

УДК 539.3

DOI: 10.18698/0536-1044-2015-11-68-77

Моделирование нелинейно-упругих характеристик композитов с конечными деформациями методом асимптотического осреднения*

Ю.И. Димитриенко

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1

Modelling of Nonlinear-Elastic Properties of Composites with Finite Deformations by Asymptotic Homogenization Method

Y.I. Dimitrienko

BMSTU, 105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1



e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com



Разработан метод расчета нелинейно-упругих характеристик композитов с конечными деформациями на основе асимптотической теории осреднения периодических структур. Используются универсальные представления определяющих соотношений нелинейно-упругих сред с конечными деформациями, предложенные автором ранее. Получены аналитические решения локальных задач для слоистых композитов с конечными деформациями. Для численной реализации этих решений предложен метод вложенной оптимизации. Представлены примеры численного расчета диаграмм деформирования для слоистых композитов с конечными деформациями.

Ключевые слова: слоистые композиты, нелинейно-упругие свойства, конечные деформации, тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа, градиент деформации, универсальные модели определяющих соотношений, метод асимптотического осреднения, локальные задачи, метод вложенной оптимизации, диаграммы деформирования.



A method for calculating non-linear properties of composites with finite deformations is developed. The method is based on asymptotic homogenization of periodical structures. Universal representations of nonlinear-elastic constitutive relations for materials with finite deformations, earlier proposed by the author, are used in the calculations. Analytical solutions to specific problems for layered composite materials with finite deformations are obtained. A method of nested optimization is proposed for numerical realization of these solutions. Examples of numerical calculations for stress-strain diagrams for layered composite materials with finite deformations are presented.

Keywords: laminated composites, non-linear properties, finite deformations, Piola-Kirchhoff stress tensor, deformation gradient, universal representation of constitutive relations, asymptotic homogenization method, local problems, method of nested optimization, stress-strain diagrams.

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-19-00847).

В различных отраслях промышленности активно применяют композиционные материалы на основе резиноподобных и эластомерных матриц, армированных волокнами, дисперсными частицами или тканевыми наполнителями. Такие композиты, как правило, обладают удачным сочетанием свойств: относительно высокой прочностью, обусловленной прочностью армирующих волокон, и достаточно высокой предельной деформацией разрушения, обусловленной способностью резин и эластомеров деформироваться без разрушения в области больших деформаций. В связи с этим актуальной проблемой является разработка методов расчета эффективных нелинейно-упругих характеристик композитов в области конечных деформаций.

В настоящее время существуют различные приближенные методы расчета характеристик композитов с конечными деформациями [1–4], основанные на системе различных допущений и гипотез. Достаточно хорошо развиты методы расчета эффективных характеристик композитов в области малых деформаций [5]. Наиболее эффективным в настоящее время является, по-видимому, метод асимптотического осреднения [6, 7], который обеспечивает высокую математическую точность расчета и в сочетании с методом конечного элемента [8–15] позволяет прогнозировать широкий спектр различных физико-механических и теплофизических характеристик композитов. Целью настоящего исследования является разработка асимптотической теории осреднения нелинейно-упругих композитов с начальной периодической структурой в области конечных деформаций. Для построения этой теории используются универсальные представления моделей нелинейно-упругих сред с конечными деформациями, предложенные в [16–19].

Постановка задачи нелинейной упругости при конечных деформациях. Используя обозначения из общей теории конечных деформаций, введем эйлеровы (декартовы) координаты материальной точки сплошной среды в отсчетной K и актуальной K конфигурациях: x^k и x^k , а также лагранжевы координаты X^i , которые будем полагать совпадающими с декартовыми координатами $X^i = x^i$ в начальный момент времени.

В лагранжевом описании [16] рассмотрим задачу нелинейной теории упругости для неод-

нородных сред с конечными деформациями [17–19]:

$$\nabla_i P^{ij} = 0; \quad X^i \in V; \quad (1)$$

$$P^{ij} = \mathcal{F}^{0ij}(F^{kl}, X^m); \quad X^i \in V \cup \Sigma; \quad (2)$$

$$F^k_l = \delta^k_l + \nabla_l u^k; \quad X^i \in V \cup \Sigma; \quad (3)$$

$$n_i [P^{ij}] = 0; \quad [u^i] = 0; \quad X^i \in \Sigma_{\alpha\beta}; \quad (4)$$

$$n_i P^{ij} = t^j_e; \quad X^i \in \Sigma_1; \quad u^i = u^i_e; \quad X^i \in \Sigma_2. \quad (5)$$

Здесь (1) — уравнения равновесия; (2) — определяющие соотношения нелинейно-упругой среды, которые записаны с использованием универсальных моделей определяющих соотношений — так называемых моделей A_n ; (3) — кинематическое соотношение; (4) — условия идеального контакта на поверхностях раздела $\Sigma_{\alpha\beta}$ α -й и β -й компонент композита; (5) — граничные условия на частях Σ_1 и Σ_2 внешней поверхности композита ($\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \partial V$). Обозначим скачок функций на границе раздела $\Sigma_{\alpha\beta}$ компонент композита как $[P^{ij}]$. Все компоненты векторов и тензоров отнесем к неподвижному ортонормированному базису e_k отсчетной конфигурации K . Введем обозначения для плотности — ρ и компонент: P^{ij} — тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа; F^k_l — тензора градиента деформаций; u^k — вектора перемещений; n_i — вектора нормали к поверхности в отсчетной конфигурации K , t^j_e — вектора поверхностных усилий; u^i_e — вектора заданных перемещений поверхности; $\nabla_i = \frac{\partial}{\partial X^i}$ — набла оператора; \mathcal{F}^{0ij} — тензор определяющих соотношений нелинейно-упругих компонент композита, который для моделей A_n упругих сред с конечными деформациями имеет сложный неявно заданный вид [17,18] и зависит от компонент градиента деформаций F^k_l и лагранжевых координат X^i :

