работе [12]. Метод моментов позволяет получить точные уравнения относительно вероятностных моментов (вектора математических ожиданий и матрицы корреляционных моментов) для нестационарных линейных и линеаризованных систем.

Цель работы — объединение метода модальных координат с методом моментов для получения единого аппарата, использующего достоинства обоих методов и удобного для численной реализации.

Считаем, что уравнение движения модели конструкции имеет вид

$$M\ddot{Y} + \Gamma\dot{Y} + CY = F(t), \tag{1}$$

где $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^{\text{т}}$ — вектор перемещений; M, Γ, C — симметричные, положительно определенные матрицы масс, диссипации и жесткости соответственно; $F(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))^{\text{т}}$ — вектор квазистационарных внешних воздействий; начальные условия нулевые.

Согласно известному допущению [1, 2], используемому во многих практических задачах, матрица Γ вследствие неопределенности сил диссипации в реальных конструкциях принимается пропорциональной матрицам масс или жесткости. Принимаем, что

$$\Gamma = 2\mu_1 M + 2\mu_2 C.$$

Здесь μ_1, μ_2 — скалярные коэффициенты.

Обозначим: λ_j, $X_j = (x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jn})^{\text{т}}$ — собственные числа и векторы; $Z_j = (z_1, z_2, \ldots, z_r)^{\text{т}}$ — вектор модальных координат $(r \le n)$; $W = \| X_1, X_2, \ldots, X_r \|$ — матрица $(r \times n)$ собственных векторов.

Решение представим в виде

$$Y = WZ. \tag{2}$$

Подстановка (2) в (1) с учетом условий ортонормировки собственных векторов приводит к известной развязанной системе дифференциальных уравнений относительно модальных координат:

$$\ddot{z}_j + 2\xi_j\dot{z}_j + \lambda_j z_j = g_j(t), \tag{3}$$

где

$$g_j(t) = (X_j, F(t));\ \xi_j = \mu_1 + \mu_2\lambda_j,\ j = 1,\ 2, \dots, r. \quad (4)$$

Преобразуем систему уравнений (3) к нормальной форме Коши. Введем переменные: $z_j = z_{j1}$, $\dot{z}_{j1} = z_{j2}$ и сгруппируем их в два субвектора:

$$Z_1 = (Z_{11}, Z_{21}, \dots, Z_{r1})^{\text{т}};$$

$$Z_2 = (Z_{12}, Z_{22}, \dots, Z_{r2})^{\text{т}}.$$

Обозначим: $G(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_r(t))^{\text{т}}$; $\mathbb{O}_{S_2}^{S_1}$ — матрица с нулевыми элементами (нижний индекс обозначает число строк, верхний — число столбцов; например $\mathbb{O}_r^1$ — нулевой вектор размерности r).

Из соотношения (4) следует, что

$$G(t) = W^{\text{т}} F(t). \quad (5)$$

С учетом введенных обозначений и формулы (5) система уравнений (3) преобразуется к виду

$$\dot{Z} = \tilde{B}Z + G_1(t). \quad (6)$$

Здесь

$$G_1(t) = PF(t);\ Z = \begin{vmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{vmatrix};\ \tilde{B} = \begin{vmatrix} \mathbb{O}_r^r & E \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix};\ P = \begin{vmatrix} \mathbb{O}_r^n \\ W^{\text{т}} \end{vmatrix}; \quad (7)$$

$$B_1 = \operatorname{diag}(-\lambda_i;\ i = 1, 2, \dots, r);$$

$$B_2 = \operatorname{diag}(-2\xi_i;\ i = 1, 2, \dots, r).$$

Конкретизируем вид $F(t)$:

$$F(t) = M_F(t) + \Phi(t)V^0(t), \quad (8)$$

где $M_F(t)$ — вектор математических ожиданий; $V^0(t)$ — стационарный случайный вектор с матрицей корреляционных функций $K_V(\tau)$; $\Phi(t) = \operatorname{diag}(\varphi_i(t);\ i = 1,\ 2, \dots, n)$, $\varphi_i(t)\,\forall i$ — произвольные детерминированные функции.

