

УДК 531.134

DOI 10.18698/0536-1044-2016-2-11-19

# О выборе параметров механизма Беннетта и моделировании его в MATLAB

**М.Л. Иоффе**

США, Нью-Йорк, 2 Авеню, д. 444

## On the Choice of Parameters of the Bennett Mechanism and Modelling It in MATLAB

**M.L. Ioffe**444, 2<sup>nd</sup> Avenue, New York, USAe-mail: [ioffe.mark@gmail.com](mailto:ioffe.mark@gmail.com)

**i** Рассмотрен подход к анализу так называемого механизма Беннетта, представляющего собой пространственный механизм, состоящий из четырех звеньев, связанных плоскими шарнирами. С точки зрения математического аппарата и практического применения предлагаемый подход значительно проще других, описанных в научной литературе. При реализации такого механизма существенное значение имеет выбор параметров, обеспечивающих его мобильность, поскольку число степеней свободы механизма отрицательно. Предложен метод анализа механизма и выбора его параметров, включающий в себя два подхода, в основе которых лежат соответственно обобщенные координаты и скорости. С помощью такого метода получены параметры механизма, существенно отличающиеся от предложенных Беннеттом. Разработана модель кинематики механизма в среде MATLAB.

**Ключевые слова:** кинематика механизмов, пространственный четырехзвенный механизм, механизм Беннетта, число степеней свободы, мобильность, обобщенные координаты, уравнения связи, матрица направляющих косинусов, MATLAB.

**i** The article deals with the analysis of the so-called Bennett mechanism representing a four-link mechanism consisting of four links connected by flat hinges. From the point of view of mathematical apparatus and practical application, the approach proposed by the author is considerably simpler than those described in the literature. When such a mechanism is implemented, the choice of parameters that ensure its mobility plays a significant role as the number of degrees of freedom is negative. A method for the mechanism analysis and the choice of the mechanism parameters is proposed. The method comprises two approaches based on the generalized coordinates and the generalized velocities respectively. Using the proposed method, the author has obtained parameters of the mechanism that are essentially different from the ones proposed by Bennett. The kinematic model of the mechanism is developed in the MATLAB environment.

**Keywords:** kinematics of mechanisms, spatial four-link mechanism, Bennett mechanism, number of degrees of freedom, generalized coordinates, coupling equations, direction cosine matrix, MATLAB.

Рассмотрим пространственный четырехзвенный механизм, являющийся замкнутой механической цепью и состоящий из четырех абсолютно твердых тел, связанных плоскими вращательными шарнирами (рис. 1).

В соответствии с известной формулой число степеней свободы такого механизма равно  $3 \cdot 6 - 4 \cdot 5 = -2$ . Это объясняется тем, что четыре обобщенные координаты — углы поворота в шарнирах — должны удовлетворять шести

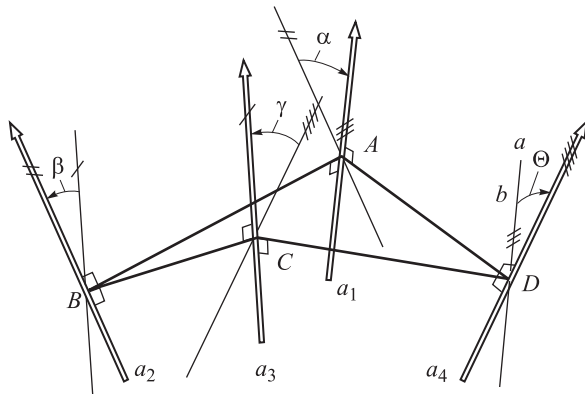


Рис. 1. Пространственный четырехзвенный механизм

уравнениям связи, вытекающим из того, что координаты точки  $D$ , находящейся на неподвижном теле известны (три уравнения), и из того, что в результате четырех поворотов относительно четырех осей снова получается трехгранник, жестко связанный с неподвижным телом (три уравнения). Таким образом, в общем случае механизм не обладает мобильностью (подвижностью) и для ее получения его параметры механизма должны удовлетворять некоторым условиям.

Впервые рассмотренный механизм, обладающий мобильностью [1], был предложен английским математиком Дж.Г. Беннеттом, который изложил его геометрическую теорию в работе [2]. В ней были рассмотрены три возможных случая существования в таком механизме мобильности, причем с одной степенью свободы. В первом случае все оси шарниров параллельны, во втором оси пересекаются в одной точке. Третий случай — наиболее интересный и открытый автором — относится к механизму, у которого на каждой из осей существует по точке, в которой соответствующая ось перпендикулярна отрезкам прямых, соединяющих эту точку с точками, лежащими на последующей и предыдущей осях. Указанные точки вместе с соединяющими их отрезками и образуют Skew Isogram — пространственный четырехугольник, у которого противоположные стороны равны. Теории механизма Беннетта посвящено значительное число работ [3–7]. В последнее время интерес к нему усилился вследствие возрастающей роли робототехники, где механизмы с параметрической мобильностью находят все большее распространение.

В известных работах анализируется лишь предложенный Беннеттом способ обеспечения

мобильности и соответствующий ему выбор параметров, т. е. указанный третий случай. В зарубежных работах для анализа и синтеза механизма применяется достаточно громоздкий математический аппарат, с помощью которого сложно получить практические результаты. Например, в работе [5] авторы используют дуальные кватернионы и подпространства 7-мерного проективного пространства. Кроме того, в научных трудах отсутствуют четко сформулированные условия, обеспечивающие его мобильность.