$$\mathcal{F}^{0ij}(F^k_l, X^m) = \rho(X^m) E^{0ijsq}(F^k_l) \Psi_{sq}(C^{np}, X^m);$$

$$\begin{aligned}
C^{np} &= \frac{1}{n-3} \sum_{\gamma=1}^3 \lambda_{\gamma}^{n-3} Q_{\gamma}^0 Q_{\gamma}^0; \\
E^{0ijsq}(F_l^k) &= \sum_{\gamma, \omega=1}^3 E_{\gamma\omega}^0 Q_{\gamma}^i Q_{\omega}^j Q_{\omega}^s Q_{\gamma}^q; \\
\Psi_{sq}(C^{np}, X^m) &= \frac{\partial}{\partial C^{np}} \Psi(C^{np}, X^m). \quad (6)
\end{aligned}$$

Здесь $\Psi(C^{np}, X^m)$ — упругий потенциал, различный для каждого компонента композита и поэтому зависящий явно от лагранжевых координат X^i ; C^{np} — компоненты симметричного тензора энергетических деформаций [17, 18]; E^{0ijsq} — компоненты тензоров энергетической

эквивалентности [17, 18]; $Q_{\gamma}^i(F_l^k)$ и $Q_{\omega}^j(F_l^k)$ — матрицы собственных векторов левого и правого тензоров искажений (являются неявными функциями только от F_l^k); $E_{\gamma\omega}^0(\lambda_{\gamma})$ — функции собственных значений λ_{γ} тензоров искажений. Собственные значения λ_{γ} являются также функциями только от компонент тензора F_l^k .

Решение задачи (1)–(5) отыскивают относительно поля вектора перемещений $u^k = u^k(X^i)$, после нахождения которого координаты произвольной точки композита вычисляют по формуле:

$$x^k(X^i) = x^k(X^i) + u^k(X^i).$$

Асимптотическое решение задачи нелинейной упругости для композитов с периодической структурой. Рассмотрим случай, когда неоднородная среда в отсчетной конфигурации K обладает периодической структурой и для нее можно выделить повторяющийся элемент — ячейку периодичности (ЯП) V_{ξ} , состоящую из N компонентов $V_{\alpha\xi}$, $\alpha = 1, \dots, N$. Такую среду будем называть композитом. Введем малый параметр $\kappa = l/L \ll 1$ как отношение характерного размера l ЯП к характерному размеру L всего композита (размеры определены для отсчетной конфигурации K), а также локальные ξ^i лагранжевы координаты в K :

$$\xi^i = \frac{\bar{X}^i}{\kappa}; \quad \bar{X}^i = \frac{X^i}{L}. \quad (7)$$

Полагаем, что локальные координаты в ЯП изменяются в диапазоне $-0,5 \leq \xi^i \leq 0,5$. В силу

периодичности структуры композита его плотность ρ и тензор определяющих соотношений \mathcal{F}^{0ij} (6) можно рассматривать как периодические функции локальных координат: $\mathcal{F}^{0ij}(F_l^k, \xi^m)$.

Решение задачи (1)–(5) будем искать в виде периодической функции локальных лагранжевых координат ξ^i и зависящей от глобальных лагранжевых координат X^i :

$$u^k = u^k(X^i, \xi^j); \quad u^k(X^i, \xi^j) = u^k(X^i, \xi^j + a^j), \quad (8)$$

где a^j — произвольный целочисленный вектор.

Дифференцирование функций $u^k(X^i, \xi^j)$ вида (8) осуществляем по формальным правилам дифференцирования сложной функции, тогда с учетом (7) получим

$$\begin{aligned}
\nabla_i u^k &= u^k_{,i} + \frac{1}{\kappa} u^k_{|i}; \\
u^k_{,i} &= \frac{\partial}{\partial X^i} u^k(X^l, \xi^m); \\
u^k_{|j} &= \frac{\partial}{\partial \xi^j} u^k(X^l, \xi^m).
\end{aligned} \quad (9)$$

Решение задачи (1)–(5) для композита периодической структуры ищем в виде асимптотических разложений по малому параметру κ :

$$u^k(X^i, \xi^l) = u^{k(0)}(X^i) + \kappa u^{k(1)}(X^i, \xi^l) + \kappa^2 + \dots \quad (10)$$