Уравнение для математического ожидания вектора модальных координат $M_Z(t)$ несложно получить из уравнения (6), заменив в (7) $F(t)$ на $M_F(t)$.

Для использования метода моментов в качестве предварительного этапа необходимо преобразовать уравнение (6) для Z^0 к каноническому виду, в котором внешнее воздействие является векторным белым шумом. Для такого преобразования необходимо использовать формирующий фильтр, трансформирующий белый шум в реальный случайный процесс. Такое преобразование, как известно, осуществляется достаточно просто, если последний является стационарным с дробно-рациональным спектром.

В этом случае фильтр описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, которые определяются по известной методике, широко описанной в литературе [12]. Например, для стационарного случайного процесса $V^0(t)$ с корреляционной функцией

$$K_V(\tau) = D_V \exp\left(-a|\tau|\right)$$

уравнение формирующего фильтра имеет вид

$$\dot{V} + aV = \sqrt{2D_V a} \cdot u^0(t),$$

где $u^0(t)$ — белый шум с единичной спектральной плотностью.

Таким образом, уравнение фильтра в общем случае записывается следующим образом:

$$\dot{V}^0 = AV^0 + Q\tilde{U}^0\ (t). \quad (9)$$

Здесь A, Q — матрицы коэффициентов $(n \times n)$; $\tilde{U}^0(t)$ — векторный белый шум.

Объединив уравнения (6) и (9) в одно с вектором переменных S^0 размерности $2 \times (r + n)$:

$$S^0 = \begin{vmatrix} Z^0 \\ V^0 \end{vmatrix},$$

получим уравнение в канонической форме

$$\dot{S}^0 = B(t)S^0 + LU^0(t), \quad (10)$$

где

$$B(t) = \begin{vmatrix} \tilde{B} & \text{Р}\Phi(t) \\ \mathbb{O}_n^{2r} & Q \end{vmatrix};\ L = \begin{vmatrix} \mathbb{O}_{2r}^{2r} & \mathbb{O}_{2r}^n \\ \mathbb{O}_n^{2r} & Q \end{vmatrix};\ U^0(t) = \begin{vmatrix} \mathbb{O}_{2r}^1 \\ \tilde{U}^0(t) \end{vmatrix}.$$

В соответствии с методом моментов на основе уравнения (10) формируется уравнение относительно матрицы корреляционных моментов K_S вектора S^0:

$$\dot{K}_S = B(t)K_S + K_S B^{\text{т}}(t) + H. \quad (11)$$

Здесь H — матрица интенсивностей белого шума.

Найдем матрицу корреляционных функций вектора внешних воздействий в уравнении (10):

$$M\left[LU^0(t)U^{0\text{т}}(t')L^{\text{т}}\right] = LK_U(t,\ t')L^{\text{т}}.$$

Поскольку $K_U(t, t') = E\delta(\tau)$, то

$$H = \begin{vmatrix} \mathbb{O}_{2r}^{2r} & \mathbb{O}_{2r}^n \\ \mathbb{O}_n^{2r} & QQ^{\text{т}} \end{vmatrix}.$$

Если внешнее воздействие $F(t)$ стационарное, т. е. $M_F(t) = M_F = \text{const}$, $\Phi(t) = E$, $B(t) = B = \text{const}$, то на основании (6), (7), (11) получим линейные алгебраические уравнения

$$\begin{cases} \tilde{B}M_Z + PM_F = 0; \\ BK_S + K_S B^{\text{т}} + H = 0, \end{cases}$$

из которых достаточно просто определить первые $m_j^{(z)}$ и вторые $k_{jj'}^{(z)}$ моменты элементов вектора модальных координат.

