

УДК 621.833.6

Исследование напряженно-деформированного состояния сопряжения ось сателлита — щека водила планетарной передачи

Ф.И. Плеханов

Глазовский инженерно-экономический институт (филиал) ФГБОУ ВПО «Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова», 427622, Глазов, Удмуртская Республика, Российская Федерация, Кирова ул., д. 36.

Investigation of the stress-strain state of a satellite axle-carrier joint in a planetary gear

F.I. Plekhanov

Glazov Engineering Economic Institute (branch) of Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Kirova str., 36, 427622, Glazov, Udmurtia, Russian Federation.

 e-mail: gfi@gfi.edu.ru

i Определение деформации сопрягаемых элементов и исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) планетарных передач с внутренними и внешними зацеплениями колес является актуальной задачей. Деформативность элементов планетарной передачи влияет на ее жесткость и нагрузочную способность, поэтому для оптимизации жесткостных и прочностных характеристик передачи важно исследовать НДС сопряжения ось сателлита — щека водила, установить его влияние на распределение нагрузки в зоне сопряжения и на податливость оси. Разработан метод определения деформации оси сателлита и сопрягаемой с ней щеки водила планетарной передачи, а также закон распределения нагрузки в зоне сопряжения, основанный на решении дифференциального уравнения изогнутой оси, расположенной на упругом основании, и конечно-элементном анализе НДС сопрягаемых деталей. Поскольку перемещение оси сателлита в месте расположения на ней подшипника зависит от податливости собственно оси и от деформации сопрягаемых деталей в месте заделки оси в щеку водила, то первая из этих составляющих перемещения определялась методами сопротивления материалов с использованием интегралов Мора, вторая — из решения дифференциального уравнения изогнутой оси, расположенной на упругом основании, жесткость которого установлена экспериментальным путем. Создана компьютерная модель сопрягаемых деталей и выполнено исследование их НДС методом конечных элементов в программе Solid Works, которое дало результаты, близкие к расчетным. Получены уравнения для определения деформации оси сателлита и сопрягаемой с ней щеки водила, установлено влияние податливости указанных элементов на распределение нагрузки в зоне их сопряжения, осуществлен конечно-элементный анализ НДС деталей передачи. Разработанный метод расчета элементов планетарной передачи и выполненное на его основе исследование показали, что смещение сателлита, обусловленное деформацией сопрягаемых деталей в месте заделки оси в щеку водила, превышает смещение, вызванное прогибом собственно оси. Это следует учитывать при определении коэффициентов неравномерности распределения нагрузки в зацеплениях колес и расчете передачи на жесткость и прочность.

Ключевые слова: планетарная передача, деформация оси сателлита, щека водила.

i Determining the deformation of mating elements of internal and external planetary gears and studying their stress-strain state is of great importance. Deformability of the elements of the planetary gear affects its stiffness and load capacity; therefore, to optimize these properties, it is necessary to investigate the stress-strain state of a satellite axle-carrier joint and establish its influence on the load distribution in the contact area and on the axle flexibility. A method for determining the deformation of a satellite axle mating with a planetary carrier and the load distribution in the contact area is developed. The method is based on the solution of the differential equation of a curved axle on an elastic foundation and the finite element analysis of the stress-strain state of mating parts. The displacement of the satellite axle at the bearing location point depends on the axle flexibility and deformation of mating parts in the contact area where the axle is embedded in the carrier. The former displacement component is determined by the methods of the strength of materials using Mohr's integrals, the latter is determined from the solution of the differential equation of a curved axle on an elastic foundation whose stiffness is found experimentally. A computer model of mating parts is constructed and their stress-strain state is studied by the finite element method implemented in the Solid Works software. The obtained results are in good agreement. Equations for determining the deformation of the satellite axle and the mating carrier are deduced, the influence of the flexibility of these parts on the load distribution in the contact area is established, and the finite element analysis of the stress-strain state of the gear elements is performed. The study showed that the satellite axle displacement caused by the deformation of the mating parts in the contact area exceeds the bending deflection of this axle. This should be taken into account when determining load distribution factors in meshes and computing the rigidity and strength of gears.

Keywords: planetary gear, satellite axle deformation, carrier.

