

Расчет и конструирование машин


УДК 621.9.07

DOI 10.18698/0536-1044-2016-6-3-12

Метод расчета перемычек при фрезерной обработке*

М.М. Ермолаев¹, И.Л. Волчкевич¹, Е.Г. Полканов², П.А. Быков¹¹ МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1² Холдинг АО «СТАНКОПРОМ», 129110, Москва, Российская Федерация, ул. Гиляровского, д. 65, стр. 1

The Method of Calculating Bridges when Milling

M.M. Ermolaev¹, I.L. Volchkevich¹, E.G. Polkanov², P.A. Bykov²¹ BMSTU, 105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1² Holding Company AO STANKOPROM, 129110, Moscow, Russian Federation, Gilyarovskogo St., Bldg. 65, Block 1 e-mail: mmermolaev@gmail.com, vil@bmstu.ru, pavel-bykov@yandex.ru

i Предложена методика проверочного расчета перемычек, используемых для закрепления заготовок при фрезерной обработке на станках с ЧПУ. Приведены зависимости для определения упругих отжатий заготовки, обусловленных податливостью перемычек, а также для расчета эквивалентных напряжений в перемычках, позволяющие оценить их прочность. Расчет базируется на предположениях, что перемычки — прямоугольные и податливые, а деталь по сравнению с ними — жесткая; концентрацией напряжений в угле перемычки пренебрегают. При этом геометрия изготавливаемой детали может быть произвольной, но допускающей описание аналитическими функциями. Рассмотрены два примера расчета перемычек при фрезеровании, представлены графики эквивалентных напряжений и упругих отжатий. Предложенная методика поможет подобрать правильное число перемычек и скомпенсировать погрешности, возникающие при обработке детали из-за их упругих отжатий, что полезно в случае отсутствия специальных приспособлений для прижима заготовки при фрезеровании.

Ключевые слова: перемычка, фрезерная обработка, упругие отжатия заготовки, прочностной расчет.

i The article introduces the method of checking calculations for bridges that are used for clamping workpieces when they are milled on a CNC machine. Functions are described for determining elastic deflections of the workpiece resulting from the suppleness of the bridges, and for calculating equivalent stresses in the bridges allowing their strength to be estimated. The calculation is based on the premises that bridges are rectangular and malleable, while the workpiece, in comparison, is rigid. Stress concentrations in the corner of the bridge are ignored. The geometry of the manufactured part can be arbitrary but such that it can be described by analytical functions. Two examples of calculating bridges when milling are considered. Graphs of equivalent stresses and elastic deflections are presented. The proposed method can be used for selecting the right number of bridges and compensating for the errors that occur due to elastic deflections when a workpiece is machined. This is useful in the absence of special tools for clamping the workpiece when milling.

Keywords: bridge, milling, elastic deflection of workpiece, strength calculation.

* Работа выполнена в МГТУ им. Н.Э. Баумана при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках выполнения Соглашения о предоставлении субсидии № 14.577.21.0128 (ID RFMEFI57714X0128).

При изготовлении деталей на фрезерных станках с ЧПУ из заготовок типа «плита» возникает проблема закрепления детали при ее вырезании из заготовки [1]. Если деталь имеет достаточно большую площадь, то она удерживается с помощью вакуумного стола. При наличии отверстий и сквозных карманов внутри вырезаемого контура закрепление осуществляют с использованием дополнительных прижимов и специальных приспособлений. В общем случае, когда размеры детали или технологические возможности оборудования не позволяют использовать вакуумный стол, а внутри вырезаемого контура нет отверстий, эту задачу можно решить с использованием перемычек.

Перемычки представляют собой тонкие «мостики» (рис. 1, а), оставляемые на последних проходах фрезы, которые связывают деталь с заготовкой и выламываются на следующей слесарной операции (см. рис. 1, в). Чем меньше размер сечения перемычки, тем проще ее удалить и меньше дефектов останется на обработанной поверхности деталей. Однако при уменьшении размеров сечения перемычек снижается жесткость закрепления, а также их прочность, что может привести к отрыву заготовки от станка во время обработки, браку детали и поломке инструмента.

В настоящее время множество работ посвящено расчету различных технологических приспособлений, в том числе с учетом упругих деформаций заготовки [2], однако вопрос расчета закрепления заготовки с помощью перемычек изучен недостаточно.