Связь между элементами векторов Y и Z выражается на основании соотношения (2) в следующем виде:

$$y_l(t) = \sum_{j=1}^{r} x_{jl} z_j(t).$$

Отсюда следуют формулы для математических ожиданий $m_l^{(y)}$ и корреляционных моментов $k_{ll'}^{(y)}$:

$$m_l^{(y)} = \sum_{j=1}^{r} x_{jl} m_j^{(z)};$$

$$k_{ll'}^{(y)} = \sum_{j,j'=1}^{r} x_{jl} x_{j'l'} k_{jj'}^{(z)}.$$

Следует отметить, что на практике по сравнению с общей постановкой задача радикально упрощается, поскольку реальные конструкции имеют обычно небольшое количество, как правило, некоррелированных внешних воздействий (на порядки меньше, чем конечных элементов). Таким образом, размерность фазового пространства вследствие использования формирующих фильтров увеличивается незначительно. Кроме этого, наличие диагональных и нулевых блочных матриц позволяет достаточно просто построить экономный вычислительный алгоритм.

В качестве примера рассмотрим систему, представляющую собой раму, состоящую из труб диметром 14 мм и толщиной стенки 2 мм, в одном из узлов которой приложено внешнее случайное стационарное воздействие (рис. 1).

Расчет системы на собственные частоты производится в конечно-элементном программном пакете ANSYS. Общее число элементов системы 1 621.

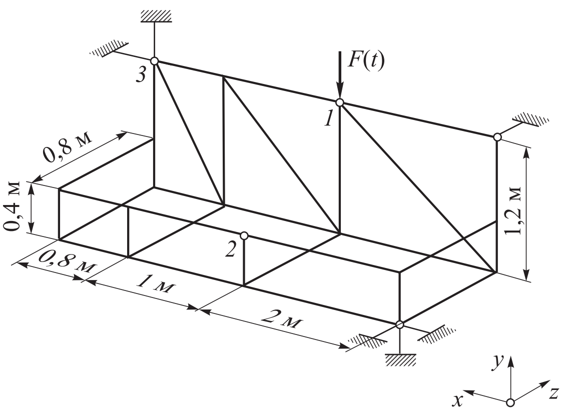

Рис. 1. Схема изучаемого объекта

За внешнее воздействие принят стационарный случайный процесс с математическим ожиданием $M_F(t) = M_F = 1000$ и корреляционной функцией $K_F(\tau) = D_F e^{-a|\tau|}$, где $a = 200$, $D_F = 20$.

Необходимое количество собственных векторов определялось пробными расчетами математических ожиданий перемещений в узлах *1* и *2* ($m_1^{(y)}$, $m_2^{(y)}$) при различных значениях r. Для узла *1* после затухания переходного процесса получены следующие результаты:

при $r = 5$, $m_1^{(y)} = 0{,}00861$ м;

при $r = 10$, $m_1^{(y)} = 0{,}00879$ м;

при $r = 15$, $m_1^{(y)} = 0{,}00880$ м.

В узле *2* результаты в отношении сходимости и точности также удовлетворительны.

Математические ожидания и дисперсии ($D_1^{(y)}$, $D_2^{(y)}$) в узлах *1*, *3* (см. рис. 1) при $r = 15$ представлены на рис. 2.

