Транспортное и энергетическое машиностроение

УДК 629.032 DOI 10.18698/0536-1044-2016-3-24-29

Математическая модель качения эластичного колеса по неровностям недеформируемого опорного основания

М.М. Жилейкин, Б.В. Падалкин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1

A Mathematical Model of Rolling an Elastic Wheel on a Rough Rigid Support Base

M.M. Zhileykin, B.V. Padalkin

BMSTU, 105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1

e-mail: jileykin_m@mail.ru, cm-10@ya.ru

Одной из самых универсальных и удобных моделей при проведении вычислительных экспериментов является математическая модель качения эластичного колеса, разработанная А.Б. Диком и Ю.Л. Рождественским. Такие модели хорошо описывают практически любые режимы работы колеса (бортовой поворот, движение с большими уводами, разгоны и торможения), а также те случаи, когда отсутствует исчерпывающая информация о моделируемой системе, а необходимую информацию можно получить из несложного эксперимента. Модели сравнительно просты и нетребовательны к вычислительным ресурсам. При этом одним из их недостатков является отсутствие учета смещения тангенциальной и радиальной реакций в пятне контакта колеса с дорогой при движении по неровностям. В работе предложена математическая модель качения эластичного колеса по неровностям опорного основания с учетом деформации пятна контакта и изменения направления радиальной и тангенциальной реакций. Методами имитационного моделирования доказана работоспособность созданной математической модели.

Ключевые слова: колесный движитель, опорное основание, пятно контакта.

One of the most versatile and convenient models when conducting computational experiments is a mathematical model of elastic wheel rolling developed by A.B. Dick and Y.L. Rozhdestvensky. Nearly all the modes of wheel operation can be well described by such models (skid steering, large counter steering, acceleration and braking). They also cover those cases when there is no comprehensive information about the system being modelled, and the necessary information can be obtained from a simple experiment. The models are relatively simple and require low computational time. One of the disadvantages therewith is the lack of consideration for displacement of tangential and radial reactions in the contact patch between the wheel and the road when driving over rough surfaces. The authors propose a mathematical model of elastic wheel rolling over a rough supporting base taking into account the contact patch deformation and variation in the direction of the radial and tangential reactions. The efficiency of the developed mathematical model is proved by the simulation methods.

Keywords: wheeled propulsion device, supporting base, contact patch.

Требования к математическим моделям движения колесных машин (КМ) определяются совокупностью задач, при решении которых должна быть получена необходимая информация для оценки эксплуатационных качеств, в частности для решения задач о колебаниях КМ. К таким требованиям относят следующие:

• модель должна описывать совместную динамику кузова, силовой установки и ходовой части КМ с точностью, необходимой для устойчивости при движении на недеформируемых опорных основаниях;

• в модели должны быть учтены конструктивные особенности движителя, неудерживающий и неголономный характер связей, наложенных на КМ;

• в модели не должно быть ограничений на характеристики профиля трасс в вертикальной плоскости, что позволит исследовать поведение машины как при движении по реальным неровностям, так и через искусственные препятствия;

• движение КМ должно моделироваться с учетом характеристик сопротивления и сцепления грунта, так как тягово-сцепные характеристики влияют на скорость движения машины.

Последние три условия касаются модели колесного движителя. Точность и адекватность модели эластичного колеса во многом определяют точность и адекватность модели самого автомобиля.

Качение эластичного колеса исследовалось в двух направлениях. Одно из них — изучение динамики и кинематики неголономных систем с классическими неголономными связями. Известно несколько подходов к теоретическому представлению качения пневматического колеса, отличающихся степенью учета особенностей процесса увода. Это теории И. Рокара, И. Грейдануса, М.В. Келдыша, А.А. Хачатурова.

Другое направление опиралось в основном на результаты экспериментов и эмпирические зависимости. При этом исследовались отношения между силовыми и кинематическими характеристиками колеса при определенных режимах качения. К такому направлению можно отнести модели, построенные на теории бокового увода (классический подход) и на описании взаимодействия колеса с опорной поверхностью с прямоугольным отпечатком в пятне контакта, а также модели с «натянутой нитью» и «упругим кольцом».