Проанализируем условия, которым должны удовлетворять параметры механизма для обеспечения его мобильности. Математически механизм определяется четырьмя векторами  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{AD}$ , которые соединяют точки, принадлежащие подвижным телам, и расположены на осях вращения и четырьмя единичными векторами  $\overline{l}_1$ ,  $\overline{l}_2$ ,  $\overline{l}_3$ ,  $\overline{l}_4$ , определяющими оси вращения. На рис. 1 показаны точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , а векторам  $\overline{l}_1$ ,  $\overline{l}_2$ ,  $\overline{l}_3$ ,  $\overline{l}_4$  соответствуют оси  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$ . Все перечисленные векторы заданы своими проекциями на связанные с вращающимися телами оси, т. е. в процессе движения изменения значений углов поворота в шарнирах остаются постоянными. Полагаем, что при нулевых углах связанные с подвижными телами трехгранники совпадают друг с другом и с неподвижным трехгранником. Точки  $A$  и  $D$  расположены на неподвижном теле. Таким образом, в качестве параметров механизма можно принять проекции указанных векторов, а в качестве обобщенных координат — углы поворота в шарнирах  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ ,  $\varphi_4$ . Условия, накладываемые на параметры механизма для обеспечения его мобильности — это условия, накладываемые на проекции указанных восьми векторов.

Существуют два подхода к определению условий мобильности рассматриваемого механизма. В первом из них анализируются условия, при которых уравнения, связывающие обобщенные координаты механизма — углы поворота в шарнирах — имеют решения, т. е. для произвольного значения одного из углов можно однозначно вычислить значения трех других. Во втором подходе рассматриваются ограничения, накладываемые на скорости, т. е. первые производные углов поворота, обусловлены тем, что две оси механизма расположены на неподвижном основании.

Рассматриваемый механизм (см. рис. 1) описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \overline{AD} &= \left[ \overline{AB} + (\overline{BC} + \overline{CDT}_{x_2/x_3}) T_{x_1/x_2} \right] T_{X/x_1}; \\ \frac{dT_{X/x_1}}{dt} &= \frac{d\varphi_1}{dt} \begin{pmatrix} 0 & \overline{l}_z^1 & -\overline{l}_y^1 \\ -\overline{l}_z^1 & 0 & \overline{l}_x^1 \\ \overline{l}_y^1 & -\overline{l}_x^1 & 0 \end{pmatrix} T_{X/x_1}; \\ \frac{dT_{x_1/x_2}}{dt} &= \frac{d\varphi_2}{dt} \begin{pmatrix} 0 & \overline{l}_z^2 & -\overline{l}_y^2 \\ -\overline{l}_z^2 & 0 & \overline{l}_x^2 \\ \overline{l}_y^2 & -\overline{l}_x^2 & 0 \end{pmatrix} T_{x_1/x_2}; \\ \frac{dT_{x_2/x_3}}{dt} &= \frac{d\varphi_3}{dt} \begin{pmatrix} 0 & \overline{l}_z^3 & -\overline{l}_y^3 \\ -\overline{l}_z^3 & 0 & \overline{l}_x^3 \\ \overline{l}_y^3 & -\overline{l}_x^3 & 0 \end{pmatrix} T_{x_2/x_3}; \\ \frac{dT_{x_3/x_4}}{dt} &= \frac{d\varphi_4}{dt} \begin{pmatrix} 0 & \overline{l}_z^4 & -\overline{l}_y^4 \\ -\overline{l}_z^4 & 0 & \overline{l}_x^4 \\ \overline{l}_y^4 & -\overline{l}_x^4 & 0 \end{pmatrix} T_{x_3/x_4}; \\ T_{x_3/x_4} T_{x_2/x_3} T_{x_1/x_2} T_{X/x_1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $T_{X/x_1}, T_{x_1/x_2}, T_{x_2/x_3}, T_{x_3/x_4}$  — матрицы перехода соответствующих трехгранников.

При постоянной угловой скорости дифференциальное уравнение

$$\frac{dT_{X/x}}{dt} = \omega \begin{pmatrix} 0 & \overline{l}_z & -\overline{l}_y \\ -\overline{l}_z & 0 & \overline{l}_x \\ \overline{l}_y & -\overline{l}_x & 0 \end{pmatrix} T_{X/x} = \omega L T_{X/x}$$

с начальным условием

$$\frac{dT_{X/x}(0)}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

имеет решение

$$T_{X/x} = E + L \sin \omega t + L^2 (1 - \cos \omega t). \quad (2)$$

В первом подходе при заданных параметрах механизма, обеспечивающих его мобильность, необходимо, задавшись значением угла  $\varphi_1$ , определить углы  $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ , удовлетворяющие первому и последнему уравнениям системы (1). Первое векторное уравнение является системой трех уравнений с тремя неизвестными, которое благодаря выбранным параметрам имеет решение. Определив из него углы  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , из последнего уравнения системы (1) найдем угол  $\varphi_4$ .

Рассмотрим второй подход, позволяющий выбрать параметры для обеспечения мобильности.