Подставляя (10) в (3) с учетом (9), находим асимптотическое разложение для тензора градиента деформации:

$$F_l^k = F_l^{k(0)}(X^i, \xi^l) + \kappa F_l^{k(1)}(X^i, \xi^l) + \kappa^2 \dots; \quad (11)$$

$$F_l^{k(0)}(X^i, \xi^l) = \delta_l^k + u^{k(0)}_{,l} + u^{k(1)}_{|l}; \quad (12)$$

$$F_l^{k(1)} = u^{k(1)}_{,l} + u^{k(2)}_{|l}.$$

Подставляя разложение (11) в (2) и используя формулу Тейлора, находим асимптотические разложения определяющих соотношений и тензора Пиолы — Кирхгофа

$$P^{ij} = P^{ij(0)}(X^k, \xi^l) + \kappa P^{ij(1)}(X^k, \xi^l) + \kappa^2 \dots; \quad (13)$$

$$P^{ij(0)} = \mathcal{F}^{0ij}(F_l^{k(0)}, \xi^m); \quad (14)$$

$$P^{ij(1)} = \frac{\partial}{\partial F_l^{k(0)}} \mathcal{F}^{0ij}(F_l^{k(0)}, \xi^m) F_l^{k(1)}.$$

После подстановки разложения (13) в (1) с учетом (7) получаем асимптотическое разложе-

ние уравнений равновесия и граничных условий:

$$\frac{1}{\kappa} P^{ij(0)}|_i + (P^{ij(0)}|_i + P^{ij(1)}|_i + \rho f^j) + \kappa(P^{ij(1)}|_i + P^{ij(2)}|_i) + \kappa^2 \dots = 0; \quad (15)$$

$$n_i [P^{ij(0)}] + \kappa n_i [P^{ij(1)}] + \kappa^2 \dots = 0; \quad [u^{k(0)}] + \kappa [u^{k(1)}] + \kappa^2 \dots = 0, \quad X^i \in \Sigma_{\alpha\beta}; \quad (16)$$

$$n_i P^{ij(0)} + \kappa n_i P^{ij(1)} + \kappa^2 \dots = t_e^j, \quad X^i \in \Sigma_1; \quad u^{k(0)} + \kappa u^{k(1)} + \kappa^2 \dots = u_e^i, \quad X^i \in \Sigma_2. \quad (17)$$

Формулировка локальных задач. Приравнивая в (15), (16) члены при одинаковых степенях κ к нулю, получаем рекуррентную последовательность L_κ локальных задач нелинейной упругости. Задача L_0 имеет следующий вид:

$$P^{ij(0)}|_i = 0; \quad (18)$$

$$P^{ij(0)} = \mathcal{F}^{0ij}(F_l^{k(0)}, \xi^m); \quad (19)$$

$$F_l^{k(0)}(X^i, \xi^l) = \bar{F}_l^k + u^{k(1)}|_l; \quad (20)$$

$$n_i [P^{ij(0)}] = 0, \quad [u^{k(1)}] = 0, \quad \xi^i \in \Sigma_{\alpha\beta}; \quad (21)$$

$$\langle u^{k(1)} \rangle = 0; \quad (22)$$

$$[[u^{k(1)}]]_i = 0. \quad (23)$$

Здесь введена операция осреднения по ЯП V_ξ^0 :

$$\langle u^{k(1)} \rangle = \sum_{\alpha=1}^N \int_{V_{\alpha\xi}^0} u^{k(1)} dV_\xi. \quad (24)$$

Условие (23) означает требование периодичности неизвестных функций на границе ЯП:

$$[[u^{k(1)}]]_i = u^{k(1)}|_{\xi^i=0,5} - u^{k(1)}|_{\xi^i=-0,5} = 0.$$

Задача L_0 рассматривается относительно неизвестных перемещений $u^{k(1)}$. Осредненный тензор-градиент

$$\bar{F}_l^k = \delta_l^k + u^{k(0)}|_l \quad (25)$$

рассматривается как «входные данные» локальной задачи L_0 .

Локальная задача L_1 имеет вид

$$P^{ij(0)}|_i + P^{ij(1)}|_i = 0; \quad (26)$$

$$P^{ij(1)} = \frac{\partial}{\partial F_l^{k(0)}} \mathcal{F}^{0ij}(F_l^{k(0)}, \xi^m) F_l^{k(1)}; \quad (27)$$

$$F_l^{k(1)} = u^{k(1)}|_l + u^{k(2)}|_l; \quad (28)$$

$$n_i [P^{ij(1)}] = 0; \quad [u^{k(1)}] = 0; \quad X^i \in \Sigma_{\alpha\beta}; \quad \langle u^{k(2)} \rangle = 0; \quad [[u^{k(2)}]]_i = 0; \quad (29)$$

решением этой системы являются перемещения $u^{k(2)}$.

Формулировка осредненной задачи нелинейной теории упругости для композита и осредненные определяющие соотношения. Осредняя систему уравнений (19), (20), (26) с учетом периодичности функций $P^{ij(0)}$ получаем осредненную задачу нелинейной упругости для композита:

$$\langle P^{ij(0)} \rangle|_i = 0; \quad (30)$$

$$\langle P^{ij(0)} \rangle = \langle \mathcal{F}^{0ij}(F_l^{k(0)}, \xi^m) \rangle; \quad (31)$$

$$F_l^{k(0)}(X^i, \xi^l) = \langle F_l^k \rangle + u^{k(1)}|_l; \quad (32)$$

$$n_i \langle P^{ij(0)} \rangle = \langle t_e^j \rangle; \quad X^i \in \Sigma_1; \quad u^{k(0)} = \langle u_e^i \rangle; \quad X^i \in \Sigma_2. \quad (33)$$

Здесь учтено, что осредненный градиент деформации $\langle F_l^k \rangle$ в силу периодичности функций $u^{k(1)}$ совпадает с \bar{F}_l^k . В задаче (30)–(33) предполагается, что перемещение $u^{k(1)}$, являющееся решением задачи L_0 , может быть представлено как функция локальных координат и «входных данных задачи» — осредненно-го градиента.

