

УДК 621.833.6

DOI 10.18698/0536-1044-2016-3-10-16

# Влияние податливости осей и подшипников сателлитов планетарной передачи на распределение нагрузки по потокам мощности

Ф.И. Плеханов, А.С. Сунцов

ФГБОУ ВПО «Ижевский государственный технический университет имени М.Т. Калашникова», 426069, Ижевск, Удмуртская Республика, Российская Федерация, Студенческая ул., д. 7

## The Influence of Stiffness of the Planet Shafts and Bearings on Load Distribution among the Planets in a Planetary Gear

F.I. Plekhanov, A.C. Suntsov

Federal State Budget Educational Institution of Higher Education Kalashnikov Izhevsk State Technical University, 426069, Izhevsk, Udmurt Republic, Russian Federation, Studencheskaya St., Bldg. 7



e-mail: fplehanov@list.ru, Alehandrsun4009@gmail.com



Рассмотрен метод определения коэффициента неравномерности распределения нагрузки по потокам мощности многосателлитной планетарной передачи с самоустанавливающимися звеньями при наличии погрешностей ее изготовления. Решение задачи проводилось с учетом податливости подшипников качения, деформации двухопорных осей и сопрягаемых с ними элементов передачи. Многопоточные (многосателлитные) планетарные передачи получили широкое распространение в машиностроении благодаря высоким технико-экономическим показателям. Однако неравномерность распределения нагрузки в зацеплениях колес, вызванная погрешностями изготовления передачи, ведет к снижению эффекта многопоточности. В результате задача улучшения показателей нагрузочной способности планетарного механизма актуальна. Важнейшим показателем несущей способности планетарной зубчатой передачи является неравномерность распределения нагрузки по сателлитам, зависящая от деформации таких деталей, как подшипник и ось сателлита. В результате возникает проблема определения влияния податливости указанных элементов механизма на величину коэффициента неравномерности распределения нагрузки по потокам мощности. Для установления закона распределения нагрузки в зонах сопряжения оси сателлита со щеками водила и кольцом подшипника ось рассмотрена как балка на упругих основаниях и решена система из двух дифференциальных уравнений, постоянные интегрирования которых определены с учетом прогиба оси на промежуточных участках. Полученную погонную нагрузку на участках сопряжения и соответствующую ей податливость оси, а также податливость подшипника качения включили в систему уравнений совместности перемещений, из которой определяли силы в зацеплениях сателлитов. Результаты исследования планетарных передач с числом сателлитов от пяти до семи показали, что нагрузочная способность семисателлитной передачи при наличии погрешностей ее изготовления превышает указанный технико-экономический показатель пяти- и шестисателлитной конструкций примерно на 20...30 %, а при отсутствии погрешностей — на 40 и 17 % соответственно. Деформативность осей и подшипников сателлитов существенно влияет на распределение нагрузки по потокам мощности планетарной передачи. Снижение за счет этого коэффициента неравномерности достигает 30 % и более, что увеличивает нагрузочную способность механизма.

**Ключевые слова:** планетарная передача, деформативность, погрешности, неравномерность нагрузки.

**i** This paper proposes a method for determining the mesh load factor for a multi-satellite planetary gear with self-adjusting elements in the presence of manufacturing errors. The problem is solved taking into account the stiffness of the rolling bearings, deformation of the two-point shafts and the adjacent elements. Multi-satellite planetary gears have been widely used in mechanical engineering due to their high technical and economic indicators. However, the non-uniform load distribution in the meshed gears that is caused by manufacturing errors diminishes the effect of the multiple planets. Therefore, it is important to improve loading capacity indicators of the planetary gear mechanism. The major index of the planetary gear bearing capacity is the non-uniformity of load distribution among the planets. It depends on the deformation of such elements as bearing and shaft, hence the problem of determining the influence of stiffness of these elements on the mesh load factor. For the determination of load distribution laws in the zones where the planet shaft is in contact with the carrier surface and the bearing ring, the shaft is considered as an axle on elastic foot. A system of two differential equations is solved where the integration constants are determined taking into account shaft bending at intermediate sections. The obtained linear load in the adjacent areas, and the stiffness of the shaft and rolling bearing are included in the system of displacement compatibility equations, from which the forces in the meshed planets are calculated. The study results for planetary gears with 5 to 7 planets have shown that loading capacity of a seven-satellite gear with manufacturing errors exceeds that of a five- and six-satellite assembly approximately by 20–30%, and with no errors by 40% and 17% respectively. The deformability of the planet shafts and bearings has a significant impact on load distribution among the planets. The reduction of the mesh load factor reaches 30% or more, which increases the loading capacity of the mechanism.