Скорость точки  $D$  согласно системе (1) определяется выражением

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{AD}}{dt} &= \frac{d\varphi_1}{dt} \left[ \overline{AB} + (\overline{BC} + \overline{CDT}_{x_2/x_3}) T_{x_1/x_2} \right] \times \\ &\times \begin{pmatrix} 0 & \overline{l}_z^1 & -\overline{l}_y^1 \\ -\overline{l}_z^1 & 0 & \overline{l}_x^1 \\ \overline{l}_y^1 & -\overline{l}_x^1 & 0 \end{pmatrix} T_{X/x_1} + \frac{d\varphi_2}{dt} (\overline{BC} + \overline{CDT}_{x_2/x_3}) \times \\ &\times \begin{pmatrix} 0 & \overline{l}_z^2 & -\overline{l}_y^2 \\ -\overline{l}_z^2 & 0 & \overline{l}_x^2 \\ \overline{l}_y^2 & -\overline{l}_x^2 & 0 \end{pmatrix} T_{x_1/x_2} T_{X/x_1} + \\ &+ \frac{d\varphi_3}{dt} \overline{CD} \begin{pmatrix} 0 & \overline{l}_z^3 & -\overline{l}_y^3 \\ -\overline{l}_z^3 & 0 & \overline{l}_x^3 \\ \overline{l}_y^3 & -\overline{l}_x^3 & 0 \end{pmatrix} T_{x_2/x_3} T_{x_1/x_2} T_{X/x_1} = \overline{0}. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение (3) представим в виде следующей однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{AD}}{dt} &= \frac{d\varphi_1}{dt} \overline{H}_1 + \frac{d\varphi_2}{dt} \overline{H}_2 + \frac{d\varphi_3}{dt} \overline{H}_3 = \overline{0}; \\ \overline{H}_1 &= \left[ \overline{AB} + (\overline{BC} + \overline{CDT}_{x_2/x_3}) \right] T_{x_1/x_2} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 0 & \overline{l}_z^1 & -\overline{l}_y^1 \\ -\overline{l}_z^1 & 0 & \overline{l}_x^1 \\ \overline{l}_y^1 & -\overline{l}_x^1 & 0 \end{pmatrix} T_{X/x_1}; \\ \overline{H}_2 &= (\overline{BC} + \overline{CDT}_{x_2/x_3}) \times \\ &\times \begin{pmatrix} 0 & \overline{l}_z^2 & -\overline{l}_y^2 \\ -\overline{l}_z^2 & 0 & \overline{l}_x^2 \\ \overline{l}_y^2 & -\overline{l}_x^2 & 0 \end{pmatrix} T_{x_1/x_2} T_{X/x_1}; \\ \overline{H}_3 &= \overline{CD} \begin{pmatrix} 0 & \overline{l}_z^3 & -\overline{l}_y^3 \\ -\overline{l}_z^3 & 0 & \overline{l}_x^3 \\ \overline{l}_y^3 & -\overline{l}_x^3 & 0 \end{pmatrix} T_{x_2/x_3} T_{x_1/x_2} T_{X/x_1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Эта система имеет ненулевые решения только в том случае, когда векторы  $\overline{H}_1, \overline{H}_2, \overline{H}_3$  линейно зависимы, т. е. справедливо равенство

$$(\overline{H}_1 \times \overline{H}_2) \overline{H}_3 = 0. \quad (5)$$

Если равенство (5) выполняется, то

$$\overline{H}_3 = \lambda_1 \overline{H}_1 + \lambda_2 \overline{H}_2. \quad (6)$$

Параметры  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  определяются выражениями

$$\lambda_1 = \frac{(\overline{H_3 H_1})(\overline{H_2 H_2}) - (\overline{H_3 H_2})(\overline{H_1 H_2})}{(\overline{H_1 H_2})(\overline{H_1 H_2}) - (\overline{H_1 H_1})(\overline{H_2 H_2})};$$

$$\lambda_2 = \frac{(\overline{H_3 H_2})(\overline{H_1 H_1}) - (\overline{H_3 H_1})(\overline{H_1 H_2})}{(\overline{H_1 H_2})(\overline{H_1 H_2}) - (\overline{H_1 H_1})(\overline{H_2 H_2})}. \quad (7)$$

Общее решение линейной системы имеет вид

$$\left( \frac{d\varphi_1}{dt}, \frac{d\varphi_2}{dt}, \frac{d\varphi_3}{dt} \right) = k(\lambda_1, \lambda_2, -1), \quad (8)$$

где  $k$  — произвольная постоянная.

Таким образом, если выбрать в качестве независимой скорости отношение  $d\varphi_1/dt$ , то две остальные скорости описываются соотношениями

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{d\varphi_1}{dt};$$

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = -\frac{1}{\lambda_1} \frac{d\varphi_1}{dt}. \quad (9)$$

Из системы уравнений (4) следует, что векторы  $\overline{H_1}, \overline{H_2}, \overline{H_3}$  зависят от параметров системы векторов  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{l_1}, \overline{l_2}, \overline{l_3}$  и углов поворота в шарнирах  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ . Как уже указывалось, в начальный момент времени углы  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  равняются нулю, а оси связанных трехгранников параллельны и одинаково направлены. В соответствии с системой уравнений (4) имеем выражения для векторов:

$$\overline{H_1} = (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}) \begin{pmatrix} 0 & \overline{l_z^1} & -\overline{l_y^1} \\ -\overline{l_z^1} & 0 & \overline{l_x^1} \\ \overline{l_y^1} & -\overline{l_x^1} & 0 \end{pmatrix};$$