Подставляя это выражение в (31) и (32), получаем осредненные определяющие соотношения композита

$$\langle P^{ij(0)} \rangle = \mathcal{F}^{0ij}(\bar{F}_l^k); \quad (34)$$

$$\mathcal{F}^{0ij}(\bar{F}_l^k) = \langle \mathcal{F}^{0ij}(\bar{F}_l^k + u^{k(1)}(\bar{F}_l^k, \xi^m))|_l \rangle. \quad (35)$$

Преобразование локальной задачи L_0 . Решение задачи (18)–(23) ищем в виде сумм девяти функций:

$$u^{k(1)} = \sum_{p,q=1}^3 u_{(pq)}^k; \quad (36)$$

$$u_{(pq)}^k = (\delta_q^p - \bar{F}_q^p) \delta_p^k \xi^q + U_{(pq)}^k(\xi^m), \quad (37)$$

где $U_{(pq)}^k(\xi^m)$ — некоторые новые неизвестные функции (псевдоперемещения); по p и q в (36) суммирования нет.

Подставляя (36), (37) в соотношения (20), (22) и (23), получаем, что

$$F_l^{k(0)} = \delta_l^k + \sum_{p,q=1}^3 U_{(pq)l}^k, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \left[[u^{k(1)}] \right]_i &= \sum_{p,q=1}^3 ((\delta_q^p - \bar{F}_q^p) \delta_p^k \left[[\xi^q] \right]_i + \left[[U_{(pq)}^k] \right]_i) = \\ &= (\delta_i^k - \bar{F}_i^k) + \sum_{p,q=1}^3 \left[[U_{(pq)}^k] \right]_i = 0, \end{aligned}$$

так как $\left[[\xi^q] \right]_i = \delta_i^q$. Тогда после подстановки формул (36) и (37) в задачу L_0 получим серию из шести локальных задач L_{pq} относительно функций $U_{(pq)}^k(\xi^m)$:

$$P^{ij(0)}|_i = 0, \quad (39)$$

$$P^{ij(0)} = \mathcal{F}^{0ij(n)}(F_l^{k(0)}, \xi^m); \quad (40)$$

$$F_l^{k(0)} = \delta_l^k + \sum_{p,q=1}^3 U_{(pq)l}^k; \quad (41)$$

$$n_i [P^{ij(0)}] = 0; [U_{(pq)}^k] = 0; \xi^i \in \Sigma_{\xi\alpha\beta}^0; \quad (42)$$

$$\left\langle U_{(pq)}^k \right\rangle = 0;$$

$$2 \left[[U_{(pq)}^k] \right]_i = (\bar{F}_p^k - \delta_p^k) \delta_{pi} + (\bar{F}_q^k - \delta_q^k) \delta_{qi}. \quad (43)$$

В силу нелинейности задачи (39)–(43) все шесть локальных задач L_{pq} являются связанными и решаются совместно.

Слоистые композиты с конечными деформациями. Рассмотрим в качестве примера слоистый композит, у которого ЯП представляет собой систему параллельных слоев, ортогональных к направлению $O\xi$ ($\xi^3 \equiv \xi$), границы раздела слоев обозначим как $\xi = \xi_\alpha$; $\alpha = 1, \dots, n-1$. Тогда локальная задача (39)–(43) принимает вид:

$$P^{3j(0)}|_{j3} = 0; \quad (44)$$

$$P^{ij(0)} = \mathcal{F}^{0ij(n)}(F_l^{k(0)}, \xi); \quad (45)$$

$$F_l^{k(0)}(X^i, \xi) = \bar{F}_l^k + u^{k(1)}|_{j3} \delta_{l3}; \quad (46)$$

$$[P^{3j(0)}] = 0, [u^{k(1)}] = 0; \xi = \xi_\alpha; \alpha = 1, \dots, n-1; \quad (47)$$

$$\left\langle u^{k(1)} \right\rangle = 0; \quad (48)$$

$$\left[[u^{k(1)}] \right]_3 = 0. \quad (49)$$

Эта задача является нелинейной, одномерной, в ней все функции зависят только от ξ , поэтому можно найти формальное решение этой задачи.

Интегрируя уравнения равновесия (48), получаем, что напряжения $P^{3j(0)}$ постоянны в ЯП:

$$P^{3j(0)} = C^j = \text{const}, \quad (50)$$

где C^j — постоянные интегрирования.