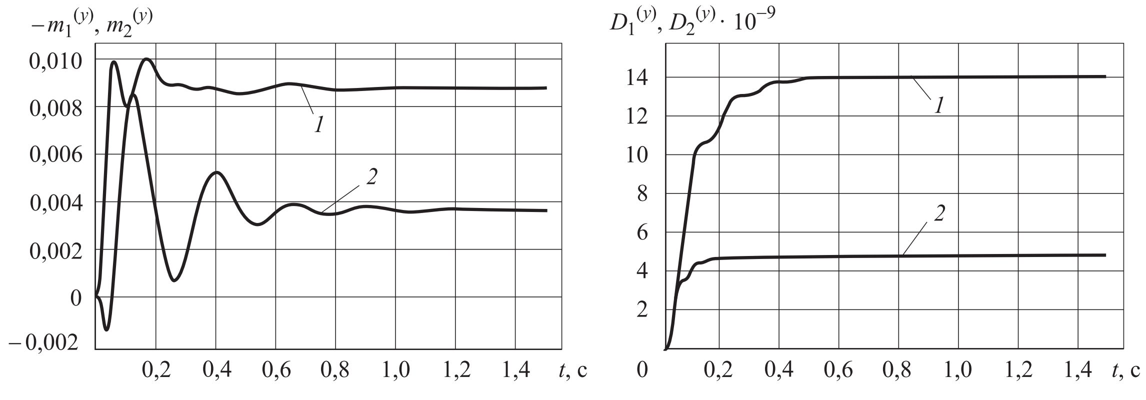

Рис. 2. Математические ожидания (*а*) и дисперсии (*б*) в узлах *1* и *2*

Для сравнения данная задача была решена с помощью Probabilistic Design в комплексе ANSYS и получены следующие результаты:

$$m_1^{(y)} = 0{,}00905 \text{ м};$$

$$m_2^{(y)} = 0{,}00410 \text{ м};$$

$$D_1^{(y)} = 1{,}37 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2;\ D_2^{(y)} = 0{,}41 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2.$$

Разработанный аппарат имеет достаточно простую и экономичную в отношении машинных ресурсов численную реализацию.

Выводы

1. Использование ортогональных разложений позволило существенно сократить число разрешающих уравнений, что необходимо для корреляционного анализа.

2. Метод моментов, не применяемый ранее для уравнений относительно модальных координат, позволил получить решения для нестационарных режимов функционирования системы при квазистационарных нагрузках.

Литература

[1] Болотин В.В., ред. *Вибрации в технике. Справочник. Т. 1: Колебания линейных систем.* Москва, Машиностроение, 1978. 352 с.

[2] Светлицкий В.А. *Стохастическая механика и теория надежности*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 504 с.

[3] Гусев А.С. *Вероятностные методы в механике машин и конструкций*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. 224 с.

[4] Тушев О.Н., Березовский А.В. Определение спектральных плотностей динамических характеристик нелинейной модели конструкции. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2013, № 1, с. 18–27.

[5] Дмитриев С.Н., Хамидуллин Р.К. Уточненная формула для вычисления коэффициентов передаточной матрицы в задачах статистической динамики. *Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2013, № 3. URL: http://technomag.bmstu.ru/doc/543198.html, Doi: 10.7463/0313.0543198 (accessed 15 September 2014).

[6] Щеглов Г.А. Использование вортонов для расчета колебаний балки в пространственном потоке. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2009. № 4, с. 8–12.

[7] Manevitch L.I., The Description of Localized Normal Modes in a Chain of Nonlinear Coupled Oscillators Using Complex Variables. *NonLinear Dynamics*, 2001, vol. 25, no. 1-3, pp. 95–109.

[8] Sodagar S., Honarvar F., Sinclair A., Multiple Scattering of Obliquely Incident Acoustic Wave from a Grating Immersed Cylindrical Shells. *Applied Acoustics*, 2011, no. 72, pp. 1–10.

[9] Breslavsky I.D., Avramov K.V. Two modes nonresonant interaction for rectangular plate with geometrical nonlinearity. *NonLinear Dynamics*, 2012, vol. 69, no. 1-2, pp. 285–294.

[10] Hay T.A., Cheung T.Y., Hamilton M.F., Ilinskii Y.A. Frequency response of bubble pulsations in tubes with arbitrary wall impedance. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2008, no. 123, pp. 12–20.

[11] Duncan D.B. Response of linear time-dependent systems to random input. *Journal of Applied Physics*, 1953, no. 24(5), pp. 609–611.

[12] Казаков И.Е. *Статистическая теория систем управления в пространстве состояний*. Москва, Наука, 1975. 432 с.