$$\overline{H_2} = (\overline{BC} + \overline{CD}) \begin{pmatrix} 0 & \overline{l_z^2} & -\overline{l_y^2} \\ -\overline{l_z^2} & 0 & \overline{l_x^2} \\ \overline{l_y^2} & -\overline{l_x^2} & 0 \end{pmatrix}; \quad (10)$$

$$\overline{H_3} = \overline{CD} \begin{pmatrix} 0 & \overline{l_z^3} & -\overline{l_y^3} \\ -\overline{l_z^3} & 0 & \overline{l_x^3} \\ \overline{l_y^3} & -\overline{l_x^3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Приведенный анализ на уровне скоростей проводился с использованием матриц. Если ввести в рассмотрение вектор угловой скорости, то условия равенства нулю скорости точки  $D$  и угловой скорости неподвижного тела, на котором находятся первая и четвертая оси, можно описать следующими выражениями:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} \overline{l_1} + \frac{d\varphi_2}{dt} \overline{l_2} + \frac{d\varphi_3}{dt} \overline{l_3} + \frac{d\varphi_4}{dt} \overline{l_4} = 0; \quad (11)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} \overline{l_1} \times \overline{AD} + \frac{d\varphi_2}{dt} \overline{l_2} \times \overline{BD} + \frac{d\varphi_3}{dt} \overline{l_3} \times \overline{CD} = 0,$$

где  $\times$  — знак векторного произведения.

С помощью формул (11) можно показать, что когда оси шарниров пересекаются в одной точке, механизм обладает мобильностью. В этом случае второе векторное уравнение (11) следует из первого и справедливы следующие выражения:

$$\overline{AD} = x_1 \overline{l_1} - x_4 \overline{l_4};$$

$$\overline{BD} = x_2 \overline{l_2} - x_4 \overline{l_4}; \quad (12)$$

$$\overline{CD} = x_3 \overline{l_3} - x_4 \overline{l_4}.$$

Подставив выражения (12) во второе уравнение системы (11), получим

$$\frac{d\varphi_1}{dt} \overline{l_1} \times \overline{AD} + \frac{d\varphi_2}{dt} \overline{l_2} \times \overline{BD} + \frac{d\varphi_3}{dt} \overline{l_3} \times \overline{CD} =$$

$$= -x_4 \left( \frac{d\varphi_1}{dt} \overline{l_1} + \frac{d\varphi_2}{dt} \overline{l_2} + \frac{d\varphi_3}{dt} \overline{l_3} \right) \times \overline{l_4}. \quad (13)$$

В соответствии с первым уравнением системы (11)

$$\frac{d\varphi_1}{dt} \overline{l_1} + \frac{d\varphi_2}{dt} \overline{l_2} + \frac{d\varphi_3}{dt} \overline{l_3} = -\frac{d\varphi_4}{dt} \overline{l_4}. \quad (14)$$

Из выражений (13) и (14) непосредственно следует второе уравнение (11).

В отличие от подхода с непосредственным использованием обобщенных координат, где для нахождения углов необходимо решить алгебраическое уравнение, в подходе с использованием скоростей дифференциальные уравнения приходится решать с определением на каждом шаге условий выполнения мобильности (формула (5)). Однако для выбора параметров, обеспечивающих мобильность механизма, второй подход является предпочтительнее.

Следует отметить, что условия мобильности, анализируемые далее с целью выбора параметров механизма, рассмотрены лишь в начальном положении, при нулевых углах поворота, т. е. являются необходимыми. Рассмотрим один из возможных способов выбора параметров механизма Беннетта с использованием уравнений для скоростей. Этот механизм отличается своими параметрами от предложенных Беннеттом.

Два равенства системы (11) в совокупности составляют однородную систему шести линей-

ных уравнений с четырьмя неизвестными, производными четырех углов поворота по времени. Второе равенство является системой трех линейных уравнений с тремя неизвестными. В общем случае такая система имеет лишь нулевое решение. Если же параметры системы связаны некоторыми условиями, то она может иметь и ненулевое решение. Найдем эти условия.

Предположим, что три вектора

$$\begin{aligned} \bar{m}_1 &= \overline{AD}, \\ \bar{m}_2 &= \overline{BD}, \\ \bar{m}_3 &= \overline{CD} \end{aligned} \quad (15)$$

неколлинеарны.

Полагаем:

$$\begin{aligned} \bar{l}_1 &= x_1 \bar{m}_2 + y_1 \bar{m}_3; \\ \bar{l}_2 &= x_2 \bar{m}_1 + y_2 \bar{m}_3; \\ \bar{l}_3 &= x_3 \bar{m}_1 + y_3 \bar{m}_2. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставив выражения (16) и (15) в систему (11), получим

$$\begin{aligned} &\frac{d\varphi_1}{dt} (x_1 \bar{m}_2 + y_1 \bar{m}_3) \times \bar{m}_1 + \frac{d\varphi_2}{dt} (x_2 \bar{m}_1 + y_2 \bar{m}_3) \times \\ &\times \bar{m}_2 + \frac{d\varphi_3}{dt} (x_3 \bar{m}_1 + y_3 \bar{m}_2) \times \bar{m}_3 = 0; \\ &\frac{d\varphi_1}{dt} (-x_1 \bar{m}_1 \times \bar{m}_2 - y_1 \bar{m}_1 \times \bar{m}_3) + \\ &+ \frac{d\varphi_2}{dt} (x_2 \bar{m}_1 \times \bar{m}_2 - y_2 \bar{m}_2 \times \bar{m}_3) + \\ &+ \frac{d\varphi_3}{dt} (x_3 \bar{m}_1 \times \bar{m}_3 + y_3 \bar{m}_2 \times \bar{m}_3) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Необходимым и достаточным условием существования ненулевых производных углов, удовлетворяющих выражению (17), является линейная зависимость векторов — коэффициентов при этих производных, т. е.