Из уравнения (46) следует, что среди девяти компонент градиента деформаций $F_l^{k(0)}$ от координаты ξ зависят только три компоненты $F_3^{k(0)}$, а остальные шесть совпадают с компонентами осредненного градиента:

$$F_3^{k(0)} = \bar{F}_3^k + u^{k(1)}|_{j3}; F_L^{k(0)} = \bar{F}_L^k, L = 1, 2. \quad (51)$$

Подставляя (51) в (50), получаем систему трех нелинейных алгебраических уравнений, которую можно рассматривать относительно трех компонент $F_3^{k(0)}$:

$$C^j = \mathcal{F}^{03j(n)}(F_3^{k(0)}, \bar{F}_L^k, \xi). \quad (52)$$

Формальное решение этой системы может быть представлено в виде

$$F_3^{k(0)} = \mathcal{G}^k(C^j, \bar{F}_L^k, \xi). \quad (53)$$

Подставляя в формулу (53) выражение (51), получаем систему трех обыкновенных линейных дифференциальных уравнений относительно перемещений $u^{k(1)}$, которую легко интегрируем с учетом условия нормировки (48):

$$\begin{aligned} u^{k(1)} &= \int_{-0,5}^{\xi} \mathcal{G}^k(C^j, \bar{F}_L^k, \xi) d\xi - \bar{F}_3^k \xi - \\ &- \left\langle \int_{-0,5}^{\xi} \mathcal{G}^k(C^j, \bar{F}_L^k, \xi) d\xi \right\rangle. \end{aligned} \quad (54)$$

После подстановки выражения (54) в условие периодичности (49) получаем следующее уравнение:

$$\left\langle \mathcal{G}^k(C^j, \bar{F}_L^k, \xi^m) \right\rangle = \bar{F}_3^k, \quad (55)$$

которое можно рассматривать как нелинейное алгебраическое уравнение относительно констант C^j . Запишем формальное решение этого уравнения в виде

$$C^j = \mathcal{S}^j(\bar{F}_3^k, \bar{F}_L^k). \quad (56)$$

Из (46), (54) и (56) находим соотношение между градиентом $F_l^{k(0)}$ и осредненным градиентом \bar{F}_l^k :

$$F_l^{k(0)} = \bar{F}_l^k + (\mathcal{G}^k(\mathcal{S}^j(\bar{F}_3^k, \bar{F}_L^k), \bar{F}_L^k, \xi) - \bar{F}_3^k) \delta_{l3}. \quad (57)$$

Подставляя выражение (57) в (45) и интегрируя его по ЯП, получаем эффективные определяющие соотношения для слоистого композита:

$$\bar{P}^{ij} = \mathcal{F}^{0ij(n)}(\bar{F}_m^k). \quad (58)$$

Здесь обозначены средние напряжения и осредненная функция определяющих соотношений:

$$\begin{aligned} \bar{P}^{ij} = < P^{ij(0)} >; \\ \mathcal{F}^{0ij(n)}(\bar{F}_m^k) = < \mathcal{F}^{0ij(n)}(\bar{F}_l^k + \\ + (\mathcal{G}^k(\mathcal{S}^j(\bar{F}_3^k, \bar{F}^k), \bar{F}_l^k, \xi) - \bar{F}_3^k) \delta_{l3}, \xi) >. \end{aligned} \quad (59)$$

Для численной реализации определяющих соотношений необходимо решить системы нелинейных алгебраических уравнений (52) и (55). С этой целью был применен метод многомерной оптимизации, основанный на процедуре покоординатного спуска.

В качестве примера был рассмотрен случай, когда все слои композита соответствуют квадратичной модели A_v [17, 18] (полулинейная модель Джона). При этом определяющие соотношения (6) всех слоев принимают вид

$$\mathcal{F}^{0ij(V)} = (l_1 I_1 \delta^{is} + 2l_2 C^{is(V)}) F^j_s, \quad (60)$$

где $l_1(\xi)$, $l_2(\xi)$ — константы модели, различные для каждого слоя композита; $I_1 = I_1(C^{is(V)})$ — первый инвариант тензора деформаций Коши — Грина C^i_k , для которого выполняются соотношения [18]

$$C^{is(V)} = \frac{1}{2} (F^m_j F^l_k \delta_{ml} \delta^{ij} \delta^{sk} - \delta^{is}). \quad (61)$$

Для модели материала A_v были проведены численные расчеты согласно разработанному методу. С помощью описанного выше алгоритма для отдельных слоев композита с двумя раз-

личными наборами упругих констант: слои 1 и 3:

$$l_1 = 100 \text{ МПа}; \quad l_2 = 50 \text{ МПа};$$

слой 2:

$$l_1 = 20 \text{ МПа}; \quad l_2 = 10 \text{ МПа}$$

при соотношении слоев $h_1 = h_3 = 0,3$; $h_2 = 1 - 2h_1$.

Построены графики функций (58) для компоненты осредненного тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа \bar{P}_{33} в зависимости от компоненты \bar{F}_{33} осредненного градиента деформаций (рис. 1, а). Остальные компоненты осредненного градиента задавали в соответствии с условиями одноосного деформирования: $\bar{F}_{11} = \bar{F}_{22} = 1$; $\bar{F}_{ij} = 0$, $i \neq j$. По боковым поверхностям ($x_1 = x_2 = \text{const}$) композит скользит без изменения линейных размеров.

Расчеты проводили для трех значений соотношения слоев: 1) $h_1 = h_3 = 0,3$; 2) $h_1 = 0$; 3) $h_1 = 0,5$. Случаи $h_1 = 0$ и $h_1 = 0,5$ отвечают гомогенным материалам с характеристиками первого или второго слоя соответственно.