**Keywords:** planetary gear, deformability, errors, non-uniform loading.

Планетарные и волновые передачи широко распространены в технике благодаря хорошим массогабаритным показателям, надежности, малым потерям мощности на трение и возможности реализации большого передаточного отношения в одной ступени [1–3]. Наиболее эффективными из них и часто применяемыми на практике являются многопоточные (многосателлитные) конструкции Джеймса, содержащие в качестве основных звеньев солнечную шестерню, центральное колесо с внутренними зубьями и водило (рис. 1). Для ликвидации избыточных связей и выравнивания нагрузки в зацеплениях колес сателлиты располагают на сферических подшипниках, а солнечную шестерню — на зубчатой подвеске. Однако такая конструкция позволяет полностью избавиться от избыточных связей только при трехсателлитном исполнении. На практике же часто используют планетарные механизмы с большим числом сателлитов (пять и более). Неизбежные погрешности их изготовления приводят к неравномерному распределению нагрузки по потокам мощности даже при наличии «плавающих» и самоустанавливающихся звеньев. Податливость таких элементов передачи, как

подшипники и оси сателлитов, частично компенсирует эти погрешности, поэтому важно установить законы распределения нагрузки в зонах сопряжения оси сателлита с кольцом

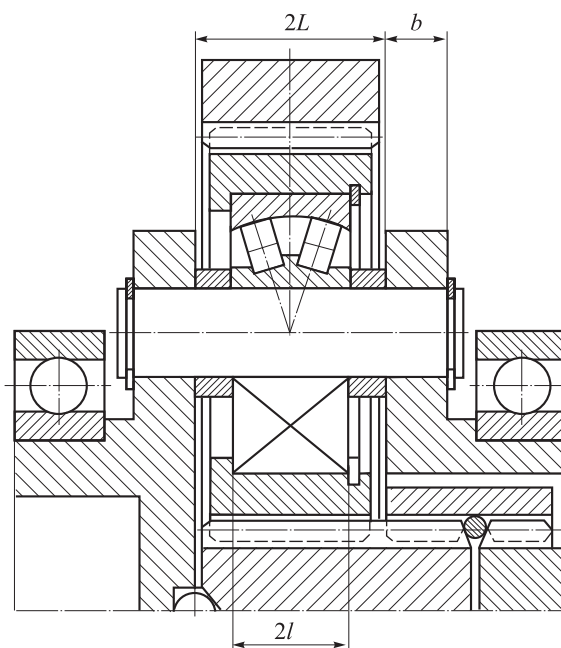


Рис. 1. Многопоточная планетарная передача с самоустанавливающимися звеньями

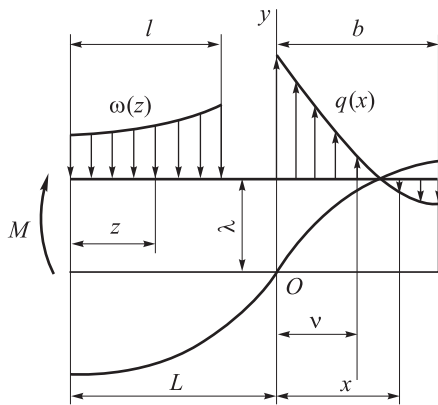


Рис. 2. Схема напряженно-деформированного состояния оси сателлита планетарной передачи

подшипника и щекой водила и исследовать их влияние на величину коэффициента неравномерности распределения нагрузки по потокам мощности.

Цель работы — определение коэффициента неравномерности распределения нагрузки по сателлитам многопоточной планетарной передачи, в прямой зависимости от которого находится нагрузочная способность механизма.

Деформация оси обусловлена ее податливостью в местах сопряжения с подшипником сателлита и щеками водила, а также прогибом на промежуточных участках (рис. 2).