Цель работы — изложение методики проверочного расчета перемычек при фрезерной обработке по критериям их прочности и жесткости.

При вырезании детали из заготовки на вертикально-фрезерном станке с ЧПУ окончательную форму перемычки приобретают на послед-

нем проходе фрезы, во время которого в них возникают наибольшие напряжения, способные привести к их разрушению или недопустимым упругим отжатам заготовки. Таким образом, задача о расчете перемычек при контурном фрезеровании сводится к определению напряжений в перемычках на последнем проходе фрезы.

В предлагаемой методике расчета перемычек приняты следующие допущения:

- вырезаемая деталь — жесткая, перемычки — податливые;
- деформации перемычек — упругие;
- концентрация напряжений в углах перемычки незначительна;
- толщина перемычек достаточно мала.

При обработке на вертикально-фрезерных станках с ЧПУ система координат заготовки обычно определяется следующим образом: ось z направлена в сторону шпинделя (вверх), а оси x и y образуют правую тройку векторов.

В большинстве случаев перемычки расположены в плоскости xy , поэтому геометрия детали может быть определена плоским замкнутым контуром. Этот контур определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}(t)$, построенным из начала системы координат заготовки, где t — свободный параметр, изменяющийся от t_0 до t_1 .

В плоскости xy форма перемычки ограничена дугами (см. рис. 1, а), являющимися следом фрезы. В целях упрощения расчета перемычку можно представить как прямоугольный параллелепипед (см. рис. 1, б) длиной a , шириной b и толщиной c . Пронумеровав перемычки от 1 до m можно определить положение i -й перемычки параметром T_i так, что координаты середины прямоугольного «стыка» перемычки с наружной поверхностью детали будут определяться радиусом-вектором $\mathbf{r}(T_i)$ [3].

Если перемычка направлена по нормали к поверхности детали, то ее длина минимальна и

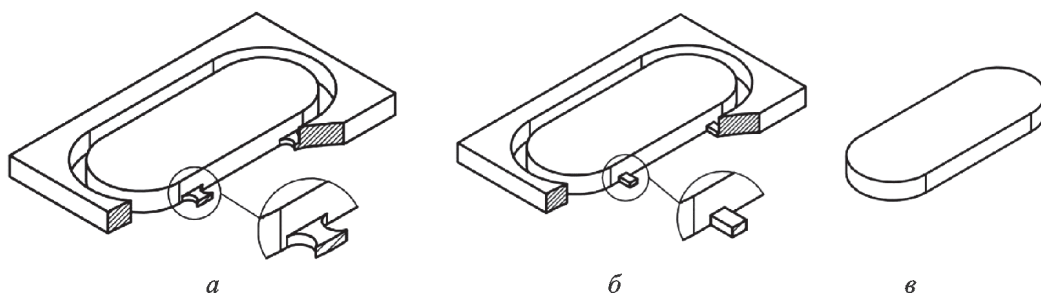


Рис. 1. Деталь после фрезерной обработки:
 а — внешний вид детали, закрепленной на перемычках; б — расчетная схема перемычки;
 в — внешний вид детали после отламывания перемычек

обеспечивается наибольшая жесткость закрепления. Далее будем считать, что все перемычки направлены по нормали к контуру детали в плоскости $xу$. Единичный вектор нормали $\mathbf{n}(t)$ можно выразить через радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{n}(t) = \left[\left(\frac{\partial r_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial r_y}{\partial t} \right)^2 \right]^{-0,5} \begin{pmatrix} -\frac{\partial r_y}{\partial t} \\ \frac{\partial r_x}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Считая деталь твердым телом, ее перемещение во время обработки за счет деформации перемычек можно описать шестью параметрами: перемещениями u, v, w центра масс детали вдоль соответствующих осей координат x, y, z и углами поворота α, β, γ вокруг этих осей. Деформации перемычек также можно описать шестью параметрами в системе координат перемычки x_i, y_i, z_i .

Обозначив $\delta_i = (u_i, v_i, w_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i)^T$ и $\delta = (u, v, w, \alpha, \beta, \gamma)^T$, переход от одной системы координат к другой осуществим в матричной форме:

$$\delta_i = \mathbf{S}(T_i)\delta, \tag{1}$$

где $\mathbf{S}(T_i)$ — матрица перехода от перемещения детали в системе координат заготовки к перемещению конца перемычки в системе координат i -й перемычки.