Планетарные и волновые передачи нашли широкое распространение в технике благодаря хорошим массогабаритным показателям, сравнительно малым потерям мощности на трение, возможности реализации большого передаточного отношения [1–2]. Наличие в зацеплении одновременно нескольких пар зубьев позволяет достичь высокой нагрузочной способности, что выгодно отличает эти передачи от рядных зубчатых передач [3–5]. Среди множества конструкций планетарных механизмов наиболее простыми и технологичными являются многопоточные передачи с внешними и внутренними зацеплениями колес, содержащие консольно расположенные в щеке водила оси самоустанавливающихся сателлитов (рис. 1). Такое исполнение планетарной передачи, с одной стороны, способствует выравниванию нагрузки в зацеплениях колес за счет повышенной податливости осей сателлитов (при числе сателлитов больше трех даже самоустанавливаемость одного из основных звеньев передачи не обеспечивает равномерного распределения нагрузки по потокам мощности [6]), с другой — создает опасность выхода передачи из строя в результате возникновения больших напряжений в сопряжении ось сателлита — щека водила. В связи с этим актуальной является задача разработки метода определения деформации сопрягаемых

элементов и исследования их напряженно-деформированного состояния (НДС).

Цель работы — определение податливости оси сателлита и щеки водила, установление ее влияния на распределение нагрузки в зоне их сопряжения, что очень важно для оптимизации жесткостных и прочностных характеристик передачи.

С учетом прогиба оси сателлита нагрузка на нее со стороны подшипника может быть представлена уравнением (рис. 2)

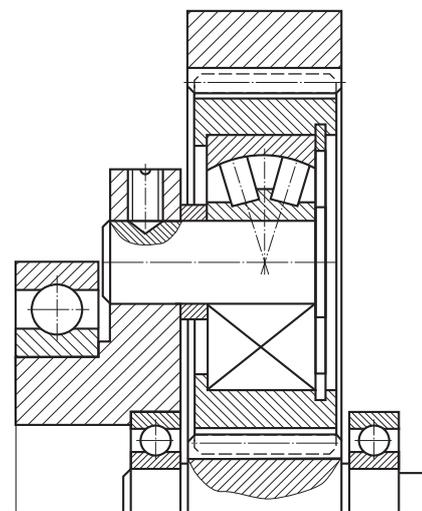


Рис. 1. Однорядная планетарная передача типа 2К-Н с консольными осями сателлитов

$$q(x) = q_0 \sin \frac{\pi x}{l} = \frac{\pi P}{2l} \sin \frac{\pi x}{l},$$

тогда изгибающий момент в произвольном сечении

$$M(x) = 0,5P \left(\frac{l}{\pi} \sin \frac{\pi x}{l} - x \right),$$

поперечная сила

$$Q(x) = 0,5P \left(1 - \cos \frac{\pi x}{l} \right),$$

а обусловленный ими прогиб оси в средней части площадки контакта с кольцом подшипника

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{Pl^3}{IE} \left(\frac{5}{96} - \frac{0,5\pi - 1}{2\pi^3} \right) + \frac{Pl}{FG} 1,11 \left(0,25 + \frac{0,5}{\pi} \right) = \\ &= 0,87q \frac{\bar{l}^2}{E} (1,65 + \bar{l}^2), \end{aligned}$$

где P — прикладываемая нагрузка; l — длина консоли оси; x — координата оси; I — осевой момент инерции сечения; F — площадь поперечного сечения оси; E, G — модули упругости 1-го и 2-го рода соответственно; $M(z)$ — изгибающий момент оси; d — диаметр оси сателлита; $\bar{l} = l/d$; q — средняя погонная нагрузка, $q = P/l$.

Уравнение деформированной оси в зоне сопряжения ее со щекой водила имеет следующий вид:

$$\omega^{11}(z)/C = y^{11}(z) = M(z)/(IE) + 1,11\omega(z)/(FG). \quad (1)$$

Здесь C — контактная жесткость сопряжения, $C = E/1,2$ [7, 8],

$$M(z) = - \int_0^z \omega(v)(z-v)dv;$$

v — координата оси.