Представив ось в месте сопряжения со щекой водила балкой на упругом основании и используя известные из строительной механики зависимости, запишем уравнение ее напряженно-деформированного состояния в следующем виде:

$$y''(x) = -\frac{q''(x)}{C} = \frac{M(x)}{IE} - 1,1 \frac{q(x)}{SG}, \quad (1)$$

где  $C$  — контактная жесткость сопряжения,  $C \cong E/1,2$  [4];  $M(x)$  — момент изгиба оси в сечении с координатой  $x$ ,

$$M(x) = M(0) - Fx + \int_0^x q(v)(x-v)dv$$

( $M(0)$  — момент в сечении оси при  $x=0$ ,  $v$  — координата (см. рис. 2),  $F$  — половина окружной силы, действующей на ось сателлита);  $I$  — осевой момент инерции сечения;  $E$ ,  $G$  — модули упругости первого и второго рода соответственно;  $q(x)$  — погонная нагрузка,  $q(x) = [\lambda - y(x)]C$  ( $\lambda = \text{const}$ );  $S$  — площадь поперечного сечения оси.

Дважды продифференцировав выражение (1) по  $x$ , получим

$$q^{IV}(x) - \frac{1,1C}{SG} q''(x) + \frac{C}{IE} q(x) = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$q(x) = C_1 \text{sh}(\gamma x) \sin(\beta x) + C_2 \text{ch}(\gamma x) \sin(\beta x) + C_3 \text{sh}(\gamma x) \cos(\beta x) + C_4 \text{ch}(\gamma x) \cos(\beta x), \quad (2)$$

где

$$\gamma = \sqrt[4]{\frac{C}{IE}} \cos\left(0,5 \arccos \frac{1,1\sqrt{IEC}}{2GS}\right);$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{C}{IE}} \sin\left(0,5 \arccos \frac{1,1\sqrt{IEC}}{2GS}\right).$$

Аналогично на участке сопряжения оси сателлита с кольцом подшипника погонная нагрузка, найденная с учетом равенств  $\omega^I(0) = \omega^{III}(0) = 0$ ,

$$\omega(z) = C_5 \text{sh}(\gamma z) \sin(\beta z) + C_6 \text{ch}(\gamma z) \cos(\beta z). \quad (3)$$

Для определения постоянных интегрирования  $C_1$ – $C_6$ , входящих в выражения (2), (3), используем следующие уравнения статики и граничные условия:

$$\int_0^b q(x) dx = F;$$

$$\int_0^l \omega(z) dz = F;$$

• при  $x=b$   $M(x)=0$  и в соответствии с уравнением изогнутой оси (1)

$$q''(b) = 1,1 \frac{Cq(b)}{SG};$$

• при  $x=0$

$$M(x) = M(0) = \int_0^b q(x)x dx = IE \left[ 1,1 \frac{q(0)}{SG} - \frac{q''(0)}{C} \right];$$

• при  $x=0$  и  $z=l$  моменты изгиба на участках связаны равенством

$$M(l) = IE \left[ \frac{\omega^I(l)}{C} - 1,1 \frac{\omega(l)}{SG} \right] = F(L-l) + M(0);$$

• взаимосвязь между угловыми деформациями участков оси имеет вид

$$-\frac{\omega^I(l)}{C} = \frac{q^I(0)}{C} + \frac{M(0)}{IE}(L-l) + 1,1 \frac{F}{SG} + \frac{F(L-l)^2}{2IE}.$$

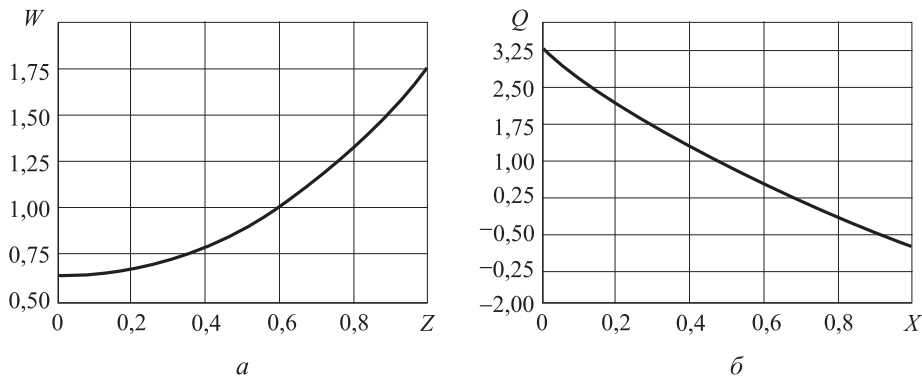


Рис. 3. Распределение нагрузки в зонах сопряжения оси сателлита с кольцом подшипника (а) и щечкой водила (б) при  $b = b/d = 0,6$ ,  $l/d = 0,5$ ,  $L/d = 1$