Основы классического подхода изложены в научных трудах Е.А. Чудакова, Я.М. Певзнера, а также во многих других работах, например в [1]. Классический подход нашел широкое применение при исследованиях устойчивости колесных и гусеничных машин. Основное преимущество такого подхода — возможность линеаризации при малых углах увода. Часто при исследовании устойчивости достаточно ограничиться изучением линейной системы. Однако при исследовании поведения машины во время экстренного торможения или при бортовом повороте, когда работает система динамической стабилизации, применение линейной классической теории может дать принципиально неверные результаты.

Д.А. Антонов разработал нелинейную теорию увода, в которой факторы, влияющие на коэффициент сопротивления боковому уводу, учитывались с помощью коэффициентов коррекции. Применение такой модели для решения поставленной задачи, подразумевающей движение колес с большими углами увода, вызывает сложности, поскольку в рамках разработанной теории силы, возникающие при движении с большими углами увода, мало изучены.

Одной из самых известных и распространенных в мире математических моделей качения колеса является так называемая *магическая формула Пасейки* [2–5]. Главной трудностью использования такой модели является большое количество (в последних версиях более 30) эмпирических коэффициентов, значения и методики определения которых известны лишь самому автору.

В моделях с «прямоугольным отпечатком», авторами которых являются А.Б. Дик, Ю.Л. Рождественский и К.Ю. Машков, для вывода расчетных зависимостей используется представление о прямоугольной площадке контакта постоянной длины, который не искажается при боковом уводе. Такие модели применены, например, в работах [6, 7].

При любом режиме качения колеса в передней части отпечатка присутствует зона чистого качения, а в задней части — зона скольжения, т. е. вводится понятие частичного скольжения колеса.

В качестве характеристики скольжения используют коэффициент скольжения

$$S_{\text{к}} = \left|\frac{V_{\text{ск}}}{V_{\text{отн}}}\right|,$$

где $V_{\text{ск}}$ — скорость проскальзывания точек наружного поверхностного слоя шины в контакте относительно опорного основания; $V_{отн}$ — относительная скорость, $V_{отн} = \omega_к r_к$ ($\omega_к$ — угловая скорость вращения колеса; $r_к$ — радиус колеса).

Коэффициент скольжения является обобщением понятия коэффициента юза — буксования. Сила R взаимодействия колеса с опорным основанием определяется нормальной реакцией R_Z и коэффициентом μ_s трения частичного скольжения, который зависит от коэффициента скольжения $S_к$:

$$R = \mu_s R_Z.$$

Зависимость коэффициента трения частичного скольжения μ_s от коэффициента скольжения $S_к$ определяется экспериментально. При этом в работах Ю.Л. Рождественского и К.Ю. Машкова принято допущение об изотропности упруго-фрикционных свойств шин по всем направлениям скольжения и, следовательно, о возможности использования единой зависимости. В модели предполагается, что сила взаимодействия противоположна скорости скольжения.

Преимущество моделей с «прямоугольным отпечатком» в их универсальности: они хорошо описывают практически любые режимы работы колеса (бортовой поворот, движение с большими уводами, разгоны и торможения). Применение таких моделей эффективно и в том случае, когда отсутствует исчерпывающая информация о моделируемой системе, а необходимую информацию можно получить из несложного эксперимента. Модели сравнительно просты и нетребовательны к вычислительным ресурсам.

Дальнейшее развитие теория качения колеса с «прямоугольным отпечатком» для решения задачи исследования плавности хода КМ получила в работе [8]. При моделировании движения машины могут возникнуть случаи положения колес на грунте, когда определение силы $P_ш$ в шине и направления $\alpha_{гр}$ ее действия представляет отдельную задачу. Процедура решения может существенно замедлить вычислительный процесс. Предложенная в работе [8] методика позволяет избежать громоздких вычислений, а в качестве силовой характеристики амортизационного элемента колеса использованы экспериментальные зависимости вертикальной силы нагружения от вертикального прогиба и скорости прогиба шины колеса, стоящего на жесткой горизонтальной поверхности. Полагая, что на вибронагруженность КМ влияет не столько тип амортизационного элемента колеса, сколько его упруго-демпфирующая характеристика, при моделировании было принято, что колеса имеют внутреннюю амортизацию, наружный контур колес радиусом $r_к$ — недеформируемый, а амортизирующий элемент податлив только в радиальном направлении по нормали к опорной поверхности.