$$\begin{aligned} &(-x_1 \bar{m}_1 \times \bar{m}_2 - y_1 \bar{m}_1 \times \bar{m}_3) \times \\ &\times (x_2 \bar{m}_1 \times \bar{m}_2 - y_2 \bar{m}_2 \times \bar{m}_3) * \\ &* (x_3 \bar{m}_1 \times \bar{m}_3 + y_3 \bar{m}_2 \times \bar{m}_3) = \\ &= (y_1 x_2 y_3 - x_1 y_2 x_3) [(\bar{m}_1 \times \bar{m}_2) * \bar{m}_3]^2, \end{aligned} \quad (18)$$

где \* — знак скалярного произведения.

Рассмотрим частный случай. Выберем параметры  $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ , удовлетворяющие следующим выражениям:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1; \\ x_3 &= y_1; \\ y_3 &= y_2. \end{aligned} \quad (19)$$

Эти значения удовлетворяют уравнению (18).

Подставив выражения (19) во второе уравнение (17), получим:

$$\begin{aligned} &\frac{d\varphi_1}{dt} \bar{n}_1 + \frac{d\varphi_2}{dt} \bar{n}_2 + \frac{d\varphi_3}{dt} \bar{n}_3 = 0; \\ &\bar{n}_1 = -x_1 \bar{m}_1 \times \bar{m}_2 - y_1 \bar{m}_1 \times \bar{m}_3; \\ &\bar{n}_2 = x_1 \bar{m}_1 \times \bar{m}_2 - y_2 \bar{m}_2 \times \bar{m}_3; \\ &\bar{n}_3 = y_1 \bar{m}_1 \times \bar{m}_3 + y_2 \bar{m}_2 \times \bar{m}_3; \\ &\bar{n}_1 + \bar{n}_2 + \bar{n}_3 = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, второе уравнение (17) справедливо при произвольной величине  $d\varphi_1/dt$  и при значениях двух других производных углов, равных

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_2}{dt} &= \frac{d\varphi_1}{dt}; \\ \frac{d\varphi_3}{dt} &= \frac{d\varphi_1}{dt}. \end{aligned} \quad (21)$$

Свободные параметры  $x_1, y_1, y_2$  определим из условия, что векторы  $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$  являются единичными. В соответствии с выражениями (16) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} x_1^2 \bar{m}_2^2 + y_1^2 \bar{m}_3^2 + 2x_1 y_1 \bar{m}_2 * \bar{m}_3 &= 1; \\ x_1^2 \bar{m}_1^2 + y_2^2 \bar{m}_3^2 + 2x_1 y_2 \bar{m}_1 * \bar{m}_3 &= 1; \\ y_1^2 \bar{m}_1^2 + y_2^2 \bar{m}_2^2 + 2y_1 y_2 \bar{m}_1 * \bar{m}_2 &= 1. \end{aligned} \quad (22)$$

Простейшее решение системы (22) получим, приняв следующие соотношения:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 = y_2 = x; \\ |\bar{m}_1| &= |\bar{m}_2| = |\bar{m}_3| = m; \\ \bar{m}_1 * \bar{m}_2 &= \bar{m}_1 * \bar{m}_3 = \bar{m}_2 * \bar{m}_3 = m^2 \cos \theta. \end{aligned} \quad (23)$$

Система (22) в этом случае будет справедлива при произвольных величинах  $m$  и  $\cos \theta$  и при значении  $x$ , равном

$$x = \frac{1}{m\sqrt{2(1+\cos\theta)}} = \frac{1}{2m\cos\theta/2}. \quad (24)$$

В соответствии с выражениями (16) получим

$$\begin{aligned} \bar{l}_1 &= x(\bar{m}_2 + \bar{m}_3); \\ \bar{l}_2 &= x(\bar{m}_1 + \bar{m}_3); \\ \bar{l}_3 &= x(\bar{m}_1 + \bar{m}_2). \end{aligned} \quad (25)$$

Векторы  $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3$  удовлетворяют уравнениям (23), а параметр  $x$  — уравнению (24). При этих условиях значение  $d\varphi_1/dt$  может быть произвольным, а значения двух других произ-

водных углов равняются этому значению. Значения  $d\varphi_1/dt$  и  $\bar{l}_4$  определим из первого уравнения (17):

$$2x \frac{d\varphi_1}{dt} (\bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \bar{m}_3) = -\frac{d\varphi_4}{dt} \bar{l}_4.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{l}_4 &= \frac{1}{\sqrt{3m\sqrt{1+2\cos\theta}}} (\bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \bar{m}_3); \\ \frac{d\varphi_4}{dt} &= 2x\sqrt{3m\sqrt{1+2\cos\theta}} \frac{d\varphi_1}{dt}. \end{aligned} \quad (26)$$