В результате расчетов получены зависимости погонной нагрузки, отнесенной к среднему ее значению, в зонах сопряжения оси сателлита с кольцом подшипника и щечкой водила от параметров  $Z = z/l$  и  $X = x/b$  при  $b = b/d = 0,6$ ,  $l/d = 0,5$ ,  $L/d = 1$  (рис. 3).

Окружное смещение сателлита, обусловленное деформацией его оси и сопрягаемых с ней щечки водила и кольца подшипника,

$$y_0 = \frac{q(0)}{C} + \frac{\omega(l)}{C} + \frac{\omega^1(l)}{C}(L-l) + \frac{M(0)}{2IE}(L-l)^2 + \frac{F}{3IE}(L-l)^3.$$

Сближение внешнего и внутреннего колец двухрядного сферического роликового подшипника под действием радиальной нагрузки  $2F$ , зависящее от размеров его элементов [5, 6], имеет следующий вид [5]:

$$y_p = 0,5 \left( n_H \sqrt[3]{\Sigma \rho_H} + n_B \sqrt[3]{\Sigma \rho_B} \right) \times \sqrt[3]{\left[ \frac{15F(1-\mu^2)}{ZE \cos \beta} \right]^2}, \tag{5}$$

где  $Z$  — число роликов в ряду;  $\beta$  — угол наклона оси ролика к оси подшипника;  $\Sigma \rho_H$ ,  $\Sigma \rho_B$  — приведенные кривизны поверхностей в сопряжениях ролика с наружным и внутренним кольцами подшипника соответственно;  $\mu$  — коэффициент Пуассона;  $n_H$ ,  $n_B$  — коэффициенты разности кривизн в сопряжениях ролика с наружным и внутренним кольцами подшипника соответственно.

Для определения коэффициента неравномерности распределения нагрузки по сателлитам используем систему уравнений совместности перемещений:

$$\begin{cases} F_{n1} = b_w c_w [\delta - (y_{01} + \Delta_1 + y_{p1}) \cos \alpha_w]; \\ \dots\dots\dots \\ F_{nn} = b_w c_w [\delta - (y_{0n} + \Delta_n + y_{pn}) \cos \alpha_w]; \\ \sum_{i=1}^n F_{ni} = nF_n, \end{cases} \tag{6}$$

где  $F_{ni}$  — нормальная нагрузка в зацеплении сателлита с колесом или солнечной шестерней,  $F_{ni} = F_i / \cos \alpha_w$ ;  $\alpha_w$  — угол зацепления;  $b_w$  — рабочая ширина венца сателлита;  $c_w$  — жесткость зацепления,  $c_w \cong 0,075E$  [7];  $\Delta_i$  — погрешность окружного расположения осей сателлитов;  $F_n$  — среднее значение нормальной нагрузки в зацеплении,  $F_n = F / \cos \alpha_w$ ;  $n$  — число сателлитов.

После подстановки в систему (6) перемещений, выраженных через соответствующие сателлитам силы  $F_i$  уравнениями (4), (5), получим составляющие нагрузки и коэффициент неравномерности ее распределения  $K = F_{nmax} / F_n$ .