Продифференцировав дважды уравнение (1), получим

$$\omega^{1V}(z) - 1,11C\omega^{11}(z)/(FG) + C\omega(z)/(IE) = 0. \quad (2)$$

Решение уравнения (2) имеет вид

$$\begin{aligned} \omega(\bar{z}) &= C_1 \operatorname{sh}(\alpha \bar{z}) \sin(\beta \bar{z}) + C_2 \operatorname{ch}(\alpha \bar{z}) \sin(\beta \bar{z}) + \\ &+ C_3 \operatorname{sh}(\alpha \bar{z}) \cos(\beta \bar{z}) + C_4 \operatorname{ch}(\alpha \bar{z}) \cos(\beta \bar{z}), \end{aligned}$$

где

$$\alpha = b^4 \sqrt{\frac{C}{IE}} \cdot \cos \left(0,5 \arccos \frac{1,11\sqrt{IEC}}{2GF} \right);$$

$$\bar{z} = z/b; \quad \beta = b^4 \sqrt{\frac{C}{IE}} \cdot \sin \left(0,5 \arccos \frac{1,11\sqrt{IEC}}{2GF} \right).$$

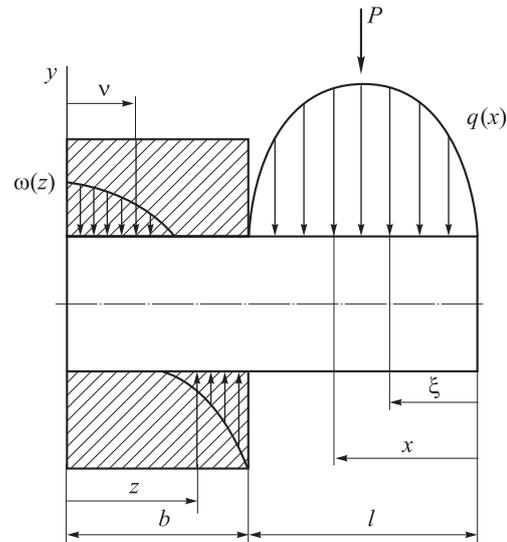


Рис. 2. Схема нагружения оси сателлита и щеки водила

Для определения постоянных интегрирования $C_1 - C_4$ используем следующие граничные условия и уравнения статики:

$$\int_0^b \omega(z) dz = -P =$$

$$= -\sqrt{F_{nb}^2 + F_{na}^2 + 2F_{nb}F_{na} \cos(\alpha_{wb} + \alpha_{wa})};$$

$$\int_0^b \omega(v)(b-v)dv = 0,5Pl;$$

при $z = 0$

$$\omega^{11}(z)/C = 1,11\omega(z)/(FG);$$

при $z = b$

$$\omega^{11}(z)/C = -0,5Pl/(IE) + 1,11\omega(z)/(FG).$$

Здесь F_{nb}, F_{na} — нормальные силы в зацеплениях сателлита с неподвижным колесом b и солнечной шестерней a , соответственно; α_{wb}, α_{wa} — углы зацеплений колес.

Зависимость относительной погонной нагрузки $W(\bar{z}) = \omega(\bar{z})/q$ от $\bar{z} = z/b$ по толщине щеки водила при $\bar{l} = l/d = 1$ и различных значениях $\bar{b} = b/d$ представлена на рис. 3.

Перемещение оси в зоне установки подшипника, обусловленное податливостью сопряжения ось — щека водила, выраженное через среднюю погонную нагрузку, описывается выражением вида

$$y_H = \frac{1,2}{E} \left[\omega(1) + \frac{\bar{l}}{2b} \omega^1(1) \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1,2}{E} \left\{ \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \times \left[C_1 + 0,5 \frac{\bar{l}}{b} (C_2 \alpha - C_3 \beta) \right] + \right. \\
 &+ \operatorname{ch} \alpha \cos \beta \left[C_4 + 0,5 \frac{\bar{l}}{b} (C_2 \beta + C_3 \alpha) \right] + \\
 &+ \operatorname{sh} \alpha \cos \beta \left[C_3 + 0,5 \frac{\bar{l}}{b} (C_1 \beta + C_4 \alpha) \right] + \\
 &\left. + \operatorname{ch} \alpha \sin \beta \left[C_2 + 0,5 \frac{\bar{l}}{b} (C_1 \alpha - C_4 \beta) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Суммарное окружное перемещение сателлита, учитывающее деформацию сопрягаемых деталей, включая деформацию оси и внутреннего кольца подшипника в зоне их контакта y_k ($y_k = q_{\max} / C$),

$$y_{\Sigma} = y_0 + y_H + y_k.$$

Величину перемещения сателлита y_{Σ} важно знать для установления закона распределения нагрузки в зацеплениях колес и расчета передачи на жесткость.