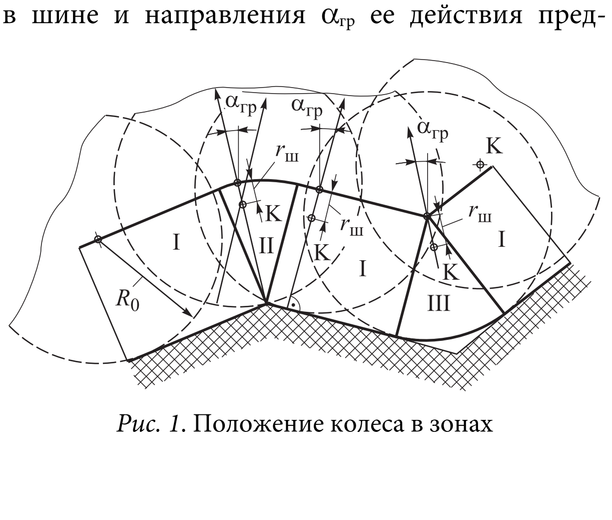

Рис. 1. Положение колеса в зонах

Перед началом процесса моделирования кусочно-линейный профиль трассы в вертикальной плоскости под обоими бортами разбивают на зоны по специальному алгоритму [8] (рис. 1). В результате обкатывания профиля трассы колесом радиусом $r_к$ без отрыва от опорного основания получают три типа зон: I — прямоугольные, II — секторные на вершине, III — секторные во впадине.

Если ось колеса оказалась вне зон, то оно находится в отрыве ($P_ш = 0$ и $\alpha_{гр} = 0$), при этом колесо считается жестким целым.

Недостатком такого подхода является точечный контакт колеса с опорным основанием, который не учитывает характер деформации наружного контура шины.

Цель работы — разработка математической модели качения эластичного колеса по неровностям опорного основания с учетом деформации пятна контакта.

Методика определения характера взаимодействия эластичного колеса с неровностями опорного основания. В предлагаемой модели использованы три различные системы координат (рис. 2), что обусловлено структурой и формой уравнений движения объекта.

Первая, неподвижная, система координат (НСК) $O_2X_2Y_2Z_2$ служит для моделирования заданных дорожно-грунтовых условий движения. Начало координат системы, точка O_2, совпадает с началом моделируемой трассы.

Вторая, подвижная, система координат (ПСК) $OXYZ$ используется для математическо-

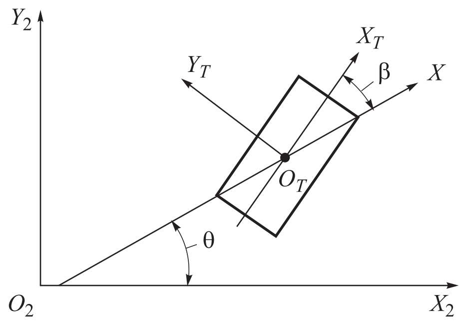

Рис. 2. Системы координат

го описания движения КМ. Ее центр O всегда совпадает с центром масс КМ, а оси — с главными осями инерции КМ.

Третья, микроподвижная, система координат (МПСК) $O_TX_TY_TZ_T$ применяется для определения сил, действующих на автомобиль со стороны грунта. Ее центр O_T совпадает с геометрическим центром пятна контакта колеса, ось O_TX_T — с проекцией продольной оси симметрии колеса на опорную поверхность, а ось O_TY_T — с проекцией оси колеса.

Рассмотрим расчетную схему движения колеса (рис. 3). На нижней полуокружности недеформированного профиля колеса выберем некоторое количество точек n, положение которых будем определять углом α_i между вертикалью, опущенной из центра колеса на ось X_2, и лучом, соединяющим точку профиля с центром колеса. Количество точек выбирается исходя из компромисса между точностью модели и ее быстродействием. Определим координаты X_{2i} и Y_{2i} выбранных точек профиля в НСК:

$$X_{2i} = X_{20} + r_к \sin\alpha_i \cos(\theta+\beta);$$
$$Y_{2i} = Y_{20} + r_к \sin\alpha_i \sin(\theta+\beta);$$
$$-\frac{\pi}{2} \le \alpha_i \le \frac{\pi}{2},$$

где X_{20}, Y_{20} — координаты центра колеса в НСК; θ — угол между осями OX_2 и OX; β — угол поворота управляемого колеса.