References

[1] *Vibratsii v tekhnike. Spravochnik. T. 1. Kolebaniia lineinykh sistem* [Vibration technology. Handbook. Vol. 1. Oscillations of linear systems]. Ed. Bolotin V.V. Moscow, Mashinostroenie publ., 1978. 352 p.

[2] Svetlitskii V.A. *Statisticheskaia mekhanika i teoriia nadezhnosti* [Statistical mechanics and the theory of reliability]. Moscow, Bauman Press, 2002. 504 p.

[3] Gusev A.S. *Veroiatnostnye metody v mekhanike mashin i konstruktsii* [Probabilistic methods in the mechanics of machines and structures]. Moscow, Bauman Press, 2009. 224 p.

[4] Tushev O.N., Berezovskii A.V. Opredelenie spektral'nykh plotnostei dinamicheskikh kharakteristik nelineinoi modeli konstruktsii [Determination of the spectral densities of the dynamic characteristics of a nonlinear model of the design]. *Problemy mashinostroeniia i nadezhnosti mashin* [Journal of Machinery Manufacture and Reliability]. 2013, no. 1, pp. 18–27.

[5] Dmitriev S.N., Khamidullin R.K. Utochnennaia formula dlia vychisleniia koeffitsientov peredatochnoi matritsy v zadachakh statisticheskoi dinamiki [Improved formula for calculating coefficients of transfer matrix in statistical dynamics problems]. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education. Bauman MSTU]. 2013, no. 3. Available at: http://technomag.bmstu.ru/doc/543198.html (accessed 15 September 2014). Doi: 10.7463/0313.0543198.

[6] Shcheglov G.A. Ispol'zovanie vortonov dlia rascheta kolebanii balki v prostranstvennom potoke [Wharton use to calculate the vibrations of the beam in the spatial flow]. *Problemy mashinostroeniia i nadezhnosti mashin* [Journal of Machinery Manufacture and Reliability]. 2009, no. 4, pp. 8–12.

[7] Manevitch L.I. The Description of Localized Normal Modes in a Chain of Nonlinear Coupled Oscillators Using Complex Variables. *Nonlinear Dynamics*, 2001, vol. 25, no. 1-3, pp. 95–109.

[8] Sodagar S., Honarvar F., Sinclair A. Multiple Scattering of Obliquely Incident Acoustic Wave from a Grating Immersed Cylindrical Shells. *Applied Acoustics*, 2011, vol. 72, no. 1, pp. 1–10.

[9] Breslavsky I.D., Avramov K.V. Two modes nonresonant interaction for rectangular plate with geometrical nonlinearity. *Nonlinear Dynamics*, 2012, vol. 69, no. 1-2, pp. 285–294.

[10] Hay T.A., Cheung T.Y., Hamilton M.F., Ilinskii Y.A. Frequency response of bubble pulsations in tubes with arbitrary wall impedance. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2008, no. 123, pp. 12–20.

[11] Duncan D.B. Response of linear time-dependent systems to random input. *Journal of Applied Physics*, 1953, no. 24(5), pp. 609–611.

[12] Kazakov I.E. *Statisticheskaia teoriia sistem upravleniia v prostranstve sostoianii* [Statistical theory of control systems in state space]. Moscow, Nauka publ., 1975. 432 p.

Статья поступила в редакцию 01.10.2014

Информация об авторах

ТУШЕВ Олег Николаевич (Москва) — доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой «Аэрокосмические системы». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

ДОНСКИХ Алексей Михайлович (Москва) — аспирант кафедры «Аэрокосмические системы». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: donskihalexey@mail.ru).

Information about the authors

TUSHEV Oleg Nikolaevich (Moscow) — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of «Aerospace Systems» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation).

DONSKIKH Aleksey Mikhaylovich (Moscow) — Post-Graduate of «Aerospace Systems» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: donskihalexey@mail.ru).