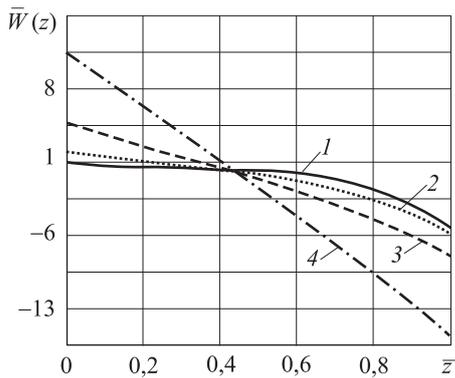


Рис. 3. Зависимость относительной погонной нагрузки $\bar{W}(\bar{z}) = \omega(\bar{z})q$ от $\bar{z} = z/b$ и относительной толщины щеки водила $b = b/d$ при $\bar{l} \equiv l/d = 1$: 1 — $b = 2$; 2 — $b = 1,5$; 3 — $b = 1$; 4 — $b = 0,6$

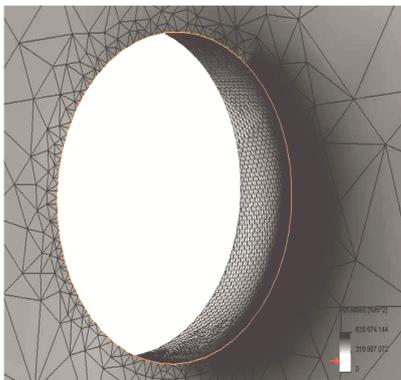


Рис. 4. Компьютерная модель распределения напряжений у поверхности щеки водила

Показатели НДС элементов передачи

Толщина щеки водила, мм	Максимальное напряжение у поверхности щеки водила, МПа	Окружное перемещение сателлита, мкм	Перемещение сателлита, рассчитанное аналитически, мкм
$0,6d = 12$	704	130	136
$d = 20$	412	73	66
$1,5d = 30$	308	55	50
$2d = 40$	264	50	47

Для оценки точности аналитического метода расчета исследовано НДС оси и щеки водила с помощью конечно-элементного анализа в среде Solid Works [9, 10] (рис. 4). При анализе все геометрические параметры оставались неизменными, за исключением толщины щеки. Прикладываемая нагрузка к сателлиту и его оси $P = 10\,000$ Н, ширина внутреннего кольца подшипника принималась равной диаметру оси сателлита. Результаты исследования представлены в таблице.

Из анализа выполненных приведенным методом расчетов следует, что смещение сателлита, вызванное деформацией сопрягаемых деталей в месте заделки оси в щеку водила, превышает смещение, обусловленное прогибом собственно оси. Это следует учитывать при проектировании планетарных механизмов, в частности, при определении коэффициентов неравномерности распределения нагрузки по потокам мощности.

При ограниченном радиальном размере механического привода нередко используется многорядная планетарная передача [11]. В этом случае каждый ее сателлит целесообразно вы-

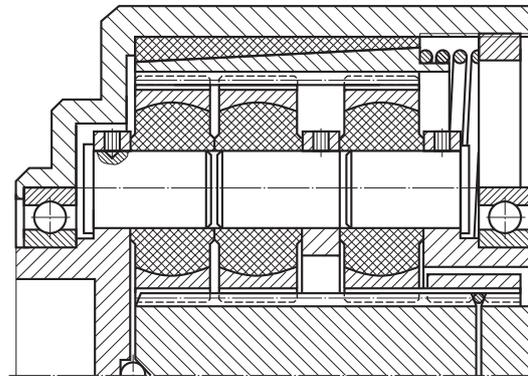


Рис. 5. Планетарная передача типа 2К-Н с трехрядным расположением сателлитов и консольными их осями

полнить состоящим из нескольких самоустанавливающихся колес, расположенных на консольных осях (рис. 5). Тогда податливость осей будет способствовать выравниванию нагрузки между рядами сателлитов. Такое конструктивное исполнение передачи наиболее оправданно при большом отношении ширины солнечной шестерни к ее диаметру и, следовательно, большому углу кручения, приводящем к неравномерному распределению нагрузки в зацеплениях колес.