На рис. 4 приведены зависимости коэффициента неравномерности  $K$  от относительной погрешности  $\Theta = Eb_w \Delta / F_n$  для пяти-, шести- и семисателлитной конструкций передачи при угле зацепления колес  $\alpha_w = 20^\circ$  и различных значениях параметров механизма. Зависимости соответствуют подшипникам средней серии и неблагоприятному для передачи с «плавающей» солнечной шестерней соотношению между отклонениями осей сателлитов от теоретически точного положения: при  $n=5$   $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ ,  $\Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5 = 0$ ; при  $n=6$   $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = \Delta$ ,  $\Delta_5 = \Delta_6 = 0$ ; при  $n=7$   $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = \Delta$ ,  $\Delta_5 = \Delta_6 = \Delta_7 = 0$  (данные соотношения приняты потому, что при нечетном числе сателлитов самоустанавливаемость солнечной шестерни обеспечивает близкое

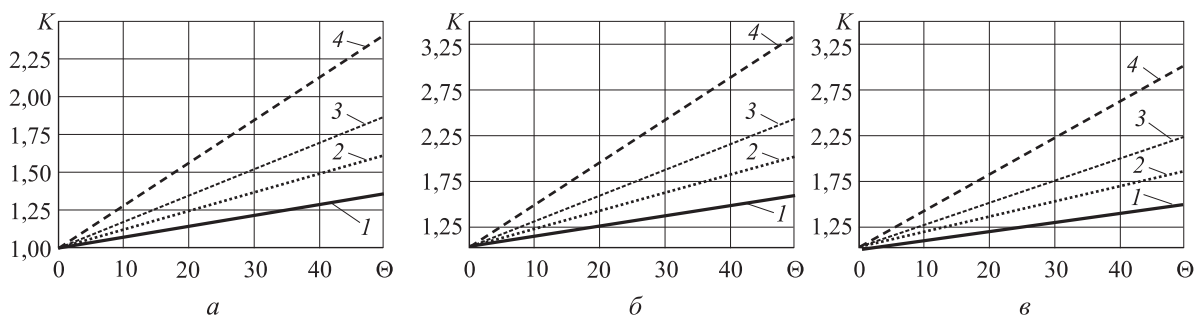


Рис. 4. Зависимости коэффициента неравномерности распределения нагрузки по потокам мощности от относительной погрешности при  $0,4 \leq b/d \leq 0,8$ ,  $l/d = 0,5$ ,  $b_w/L = 1,8$ :  
 $a - n = 5$ ;  $b - n = 6$ ;  $v - n = 7$ ; 1 —  $L/d = 1$ ; 2 —  $L/d = 0,7$ ; 3 — жесткая ось; 4 — жесткие ось и подшипник

к равномерному распределению нагрузки только по трем сателлитам, при четном — по двум).

Для оценки точности аналитического метода расчета деформативности элементов передачи проведено исследование напряженно-деформированного состояния оси и сопрягаемых с ней деталей с помощью конечно-элементного анализа в среде Solid Works [8, 9]. Результаты последнего близки к значениям, полученным по предложенным зависимостям податливости.

Из выполненных расчетов следует, что при «плавающей» солнечной шестерне и неблагоприятном соотношении между отклонениями осей сателлитов от теоретически точного положения нагрузочная способность пятисателлитной конструкции практически не отличается от этого показателя шестисателлитной передачи. Это объясняется тем, что повышение нагрузочной способности за счет увеличения числа потоков мощности компенсируется повышением коэффициента неравномерности распределения нагрузки в зацеплениях колес. Нагрузочная способность семисателлитной передачи при наличии погрешностей ее изготовления превышает указанный технико-экономический показатель пяти- и шестисателлитной конструкций примерно на 20...30 %, а при отсутствии погрешностей — на 40 и 17 % соответственно. Это следует учитывать как при

расчете на прочность, так и при определении виброакустических характеристик планетарных передач [10, 11].

## Выводы

1. Деформативность осей и подшипников сателлитов оказывает существенное влияние на распределение нагрузки по потокам мощности планетарной передачи. Снижение за счет этого коэффициента неравномерности достигает 30 % и более, что увеличивает нагрузочную способность механизма.

2. При неблагоприятном для пяти-, шести- и семисателлитной передач с «плавающей» солнечной шестерней соотношении между отклонениями осей сателлитов от теоретически точного их положения наиболее равномерное распределение нагрузки имеет место в пятисателлитной конструкции.

3. Приведенные зависимости позволяют определить податливость оси сателлита планетарной передачи и сопрягаемых с ней щек водила и подшипников качения, осуществить расчет этих деталей и передачи в целом на прочность и жесткость, а также использовать полученные результаты исследования при проектировании рациональных конструкций многопоточных планетарных механизмов.