Рассмотрим пример механизма, параметры которого определяются формулами (25), (26) и следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \bar{m}_1 &= m(0, 0, 1); \\ \bar{m}_2 &= m(\sin\theta, 0, \cos\theta); \\ \bar{m}_3 &= m(\sin\theta\cos\beta, \sin\theta\sin\beta, \cos\theta); \\ \cos\beta &= \frac{\cos\theta - \cos^2\theta}{\sin^2\theta}. \end{aligned} \quad (27)$$

В этом случае имеем:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \bar{m}_1 - \bar{m}_2; \\ \overline{BC} &= \bar{m}_2 - \bar{m}_3; \\ \overline{CD} &= \bar{m}_3; \\ \overline{AD} &= \bar{m}_1; \\ \bar{l}_1 &= x(\bar{m}_2 + \bar{m}_3); \\ \bar{l}_2 &= x(\bar{m}_1 + \bar{m}_3); \\ \bar{l}_3 &= x(\bar{m}_1 + \bar{m}_2); \end{aligned}$$

$$x = \frac{1}{2m\cos\theta/2}.$$

Очевидно, что

$$\overline{H_1} + \overline{H_2} + \overline{H_3} = 0.$$

Тогда

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

и в соответствии с выражениями (9) получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_2}{dt} &= \frac{d\varphi_1}{dt}; \\ \frac{d\varphi_3}{dt} &= \frac{d\varphi_1}{dt}. \end{aligned} \quad (28)$$

Условие линейной зависимости выполняется в начальный момент и определяет параметры механизма. Однако не совсем ясно, будут ли они выполняться в следующие моменты времени.

Для решения этого вопроса используем модель механизма, созданную с помощью программного обеспечения MATLAB. В начальный момент времени положение механизма определяется формулами (27). Таким образом, механизм задается двумя параметрами:  $m$  и  $\theta$ . По ним находят векторы  $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3, \bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3, \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ . Начальные значения углов  $\varphi$  равняются нулю, а соответствующие матрицы перехода являются единичными. Полученные векторы определены своими проекциями относительно связанных со звеньями трехгранников и не меняются при движении механизма. Параметры механизма выбраны таким образом, что выполняется условие мобильности, т. е. векторы  $H_1, H_2, H_3$  линейно зависимы, система имеет одну степень свободы и мы можем задать угловую скорость первого звена произвольно. Две другие скорости будут при этом равняться первой. Определив параметры механизма, начальные условия и начальные угловые скорости, можно найти положение механизма через некоторый промежуток времени и проверить условие подвижности для этого нового положения. В случае его выполнения расчет можно продолжить, приняв новое положение в качестве начального. Таким образом, расчет проводится рекуррентно.

Рекуррентный расчет на каждом шаге заключается в следующем. Определяются матрицы  $T_{x/x_1}, T_{x_1/x_2}, T_{x_2/x_3}$  по следующим формулам:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{l}_z^1 & -\bar{l}_y^1 \\ -\bar{l}_z^1 & 0 & \bar{l}_x^1 \\ \bar{l}_y^1 & -\bar{l}_x^1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{l}_z^2 & -\bar{l}_y^2 \\ -\bar{l}_z^2 & 0 & \bar{l}_x^2 \\ \bar{l}_y^1 & -\bar{l}_x^1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{l}_z^3 & -\bar{l}_y^3 \\ -\bar{l}_z^3 & 0 & \bar{l}_x^3 \\ \bar{l}_y^3 & -\bar{l}_x^3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned}
 T_{X/x_1} &= \left\{ E + L_1 \sin\left(\frac{d\varphi_1}{dt} t\right) + \right. \\
 &+ \left. L_1^2 \left[ 1 - \cos\left(\frac{d\varphi_1}{dt} t\right) \right] \right\} T_{X/x_1}(0); \\
 T_{x_1/x_2} &= \left\{ E + L_2 \sin\left(\frac{d\varphi_2}{dt} t\right) + \right. \\
 &+ \left. L_2^2 \left[ 1 - \cos\left(\frac{d\varphi_2}{dt} t\right) \right] \right\} T_{x_1/x_2}(0); \\
 T_{x_2/x_3} &= \left\{ E + L_3 \sin\left(\frac{d\varphi_3}{dt} t\right) + \right. \\
 &+ \left. L_3^2 \left[ 1 - \cos\left(\frac{d\varphi_3}{dt} t\right) \right] \right\} T_{x_2/x_3}(0).
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

Вычисляются проекции векторов  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$  на оси неподвижного трехгранника  $OXYZ$ :

$$\begin{aligned}
 \overline{AB}^i &= \overline{AB} T_{X/x_1}; \\
 \overline{BC}^i &= \overline{BC} T_{x_1/x_2} T_{X/x_1}; \\
 \overline{CD}^i &= \overline{CD} T_{x_2/x_3} T_{x_1/x_2} T_{X/x_1}.
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

Определяются векторы  $\overline{H}_1, \overline{H}_2, \overline{H}_3$ :

$$\begin{aligned}
 \overline{H}_1 &= \left[ \overline{AB} + \left( \overline{BC} + \overline{CD} T_{x_2/x_3} \right) T_{x_1/x_2} \right] L_1 T_{X/x_1}; \\
 \overline{H}_2 &= \left( \overline{BC} + \overline{CD} T_{x_2/x_3} \right) L_2 T_{x_1/x_2} T_{X/x_1}; \\
 \overline{H}_3 &= \overline{CD} L_3 T_{x_2/x_3} T_{x_1/x_2} T_{X/x_1}.
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