Представленные зависимости позволяют определить податливость оси сателлита планетарной передачи и сопрягаемой с ней щеки водила, осуществить расчет этих деталей на прочность и жесткость, использовать полученные результаты расчетов при проектировании рациональных конструкций планетарных механизмов.

Выводы

1. Деформация сопряжения ось сателлита — щека водила планетарной передачи оказывает большое влияние на суммарную податливость оси (суммарная податливость оси в разы больше податливости консольной ее части).

2. Распределение нагрузки по ширине щеки водила в зоне ее сопряжения с осью сателлита планетарной передачи носит нелинейный характер; близость к линейному характеру распределения нагрузки наблюдается при отношении ширины щеки водила к диаметру оси $\bar{b} \leq 1$.

3. Аналитический метод определения суммарной податливости оси сателлита, основанный на решении дифференциального уравнения, учитывающего контактную жесткость сопряжения ось сателлита — щека водила, обеспечивает высокую степень точности расчета (погрешность не превышает 11 %).

Литература

- [1] Тимофеев Г.А., Самойлова М.В. Геометро-кинематическое исследование комбинированного планетарно-волнового механизма. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2012, № 1, с. 70–80.
- [2] Lin J., Parker G.R. Planetary gear parametric instability caused by mesh stiffness variation. *Journal of Sound and vibration*, 2002, vol. 249, no. 1, pp. 129–145, doi:10.1006/jsvi.2001.3848.
- [3] Singh A. Epicyclic load sharing map – development and validation. *Mechanism and Machine Theory*, 2011, vol. 46, no. 5, pp. 632–646.
- [4] Иванов А.С., Ермолаев М.М., Крикунов Д.Э., Мирошник А.А., Руднев С.К., Чиркин А.В. Конструктивные исполнения планетарно-цевочных редукторов для высокоточных следящих приводов. *Вестник машиностроения*, 2013, № 3, с. 9–11.
- [5] Даньков А.М., Подымако М.Э. Компенсация погрешности угла поворота сателлита планетарной плавно регулируемой передачи с бесступенчатым регулированием. *Сб. тр. Междунар. симп. «Теория и практика зубчатых передач»*. Ижевск, 21–23 января 2014 г. Ижевск, Изд-во ИжГТУ, 2014, с. 506–511.
- [6] Кудрявцев В.Н., Кирдяшев Ю.Н. *Планетарные передачи: справочник*. Москва, Машиностроение, 1977. 535 с.
- [7] Плеханов Ф.И., Овсянников А.В., Казаков И.А. Экспериментальное исследование деформативности элементов планетарных передач. *Научно-технические и социально-экономические проблемы регионального развития. Сб. науч. тр.* Глазов, ГИЭИ, 2010, вып. 7, с. 76–78.
- [8] Плеханов Ф.И., Кузнецов В.С. Исследование деформативности элементов зубчатой планетарной передачи. *Вестник машиностроения*, 2010, № 6, с. 25–28.
- [9] Nikolić-Stanojević V., Dolicanin C., Radojković M. Application of Finite Element Method of thin steel Plate with holes. *Technical Gazette*, 2011, vol. 18, no. 1, pp. 57–62.
- [10] Dolicanin C., Nikolic V., Dolicanin D. Application of finite difference method to study of the phenomenon in the theory of thin plates. *Scientific Publications of the State University of Novi Pazar, Series A: Applied Mathematics, Informatics & Mechanics*, 2010, vol. 2, no. 1, pp. 29–43.
- [11] Волков Г.Ю., Ратманов Э.В., Курасов Д.А. Адаптивная система коррекции погрешностей наклона зубьев в зубчатых передачах. *Вестник машиностроения*, 2013, № 3, с. 14–16.