## Литература

- [1] Тимофеев Г.А., Самойлова М.В. Геометро-кинематическое исследование комбинированного планетарно-волнового механизма. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2012, № 1, с. 70–80.
- [2] Lin J., Parker G.R. Planetary gear parametric instability caused by mesh stiffness variation. *Journal of Sound and vibration*, 2002, vol. 249, no. 1, pp. 38–48, doi:10.1006/jsvi.2001.3848.
- [3] Singh A. Epicyclic load sharing map – development and validation. *Mechanism and Machine Theory*, 2011, vol. 46 (5), pp. 632–646.

- [4] Плеханов Ф.И. Влияние деформации центральной шестерни и осей сателлитов планетарной передачи на распределение нагрузки в зацеплениях. *Вестник машиностроения*, 2015, № 4, с. 16–19.
- [5] Нахатакян Ф.Г. Аналитическое определение контактной податливости роликовых подшипников. *Приводы и компоненты машин*, 2013, № 5–6, с. 21–22.
- [6] Черменский О.Н., Федотов Н.Н. *Подшипники качения. Справочник-каталог*. Москва, Машиностроение, 2003. 575 с.
- [7] Плеханов Ф.И. *Зубчатые планетарные передачи. Типы, основы кинематики, геометрии и расчета на прочность*. Ижевск, Изд-во Удмуртия, 2003. 200 с.
- [8] Nikolic V., Dolicanin C., Radojkovic M. Application of finite element method of thin steel plate with holes. *Technical Gazette*, 2011, vol. 18 (1), pp. 57–62.
- [9] Dolicanin C., Nikolic V., Dolicanin D. Application of finite difference method to study of the phenomenon in the theory of thin plates. *Scientific Publications of the State University of Novi Pazar, Series A: Applied Mathematics, Informatics & Mechanics*, 2010, vol. 2 (1), pp. 29–45.
- [10] Agemi F., Ognjanovic M. Gear vibrations in supercritical mesh-frequency range caused by teeth impacts. *Strojniski vestnik – Journal of Mechanical Engineering*, 2010, vol. 56 (10), pp. 653–662.
- [11] Hedrih-Stevanovic K., Nikolic-Stanojevic V. A model of gear transmission fractional order system dynamics. *Mathematical Problems in Engineering*, 2010, ID 972873, 23 p. URL: <http://www.hindawi.com/journals/mpe/2010/972873/> (accessed 20 August 2015).

## References

- [1] Timofeev G.A., Samoilova M.V. Geometro-kinemacheskoe issledovanie kombinirovannogo planetarno-volnovogo mekhanizma [Geometric-Kinematic Study of Combined Planetary-Wave Mechanism]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Mechanical Engineering]. 2012, no. 1, pp. 70–80.
- [2] Lin J., Parker G.R. Planetary gear parametric instability caused by mesh stiffness variation. *Journal of Sound and vibration*, 2002, vol. 249, no. 1, pp. 38–48, doi:10.1006/jsvi.2001.3848.
- [3] Singh A. Epicyclic load sharing map – development and validation. *Mechanism and Machine Theory*, 2011, vol. 46(5) pp. 632–646.
- [4] Plekhanov F.I. Vliianie deformatsii tsentral'noi shesterni i osei satellitov planetarnoi peredachi na raspredelenie nagruzki v zatsepleniakh [Influence of deformability of sun gear and axes of satellites of planetary gear on load distribution in gearings]. *Vestnik mashinostroeniia* [Russian Engineering Research]. 2015, no. 4, pp. 16–19.
- [5] Nakhatakian F. G. Analiticheskoe opredelenie kontaktnoi podatlivosti rolikovykh podshipnikov [Analytical determination to contact softness roller bearing]. *Privody i komponenty mashin* [Machine drives and parts]. 2013, no. 5-6, pp. 21–22.
- [6] Chermenskii O.N., Fedotov N.N. *Podshipniki kacheniiia. Spravochnik-catalog* [Rolling bearings. Directory catalog]. Moscow, Mashinostroenie publ., 2003, 575 p.
- [7] Plekhanov F.I. *Zubchatye planetarnye peredachi. Tipy, osnovy kinematiki, geometrii i rascheta na prochnost'* [Gear planetary gears. Types bases kinematics, geometry and strength calculation]. Izhevsk, Udmurtiia publ., 2003. 200 p.
- [8] Nikolic V., Dolicanin C., Radojkovic M. Application of finite element method of thin steel plate with holes. *Technical Gazette*, 2011, vol. 18, no. 1, pp. 57–62.
- [9] Dolicanin C., Nikolic V., Dolicanin D. Application of finite difference method to study of the phenomenon in the theory of thin plates. *Scientific Publications of the State University of Novi Pazar, Series A: Applied Mathematics, Informatics & Mechanics*, 2010, vol. 2, no. 1, pp. 29–45.
- [10] Agemi F., Ognjanovic M. Gear vibrations in supercritical mesh-frequency range caused by teeth impacts. *Strojniski vestnik – Journal of Mechanical Engineering*, 2010, vol. 56, no.10, pp. 653–662.
- [11] Hedrih-Stevanovic K., Nikolic-Stanojevic, V. A model of gear transmission fractional order system dynamics. *Mathematical Problems in Engineering*, 2010, ID 972873, 23 p. Available at: <http://www.hindawi.com/journals/mpe/2010/972873/> (accessed 20 August 2015).