На рис. 1, б показаны графики функций (59) для компоненты осредненного тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа \bar{P}_{13} в зависимости от компоненты \bar{F}_{13} осредненного градиента деформаций, которая изменялась в диапазоне от 0 до 0,5. Для остальных компонент осредненного градиента принимали начальные значения: $\bar{F}_{11} = \bar{F}_{22} = \bar{F}_{33} = 1$; $\bar{F}_{ij} = 0$, $i \neq j$. Такие значения соответствуют условиям чистого сдвига [18, 19] слоистого композита в плоскости Ox_1x_3 .

Графики функций (59) для двух нормальных компонент осредненного тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа \bar{P}_{33} и \bar{P}_{11} в зависимости от компоненты \bar{F}_{33} при одноосном деформировании показаны на рис. 2. На рис. 3 представлены графики изменения компонент напряжений осредненного тензора напряжений Пиолы —

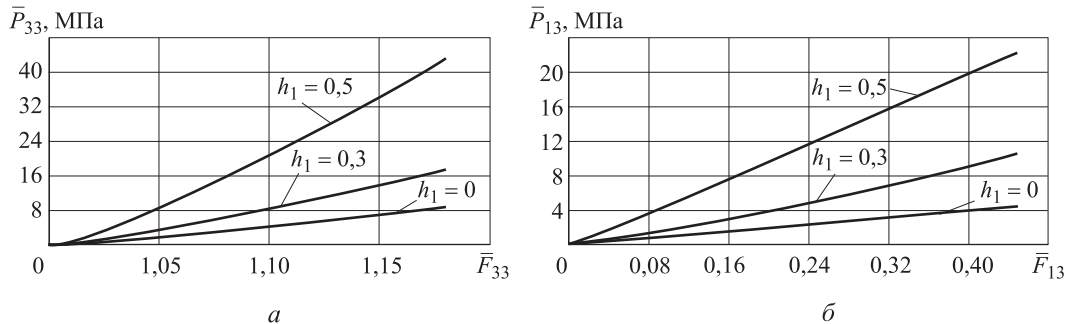


Рис. 1. Диаграммы деформирования $\bar{P}_{33}(\bar{F}_{33})$ (а) и $\bar{P}_{13}(\bar{F}_{13})$ (б) для трехслойного композита при различных относительных толщинах первого слоя

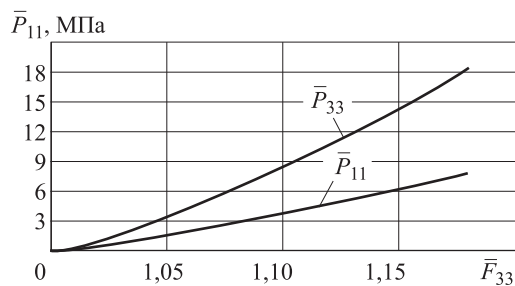


Рис. 2. Диаграммы деформирования $\bar{P}_{33}(\bar{F}_{33})$ и $\bar{P}_{11}(\bar{F}_{33})$ для трехслойного композита

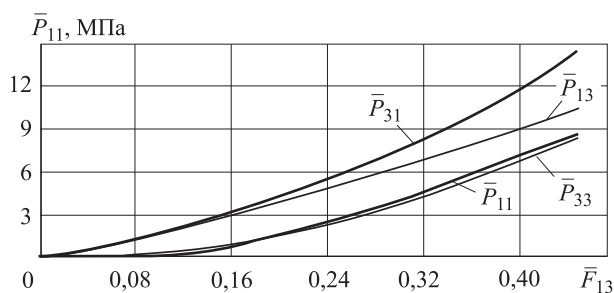


Рис. 3. Изменение компонент напряжений осредненного тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа $\bar{P}_{13}(\bar{F}_{13})$, $\bar{P}_{31}(\bar{F}_{13})$, $\bar{P}_{33}(\bar{F}_{13})$ и $\bar{P}_{11}(\bar{F}_{13})$ при чистом сдвиге слоистого композита с ЯП из трех слоев

Кирхгофа $\bar{P}_{13}(\bar{F}_{13})$, $\bar{P}_{31}(\bar{F}_{13})$, $\bar{P}_{33}(\bar{F}_{13})$ и $\bar{P}_{11}(\bar{F}_{13})$ при чистом сдвиге слоистого композита с ЯП из трех слоев. Эффект наличия ненулевых нормальных напряжений $\bar{P}_{33}(\bar{F}_{13})$ и $\bar{P}_{11}(\bar{F}_{13})$ при чистом сдвиге упругих сред с конечными деформациями хорошо известен [19]. До определенного значения $\bar{F}_{13} \approx 0,18$ напряжение \bar{P}_{11} меньше напряжения \bar{P}_{33} , а при $\bar{F}_{13} > 0,18$ соотношение между ними изменяется. При возрастании сдвиговой компоненты \bar{F}_{13} возрастает

различие несимметрии компонент тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа \bar{P}_{13} и \bar{P}_{31} .

Выводы

1. Для нелинейно-упругих композитов с конечными деформациями и периодической структурой разработан метод асимптотического осреднения по малому геометрическому параметру. Определяющие соотношения отдельных фаз композита выбраны в виде универсальных моделей A_n нелинейно-упругих сред. Эти модели включают широкий класс различных определяющих соотношений для сред с конечными деформациями, в том числе многие соотношения для многих классических моделей. Сформулированы локальные и осредненная задача нелинейной упругости, а также разработан алгоритм нахождения эффективных определяющих соотношений для композиционного материала в целом.