References

- [1] Timofeev G.A., Samoilova M.V. Geometro-kinematischeskoe issledovanie kombinirovannogo planetarno-volnovogo mekhanizma [Geometric-Kinematic Study of Combined Planetary-Wave Mechanism]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Mechanical Engineering]. 2012, no. 1, pp. 70–80.
- [2] Lin J., Parker G.R. Planetary gear parametric instability caused by mesh stiffness variation. *Journal of Sound and vibration*, 2002, vol. 249, no. 1, pp. 129–145, doi:10.1006/jsvi.2001.3848.
- [3] Singh A. Epicyclic load sharing map – development and validation. *Mechanism and Machine Theory*, 2011, vol. 46, no. 5, pp. 632–646.
- [4] Ivanov A.S., Ermolaev M.M., Krikunov D.E., Miroshnik A.A., Rudnev S.K., Chirkin A.V. Konstruktivnye ispolneniia planetarno-tsevochnykh reduktorov dlia vysokotochnykh slediashchikh privodov [Structural variations of planetary lantern wheel gear sets for high-precision follower actuators]. *Vestnik mashinostroeniia* [Russian Engineering Research]. 2013, no. 3, pp. 9–11.
- [5] Dan'kov A.M., Podymako M.E. Indemnification of satellite rotation angle error in the planetary continuously adjustable gear train. *Proceedings of the International Symposium «Theory and practice of gearing» January 21–23, 2014, Russia, Izhevsk*, pp. 506–511.
- [6] Kudriavtsev V.N., Kirdiashev Iu.N. *Planetarnye peredachi: spravochnik* [Planetary gears: a guide]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1977. 535 p.
- [7] Plekhanov F.I., Ovsiannikov A.V., Kazakov I.A. Eksperimental'noe issledovanie deformativnosti elementov planetarnykh peredach [Experimental study of deformability elements of planetary gears]. *Nauchno-tehnicheskie i sotsial'no-ekonomicheskie problemy regional'nogo razvitiia: Sbornik nauchnykh trudov* [Scientific, technical and socio-economic problems of regional development: Proceedings]. Glazov, GIEI publ., 2010, iss. 7, pp. 76–78.
- [8] Plekhanov F.I., Kuznetsov V.S. Issledovanie deformativnosti elementov zubchatoi planetarnoi peredachi [Study of the deformability of the elements of toothed planetary gear]. *Vestnik mashinostroeniia* [Russian Engineering Research]. 2010, no. 6, pp. 25–28.
- [9] Nikolić-Stanojević V., Dolićanin C., Radojković M. Application of Finite Element Method of thin steel Plate with holes. *Technical Gazette*, 2011, vol. 18, no. 1, pp. 57–62.
- [10] Dolicanin C., Nikolic V., Dolicanin D. Application of finite difference method to study of the phenomenon in the theory of thin plates. *Scientific Publications of the State University of Novi Pazar, Series A: Applied Mathematics, Informatics & Mechanics*, 2010, vol. 2, no. 1, pp. 29–43.
- [11] Volkov G.Iu., Ratmanov E.V., Kurasov D.A. Adaptivnaia sistema korrektsii pogreshnostei naklona zub'ev v zubchatykh peredachakh [Self-organizing system of adjustment of inclination teeth error in gear units]. *Vestnik mashinostroeniia* [Russian Engineering Research]. 2013, no. 3, pp. 14–16.

Статья поступила в редакцию 30.12.2014

Информация об авторе

ПЛЕХАНОВ Федор Иванович (Глазов) — доктор технических наук, профессор, директор Глазовского инженерно-экономического института (филиала) ФГБОУ ВПО «Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова» (427622, Глазов, Удмуртская Республика, Российская Федерация, Кирова ул., д. 36, e-mail: gfi@gfi.edu.ru).

Information about the author

PLEKHANOV Fedor Ivanovich (Glazov) — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Director of Glazov Engineering Economic Institute (branch) of Kalashnikov Izhevsk State Technical University (Kirova str., 36, 427622, Glazov, Udmurtia, Russian Federation, e-mail: gfi@gfi.edu.ru).