## Информация об авторах

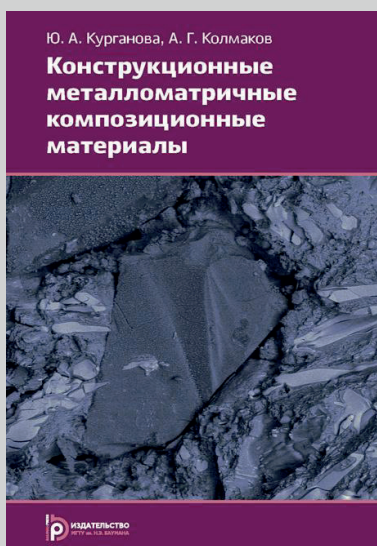
**ПЛЕХАНОВ Федор Иванович** (Ижевск) — доктор технических наук, профессор кафедры «Промышленное и гражданское строительство». ФГБОУ ВПО «Ижевский государственный технический университет имени М.Т. Калашникова» (426069, Ижевск, Удмуртская Республика, Российская Федерация, Студенческая ул., д. 7, e-mail: fplehanov@list.ru).

**СУНЦОВ Александр Сергеевич** (Ижевск) — аспирант кафедры «Промышленное и гражданское строительство». ФГБОУ ВПО «Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова» (426069, Ижевск, Удмуртская Республика, Российская Федерация, Студенческая ул., д. 7, e-mail: Alehandrsun4009@gmail.com).

## Information about the authors

**PLEKHANOV Fyodor Ivanovich** (Izhevsk) — Doctor of Science (Eng.), Professor, Department of Industrial and Civil Engineering, Federal State Budget Educational Institution of Higher Education Kalashnikov Izhevsk State Technical University (426069, Izhevsk, Udmurt Republic, Russian Federation, Studencheskaya St., Bldg. 7, e-mail: fplehanov@list.ru).

**SUNTSOV Aleksandr Sergeevich** (Izhevsk) — Postgraduate, Department of Industrial and Civil Engineering, Federal State Budget Educational Institution of Higher Education Kalashnikov Izhevsk State Technical University (426069, Izhevsk, Udmurt Republic, Russian Federation, Studencheskaya St., Bldg. 7, e-mail: Alehandrsun4009@gmail.com).



В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана  
вышло в свет учебное пособие  
**Ю.А. Кургановой, А.Г. Колмакова**

### «Конструкционные металломатричные композиционные материалы»

Изложены основные понятия, относящиеся к науке о композиционных материалах. Рассмотрены классификация, основные способы получения, особенности соединения компонентов металломатричных композиционных материалов, методы исследования их структуры, механические, технологические и эксплуатационные свойства. Теоретически и экспериментально обоснована целесообразность использования дисперсно-упрочненных и волокнистых композиционных материалов на основе металлических сплавов в области авиа-, ракетно- и автомобилестроения.

**По вопросам приобретения обращайтесь:**

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.  
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;  
press@bmstu.ru; www.baumanpress.ru