Вертикальную координату Z_{2i} i-й точки недеформированного профиля колеса в НСК находим по формуле

$$Z_{2i} = Z_{20} - r_к \cos\alpha_i,$$

где Z_{20} — вертикальная координата центра колеса в НСК.

Прогиб шины dr_i в радиальном направлении для i-й точки недеформированного профиля определим из следующих соотношений:

$$dr_i = \begin{cases} 0, & Z_{2грi} \le Z_i; \\ (Z_{2грi} - Z_{2i})\cos\alpha_i, & Z_{2грi} > Z_{2i}, \end{cases}$$

где $Z_{2грi}$ — вертикальная координата профиля опорного основания под i-й точкой колеса.

Таким образом, для определения реакций взаимодействия колеса с опорной поверхностью R_x и R_z в МПСК при наличии нескольких зон «перекрытия» профилем опорного основания недеформированного контура колеса необходимо определить эквивалентный угол $\alpha_{экв}$ точки приложения суммарной радиальной R_r и тангенциальной R_τ реакций (см. рис. 3).

Определим $\alpha_{экв}$ как взвешенное среднее значение:

$$\alpha_{экв} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i dr_i}{\sum_{i=1}^{n} dr_i}.$$

Радиальная реакция R_r является суммой двух составляющих — упругой $R_{rу}$ и демпфирующей $R_{rд}$: $R_r = R_{rу} + R_{rд}$. Упругая составляющая $R_{rу}$ зависит от эквивалентного прогиба шины:

$$dr_{экв} = \frac{\sum_{i=1}^{n} dr_i}{n_k},$$

где n_k — количество точек недеформированного профиля, находящихся в контакте с опорной поверхностью.

Демпфирующая составляющая $R_{rд}$ зависит от скорости прогиба шины в радиальном направлении. Для вычисления этого параметра опре-

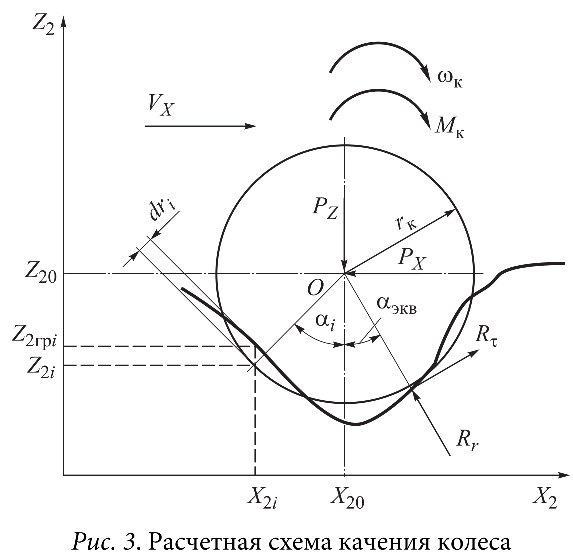

Рис. 3. Расчетная схема качения колеса по неровностям опорного основания

делим проекции скорости точек контура колеса на оси X_T и Z_T:

$$V_{iX_T} = \omega_{\text{к}}(r_{\text{к}} - dr_i)\cos\alpha_i + V_{0X_T};$$
$$V_{iZ_T} = \omega_{\text{к}}(r_{\text{к}} - dr_i)\sin\alpha_i + V_{0Z_T},$$

где V_{0X_T} и V_{0Z_T} — проекции вектора скорости центра колеса O на оси X_T и Z_T соответственно.

Вектор линейной скорости i-й точки недеформированного профиля колеса в радиальном направлении

$$V_{ri} = V_{iX_T}\sin\alpha_i + V_{iZ_T}\cos\alpha_i.$$

Скорость деформации профиля i-й точки в радиальном направлении

$$\frac{d}{dt}(dr_i) = \dot{Z}_{2\text{гр}i}\cos\alpha_i - V_{ri}.$$

Эквивалентная скорость прогиба

$$\frac{dr_{\text{экв}}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}(dr_i)}{n_k}.$$

Зная упругую и демпфирующую характеристики шины в радиальном направлении, находим R_r. Тангенциальная реакция $R_\tau = \mu_S R_r$.