Проверяется условие коллинеарности векторов  $\overline{H}_1, \overline{H}_2, \overline{H}_3$ , т. е. вычисляется тройное векторно-скалярное произведение

$$p = (\overline{H}_1 \times \overline{H}_2) * \overline{H}_3.
 \tag{32}$$

Если  $p = 0$ , то условие коллинеарности выполняется, т. е. механизм обладает подвижностью. В этом случае по формулам (7) и (8) вычисляются новые значения угловых скоростей. Параметры  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  можно определить также по формуле

$$(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} (\overline{H}_1 * \overline{H}_1) & (\overline{H}_1 * \overline{H}_2) \\ (\overline{H}_1 * \overline{H}_2) & (\overline{H}_2 * \overline{H}_2) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (\overline{H}_1 * \overline{H}_3) \\ (\overline{H}_2 * \overline{H}_3) \end{pmatrix}.
 \tag{33}$$

Рассмотренная рекуррентная модель была реализована в функции `bennett.m` программы MATLAB для механизма с параметрами  $m = 1$ ,  $\theta = \pi/4$ . Критичным для работы модели оказался выбор значение приращения угла на шаге вычисления, т. е. значение  $(d\varphi/dt)t$ . Проверка условия подвижности на каждом шаге состояла в проверке справедливости неравенства  $abs(p) \geq 1E-8$ . При таком значении порога максимальная величина приращения угла составила 0,000003. При большем значении условие мобильности благодаря погрешностям расчета не выполнялось уже после первого шага. Процесс вычисления оказался достаточно медленным и для получения конечного значения пер-

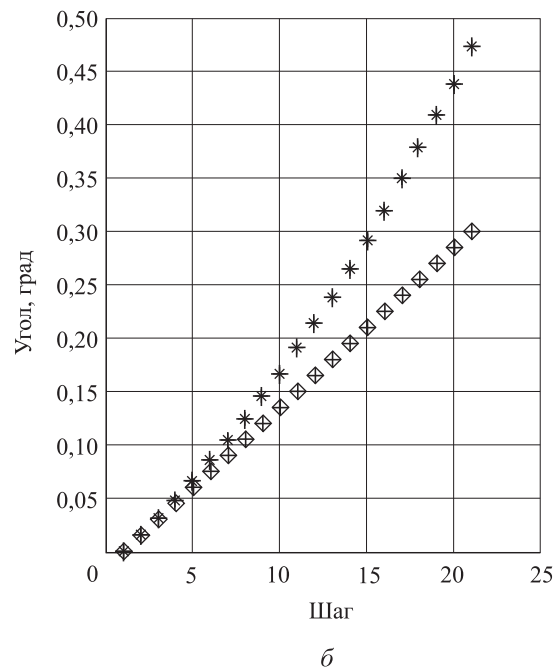
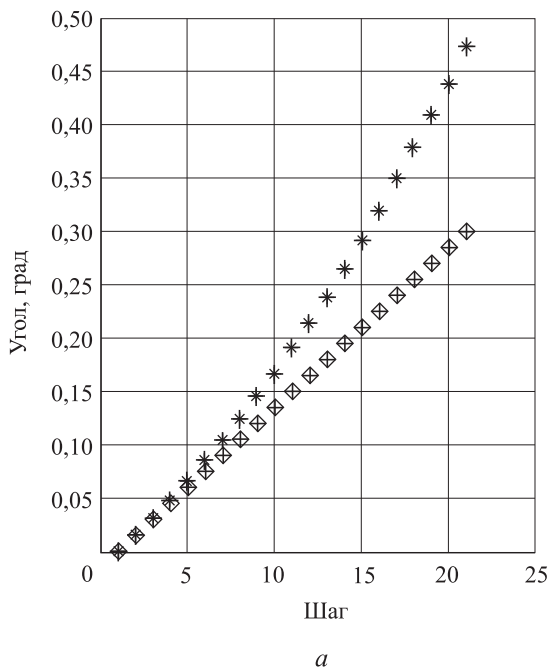


Рис. 2. Углы поворота  $\varphi_1$  (+),  $\varphi_2$  (\*),  $\varphi_3$  (◇) механизма Беннетта, полученные при рекуррентном (а) и нереккуррентном (б) расчетах

вого угла, равного 0,3, понадобилось 100 000 шагов.

Результаты расчета трех углов  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  механизма Беннетта приведены на рис. 2, а. По оси абсцисс отложены прореженные номера шагов, т. е. из общего числа 100 000 взят равномерно 21 шаг. По оси ординат отложены значения углов поворота (рад) в первых трех шарнирах механизма.

Рассмотренный рекуррентный алгоритм при известных параметрах механизма не является единственным методом вычисления углов. Для этой же цели можно использовать конечные формулы, т. е. выражения, в которых угол поворота относительно первой оси является известным, а углы поворота относительно второй и третьей осей определяются решением соответствующей нелинейной системы уравнений:

$$\begin{aligned} \overline{AB}^i &= \overline{AB}T_{X/x_1}^i; \\ \overline{BC}^i &= \overline{BC}T_{x_1/x_2}^i T_{X/x_1}^i; \\ \overline{CD}^i &= \overline{CD}T_{x_2/x_3}^i T_{x_1/x_2}^i T_{X/x_1}^i; \\ \overline{AB}^i + \overline{BC}^i + \overline{CD}^i - m_1 &= 0; \\ T_{X/x_1} &= E + L_1 \sin(\varphi_1) + L_1^2 [1 - \cos(\varphi_1)]; \\ T_{x_1/x_2} &= E + L_2 \sin(\varphi_2) + L_2^2 [1 - \cos(\varphi_2)]; \\ T_{x_2/x_3} &= E + L_3 \sin(\varphi_3) + L_3^2 [1 - \cos(\varphi_3)]. \end{aligned} \quad (34)$$