2. Для слоистых композиционных материалов с конечными деформациями предложен численный алгоритм решения задачи на ячейке периодичности, основанный на процедуре вложенной оптимизации, которая применяется для решения систем нелинейных алгебраических уравнений.

Показано, что разработанный алгоритм позволяет рассчитывать эффективные диаграммы деформирования слоистых композитов с конечными деформациями, связывающие компоненты осредненных тензоров напряжений Пиолы — Кирхгофа и градиента деформаций.

Литература

- [1] Yang Q., Xu F. Numerical Modeling of Nonlinear Deformation of Polymer Composites Based on Hyperelastic Constitutive Law. *Frontiers of Mechanical Engineering in China*, 2009, vol. 4, is. 3, pp. 284–288.
- [2] Aboudi J. Finite Strain Micromechanical Modeling of Multiphase Composites. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2008, vol. 6, is. 5, pp. 411–434.
- [3] Zhang B., Yu X., Gu B. Micromechanical Modeling of Large Deformation in Sepiolite Reinforced Rubber Sealing Composites under Transverse Tension. *Polymer Composites*, 2015, doi: 10.1002/pc.23596.
- [4] Ge Q., Luo X., Iversen C.B., Nejad H.B., Mather P.T., Dunn M.L., Jerry Qi H. A Finite Deformation Thermomechanical Constitutive Model for Triple Shape Polymeric Composites Based on Dual Thermal Transitions. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, vol. 51, pp. 2777–2790.
- [5] Christensen R.M. *Mechanics of composite materials*. New York, John Wiley&Sons, 1979. 324 p.
- [6] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов*. Москва, Наука, 1984. 356 с.

- [7] Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. Москва, Изд-во МГУ, 1984. 324 с.
- [8] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Многомасштабное моделирование упругих композиционных материалов. *Математическое моделирование*, 2012, т. 24, № 5, с. 3–20.
- [9] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Численное моделирование композиционных материалов с многоуровневой структурой. *Известия Российской академии наук. Серия физическая*, 2011, т. 75, № 11, с. 1549–1554.
- [10] Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Соколов А.П. Численное моделирование микроразрушения и прочностных характеристик пространственно-армированных композитов. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2013, т. 19, № 3, с. 365–383.
- [11] Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Соколов А.П., Садовничий Д.Н., Гафаров Б.Р. Численное и экспериментальное моделирование прочностных характеристик сферопластиков. *Композиты и наноструктуры*, 2013, № 3, с. 35–51.
- [12] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1. с. 36–57.
- [13] Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория термоупругости многослойных композитных пластин. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2014, т. 20, № 2, с. 260–282.
- [14] Димитриенко Ю.И., Яковлев Н.О., Ерасов В.С., Федонюк Н.Н., Сборщиков С.В., Губарева Е.А., Крылов В.Д., Григорьев М.М., Прозоровский А.А. Разработка многослойного полимерного композиционного материала с дискретным конструктивно-ортотропным наполнителем. *Композиты и наноструктуры*, 2014, т. 6, № 1. с. 32–48.
- [15] Димитриенко Ю.И., Федонюк Н.Н., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Прозоровский А.А. Многомасштабное конечно-элементное моделирование трехслойных сотовых композитных конструкций. *Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2014, № 7, с. 243–265. URL: <http://technomag.bmstu.ru/en/doc/717805.html>. Doi: 10.7463/0714.0717805.
- [16] Димитриенко Ю.И., Даштиев И.З. Модели вязкоупругого поведения эластомеров при конечных деформациях. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2001, №1, с. 21–41.
- [17] Dimitrienko Yu.I. *Nonlinear Continuum Mechanics and Large Inelastic Deformations*. Springer, 2010. 722 p.
- [18] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 2: Универсальные законы механики и электродинамики сплошной среды*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 560 с.
- [19] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 4: Основы механики твердого тела*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. 624 с.

References

- [1] Yang Q., Xu F. Numerical Modeling of Nonlinear Deformation of Polymer Composites Based on Hyperelastic Constitutive Law. *Frontiers of Mechanical Engineering in China*, 2009, vol. 4, is. 3, pp. 284–288.
- [2] Aboudi J. Finite Strain Micromechanical Modeling of Multiphase Composites. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2008, vol. 6, is. 5, pp. 411–434.
- [3] Zhang B., Yu X., Gu B. Micromechanical Modeling of Large Deformation in Sepiolite Reinforced Rubber Sealing Composites under Transverse Tension. *Polymer Composites*, 2015, doi: 10.1002/pc.23596.
- [4] Ge Q., Luo X., Iversen C.B., Nejad H.B., Mather P.T., Dunn M.L., Jerry Qi H. A Finite Deformation Thermomechanical Constitutive Model for Triple Shape Polymeric Composites Based on Dual Thermal Transitions. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, vol. 51, pp. 2777–2790.
- [5] Christensen R.M. *Mechanics of composite materials*. New York, John Wiley&Sons, 1979. 324 p.
- [6] Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh. Matematicheskie zadachi mekhaniki kompozitsionnykh materialov* [Averaging processes in pe-