Реакции взаимодействия колеса с опорной поверхностью R_{X_T} и R_{Z_T} в МПСК:

$$R_{X_T} = R_\tau\cos\alpha_{\text{экв}} - R_r\sin\alpha_{\text{экв}};$$
$$R_{Z_T} = R_\tau\sin\alpha_{\text{экв}} + R_r\cos\alpha_{\text{экв}}.$$

Поперечная реакция R_{Y_T} определяется так же, как и в классической методике [6].

Для проверки работоспособности предлагаемой методики разработана программа моделирования движения КМ с колесной формулой 8×8 в программном комплексе MATLAB/SIMULINK. Особенности математической модели движения машины изложены в работе [6]. Проведено моделирование прямолинейного движения КМ по неровностям грунтовой дороги (рис. 4) и преодоления КМ эскарпа высотой 0,6 м (рис. 5).

Зависимости угла $\alpha_{\text{экв}}$ от времени для переднего левого колеса КМ при движении по неровностям грунтовой дороги приведены на рис. 6, *а*, а при преодолении эскарпа — на рис. 6, *б*.

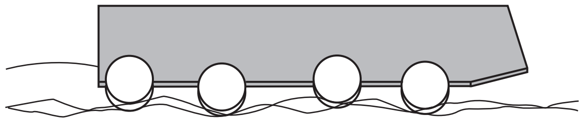

Рис. 4. Движение КМ по неровностям грунтовой дороги

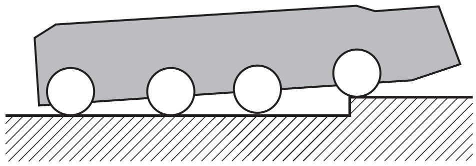

Рис. 5. Преодоление КМ эскарпа высотой 0,6 м

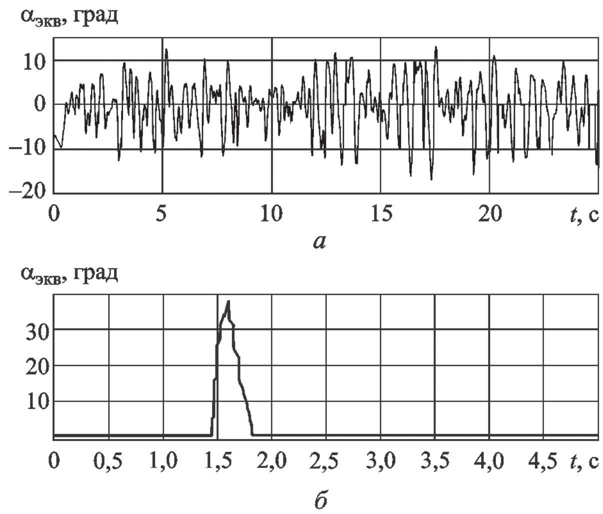

Рис. 6. Зависимости угла $\alpha_{\text{экв}}$ от времени t для переднего левого колеса КМ при движении по неровностям грунтовой дороги (*а*) и при преодолении эскарпа (*б*)

Выводы

1. Разработана математическая модель качения эластичного колеса по неровностям опорного основания, учитывающая деформацию пятна контакта и изменение направления радиальной и тангенциальной реакций.

2. Методами имитационного моделирования доказана работоспособность предложенной математической модели качения эластичного колеса по неровностями опорного основания.

Литература

[1] Пирковский Ю.В., Шухман С.Б. *Теория движения полноприводного автомобиля (прикладные вопросы оптимизации конструкции шасси).* Москва, ЮНИТИ-ДАНА, 2001. 230 с.

[2] Maurice J.P., Pacejka H.B. Relaxation Length Behaviour of Tyres. *Vehicle System Dynamics*, 2007, no. 8, 27:339-342. Doi: 10.1080/00423119708969668.

[3] Pasterkamp W.R., Pacejka H.B. The Tyre as a Sensor to Estimate Friction. *Vehicle System Dynamics*, 2007, no. 7, 27(5): 409-422. Doi: 10.1080/00423119708969339.