## Литература

- [1] Bennett G.T. *A new mechanism*. *Engineering*, 1903, vol. 76, pp. 777–778.
- [2] Bennett G.T. The scew isogram-mechanism. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1913–1914, vol. 13, pp. 151–173.
- [3] Hunt K.H. *Kinematic Geometry of Mechanisms*. Oxford engineering science series, University Press, Oxford. 1978. 484 p.
- [4] Perez A., McCarthy J.M. Dimensional synthesis of Bennett linkages. *Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conferences*, 2000, Baltimore, Maryland, USA, paper DETC2000/MECH-14069.
- [5] Brunthaler K., Schrockner H.-P., Husty M. A New Method for the Synthesis of Bennett Mechanisms, *Proceedings of CK2005, International Workshop on Computational Kinematics*, Cassino, May 4–6, 2005, pp. 1–8.
- [6] Яруллин М.Г., Мингазов М.Р. Синтез структурных модификаций механизма Беннетта. URL: <http://www.mmf.spbstu.ru/mese/2014/129.pdf> (дата обращения 2 сентября 2015).
- [7] Яруллин М.Г., Мингазов М.Р. Краткий анализ модификации механизмов Беннетта. *Проблемы механики современных машин. Мат. V междунар. конф.*, Улан-Удэ, Изд-во ВСГУТУ, 2012, т. 1, с. 177–181.
- [8] Яруллин М.Г., Мингазов М.Р. Структурный синтез двухподвижного пространственного 5R механизма и элементы следящего управления. *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*, 2014, № 6, с. 214–220.

В среде MATLAB нелинейные системы решаются с помощью функции `lsqnonlin.m`, которая использовалась в разработанной функции `bennett1.m` для реализации описанных в формуле (34) вычислений углов поворота механизма с теми же параметрами, что и при рекуррентном расчете. Результаты расчета углов приведены на рис. 2, б. По оси абсцисс отложены номера каждого из 21 шага приращения первого угла. Приращение угла принято равным 0,3/20. По оси ординат отложены значения углов поворота (рад) в первых трех шарнирах механизма.

## Выводы

1. Предложен метод анализа механизма Беннетта и выбора его параметров, включающий в себя два подхода, в основе которых лежат соответственно обобщенные координаты и скорости. С помощью такого метода получены параметры механизма, существенно отличающиеся от предложенных Беннеттом.
2. Разработана модель кинематики механизма в среде MATLAB.



## References

- [1] Bennett G.T. *A new mechanism*. *Engineering*, 1903, vol. 76, pp. 777–778.
- [2] Bennett G.T. The scew isogram-mechanism. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1913–1914, vol. 13, pp. 151–173.
- [3] Hunt K.H. *Kinematic Geometry of Mechanisms*. Oxford engineering science series, University Press, Oxford. 1978. 484 p.
- [4] Perez A., McCarthy J.M. Dimensional synthesis of Bennett linkages. *Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conferences*, 2000, Baltimore, Maryland, USA, paper DETC2000/MECH-14069.
- [5] Brunthaler K., Schrocker H.-P., Husty M. A New Method for the Synthesis of Bennett Mechanisms, *Proceedings of CK2005, International Workshop on Computational Kinematics*, Cassino, May 4–6, 2005, pp. 1–8.
- [6] Iarullin M.G., Mingazov M.R. *Sintez strukturnykh modifikatsii mekhanizma Bennetta* [Synthesis of structural modifications mechanism Bennett]. Available at: <http://www.mmf.spbstu.ru/mese/2014/129.pdf> (accessed 2 September 2015).
- [7] Iarullin M.G., Mingazov M.R. *Kratkii analiz modifikatsii mekhanizmov Bennetta* [A brief analysis of the modification arrangements Bennett]. *Problemy mekhaniki sovremennykh mashin. Materialy 5 mezhdunarodnoi konferentsii* [Problems of modern machines. Proceedings of the 5 International Conference]. Ulan-Ude, VSGUTU publ., 2012, vol. 1, pp. 177–181.
- [8] Iarullin M.G., Mingazov M.R. *Strukturnyi sintez dvukhpodvizhnogo prostranstvennogo 5R mekhanizma i elementy slediashchego upravleniia* [Structure Synthesis of Differential 5R Linkage and Tracking Control Elements]. *Izvestiia Samarskogo nauchnogo tsentra Rossiiskoi akademii nauk* [Proceedings of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences]. 2014, no. 6, pp. 214–220.

Статья поступила в редакцию 14.12.2015

## Информация об авторе

**ИОФФЕ Марк Львович** (Нью-Йорк) — кандидат технических наук. США, Нью-Йорк, 2 Авеню, д. 444, e-mail: [ioffe.mark@gmail.com](mailto:ioffe.mark@gmail.com)).

## Information about the author

**IOFFE Mark Lvovich** (New York) — Candidate of Science (Eng.) (444, 2<sup>nd</sup> Avenue, New York, USA, e-mail: [ioffe.mark@gmail.com](mailto:ioffe.mark@gmail.com)).