- riodic media. Mathematical problems in the mechanics of composite materials]. Moscow, Nauka publ., 1984. 356 p.
- [7] Pobedria B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow, MSU publ., 1984. 324 p.
- [8] Dimitrienko Iu.I., Sokolov A.P. Mnogomasshtabnoe modelirovanie uprugikh kompozitsionnykh materialov [Multiscale modeling of elastic composite materials]. *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical Models and Computer Simulations]. 2012, vol. 24, no. 5, pp. 3–20.
- [9] Dimitrienko Y.I., Sokolov A.P. Numerical modeling of composites with multiscale microstructure. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*, 2011, vol. 75, no. 11, pp. 1457–1461.
- [10] Dimitrienko Iu.I., Sborshchikov S.V., Sokolov A.P. Chislennoe modelirovanie mikrorazrusheniia i prochnostnykh kharakteristik prostranstvenno-armirovannykh kompozitov [Computational modeling of microdestruction and strength of multidimensional reinforced composites]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii* [Journal on Composite Mechanics and Design]. 2013, vol. 19, no. 3, pp. 365–383.
- [11] Dimitrienko Iu.I., Sborshchikov S.V., Sokolov A.P., Sadovnichii D.N., Gafarov B.R. Chislennoe i eksperimental'noe modelirovanie prochnostnykh kharakteristik sferoplastikov [Computer and experimental study modeling of failure of micro-sphere filled composite]. *Kompozity i nanostrukтуры* [Journal Composites and Nanostructures]. 2013, no. 3, pp. 35–51.
- [12] Dimitrienko Iu.I., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V. Asimptoticheskaia teoriia konstruktivno-ortotropnykh plastin s dvukhperiodicheskoi strukturoi [Asymptotic theory of constructive-orthotropic plates with two-periodic structures]. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody* [Mathematical modeling and computational methods]. 2014, no. 1, pp. 36–57.
- [13] Dimitrienko Iu.I., Iakovlev D.O. Asimptoticheskaia teoriia termouprugosti mnogosloinykh kompozitnykh plastin [Asymptotic Theory of Thermoelasticity of Multilayer Composite Plates]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii* [Journal on Composite Mechanics and Design]. 2014, vol. 20, no. 2, pp. 260–282.
- [14] Dimitrienko Iu.I., Iakovlev N.O., Erasov V.S., Fedoniuk N.N., Sborshchikov S.V., Gubareva E.A., Krylov V.D., Grigor'ev M.M., Prozorovskii A.A. Razrabotka mnogosloinogo polimernogo kompozitsionnogo materiala s diskretnym konstruktivno-ortotropnym zapolnitelem [Development of a multilayer polymer composite material with discrete structural-orthotropic fillers]. *Kompozity i nanostrukтуры* [Journal Composites and Nanostructures]. 2014, vol. 6, no. 1, pp. 32–48.
- [15] Dimitrienko Iu.I., Fedoniuk N.N., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V., Prozorovskii A.A. Mnogomasshtabnoe konechno-elementnoe modelirovanie trekhslonnykh sotovykh kompozitnykh konstruksii [Multiscale Finite-Element Modeling of Sandwich Honeycomb Composite Structures]. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Bauman* [Science and Education. Bauman MSTU]. 2014, no. 7, pp. 243–265. Available at: <http://technomag.bmstu.ru/en/doc/717805.html>. Doi: 10.7463/0714.0717805.
- [16] Dimitrienko Iu.I., Dashtiev I.Z. Modeli viazkouprugogo povedeniia elastomerov pri konechnykh deformatsiiakh [Models of Viscoelastic Behaviour of Elastomers with Finite Strains]. *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Ser. Estestvennyye nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences]. 2001, no. 1, pp. 21–41.
- [17] Dimitrienko Yu.I. *Nonlinear Continuum Mechanics and Large Inelastic Deformations*. Springer, 2010. 722 p.
- [18] Dimitrienko Iu.I. *Universal'nye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoi sredy. Mekhanika sploshnoi sredy* [Universal laws of mechanics and electrodynamics of continuous media. Continuum Mechanics]. Vol. 2. Moscow, Bauman Press, 2011. 560 p.
- [19] Dimitrienko Iu.I. *Osnovy mekhaniki tverdogo tela. Mekhanika sploshnoi sredy* [Fundamentals of solid mechanics. Continuum Mechanics]. Vol. 4. Moscow, Bauman Press, 2013. 624 p.

Информация об авторе

ДИМИТРИЕНКО Юрий Иванович (Москва) — доктор физико-математических наук, профессор, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» (НОЦ «СИМПЛЕКС»); зав. кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com).

Information about the author

DIMITRIENKO Yuriy Ivanovich (Moscow) — Doctor of Science (Phys. & Math.), Professor, Director of Scientific and Educational Center of Supercomputer Engineering Modeling and Software Development (SIMPLEX), Head of Department, Computational Mathematics and Mathematical Physics. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com).



В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана
вышло в свет учебное пособие
А.Б. Красовского

«Основы электропривода»

Кратко изложены основы теории современного автоматизированного электропривода. Рассмотрены принципы построения и составные части электроприводов, их характеристики в статических и динамических режимах работы с двигателями постоянного и переменного тока, а также основные принципы управления и проектирования.

Учебное пособие ориентировано прежде всего на студентов вузов неэлектротехнических специальностей, поэтому в отличие от большинства книг по основам электропривода, содержит дополнительные разделы по общим вопросам электромеханического преобразования энергии, принципам работы и особенностям конструкции основных типов электрических машин, силовой электронике.

По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;
press@bmstu.ru; www.baumanpress.ru