[4] Pacejka H.B. *Semi-empirical tyre models in Tyre and Vehicles Dynamics*. Oxford, U.K., Elsevier, 2005, pp. 156–215.

[5] Pacejka H.B. *Tyre and Vehicle Dynamics*. Oxford, Butterworth Heinemann, 2006. 672 p.

[6] Котиев Г.О., Чернышев Н.В., Горелов В.А. Математическая модель криволинейного движения автомобиля с колесной формулой 8×8 при различных способах управления поворотом. *Журнал Ассоциации Автомобильных Инженеров*, 2009, № 2, с. 34–40.

[7] Горелов В.А., Жилейкин М.М., Шинкаренко В.А. Разработка закона динамической стабилизации многоосной колесной машины с индивидуальным приводом движителей. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12. URL: http:// engjournal.ru/catalog/machin/transport/1029.html (дата обращения 10.11.2015).

[8] Котиев Г.О., Сарач Е.Б. *Комплексное подрессоривание высокоподвижных двухзвенных гусеничных машин*. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 184 с.

References

[1] Pirkovskii Iu.V., Shukhman S.B. *Teoriia dvizheniia polnoprivodnogo avtomobilia (prikladnye voprosy optimizatsii konstruktsii shassi)* [The theory of motion-wheel drive vehicle (applied problems of optimization design of the chassis)]. Moscow, IuNITI-DANA publ., 2001. 230 p.

[2] Maurice J.P., Pacejka H.B. Relaxation Length Behaviour of Tyres. *Vehicle System Dynamics*, 2007, no. 8, 27:339-342. Doi: 10.1080/00423119708969668.

[3] Pasterkamp W.R., Pacejka H.B. The Tyre as a Sensor to Estimate Friction. *Vehicle System Dynamics*, 2007, no. 7, 27(5):409-422. Doi: 10.1080/00423119708969339.

[4] Pacejka H.B. *Semi-empirical tyre models in Tyre and Vehicles Dynamics*. U.K., Oxford, Elsevier, 2005, pp. 156–215.

[5] Pacejka H.B. *Tyre and Vehicle Dynamics*. Oxford, Butterworth Heinemann, 2006. 672 p.

[6] Kotiev G.O., Chernyshev N.V., Gorelov V.A. Matematicheskaia model' krivolineinogo dvizheniia avtomobilia s kolesnoi formuloi 8×8 pri razlichnykh sposobakh upravleniia povorotom [Mathematical model of 8×8 vehicle curvilinear motion with various steering systems]. *Zhurnal Assotsiatsii Avtomobil'nykh Inzhenerov* [Zurnal AAI]. 2009, no. 2, pp. 34–40.

[7] Gorelov V.A., Zhileikin M.M., Shinkarenko V.A. Razrabotka zakona dinamicheskoi stabilizatsii mnogoosnoi kolesnoi mashiny s individual'nym privodom dvizhitelei [Controlling dynamic stabilization of a multi-wheeled vehicle with an individual propulsor drive]. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii* [Engineering Journal: Science and Innovation]. 2013, iss. 12. Available at: http:// engjournal.ru/catalog/machin/transport/1029.html (accessed 10 November 2015).

[8] Kotiev G.O., Sarach E.B. *Kompleksnoe podressorivanie vysokopodvizhnykh dvukhzvennykh gusenichnykh mashin* [Integrated cushioning high-mobility articulated tracked vehicle]. Moscow, Bauman Press, 2010. 184 p.

Статья поступила в редакцию 17.11.2015

Информация об авторах

ЖИЛЕЙКИН Михаил Михайлович (Москва) — доктор технических наук, профессор кафедры «Колесные машины». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: jileykin_m@mail.ru).

ПАДАЛКИН Борис Васильевич (Москва) — кандидат технических наук, доцент кафедры «Гусеничные машины». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: cm-10@ya.ru).

Information about the authors

ZHILEYKIN Mikhail Mikhailovich (Moscow) — Doctor of Science (Eng.), Professor, Department of Wheel Vehicles. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: jileykin_m@mail.ru).

PADALKIN Boris Vasilievich (Moscow) — Candidate of Science (Eng.), Associate Professor, Department of Tracked Vehicles. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: cm-10@ya.ru).