Эту матрицу можно определить для каждой точки на контуре детали с параметром t . Для ее вычисления следует провести два последовательных преобразования: перенос системы координат в точку $\mathbf{r}(t)$ и ее поворот в плоскости $xу$.

При переносе системы координат к центру масс стька перемычки с деталью, к перемещениям добавятся дополнительные параметры, зависящие от углов поворота детали вокруг осей координат [4]. Считая эти углы малыми, можно определить матрицу переноса

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & r_z(t) & -r_y(t) \\ 0 & 1 & 0 & -r_z(t) & 0 & r_x(t) \\ 0 & 0 & 1 & r_y(t) & -r_x(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В большинстве случаев все перемычки расположены на одном уровне по координате z , и можно принять $r_z = 0$.

При повороте системы координат ось x должна совпасть с нормалью к контуру детали, ось z_i не изменится, а положение оси y_i можно определить так, чтобы оси $x_i y_i z_i$ образовывали правую тройку векторов. Аналогично изменяются углы поворота α_i и β_i . Таким образом, можно определить матрицу поворота

$$\mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} n_x(t) & n_y(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -n_y(t) & n_x(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_x(t) & n_y(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n_y(t) & n_x(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица преобразования $\mathbf{S}(t)$, позволяющая определить перемещения перемычки по перемещениям детали, равна произведению матриц $\mathbf{A}(t)$ и $\mathbf{B}(t)$:

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} n_x(t) & n_y(t) & 0 & -r_z(t)n_y(t) & r_z(t)n_x(t) & \frac{r_y(t)n_x(t) - r_x(t)n_y(t)}{r_x(t)n_x(t) + r_y(t)n_y(t)} \\ -n_y(t) & n_x(t) & 0 & -r_z(t)n_x(t) & -r_z(t)n_y(t) & \frac{r_x(t)n_x(t) + r_y(t)n_y(t)}{r_x(t)n_x(t) + r_y(t)n_y(t)} \\ 0 & 0 & 1 & r_y(t) & -r_x(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_x(t) & n_y(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n_y(t) & n_x(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нагрузки, действующие на i -ю перемычку, можно описать шестью параметрами: силами F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} и моментами M_{ix}, M_{iy}, M_{iz} . Направления сил принимаем положительными, если они приводят к положительным перемещениям u_i, v_i, w_i ; направления моментов принимаем положительными, если они приводят к положительным углам $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ поворота площадки контакта перемычки с деталью. Установим взаимосвязь нагрузок с деформациями перемычки.

Растяжение перемычки u_i пропорционально силе F_{ix} :

$$u_i = \frac{a}{EA} F_{ix}, \tag{2}$$

где E — модуль упругости материала перемычек (заготовки); $A = bc$ — площадь поперечного сечения перемычки.

Угол закручивания перемычки α_i пропорционален моменту M_{ix} :

$$\alpha_i = \frac{a}{GI_k} M_{ix}, \quad (3)$$

где G — модуль сдвига материала заготовки, $G = E/[2(1 + \mu)]$ (μ — коэффициент Пуассона); $I_k = k_1 bc^3$ — момент инерции сечения перемычки на кручение. Поскольку $c \ll b$, коэффициент k_1 принимаем равным $1/3$.

Прогиб перемычки v_i и угол поворота ее поперечного сечения γ_i зависят от поперечной силы F_{iy} и изгибающего момента M_{iz} . Поскольку длина перемычки a соизмерима с ее шириной b , при расчете прогиба необходимо учитывать деформацию сдвига [5] из-за поперечной силы наряду с изгибными деформациями, т. е. $v_i = v'_i + v''_i$, где v'_i и v''_i — прогиб перемычки, обусловленный сдвигом ее поперечных сечений и ее изгибом соответственно.

Прогиб перемычки, обусловленный сдвигом ее поперечных сечений, определяют по формуле

$$v'_i = \frac{ak_2}{GA} F_y, \quad (4)$$

где k_2 — коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по сечению перемычки; для прямоугольного сечения $k_2 = 6/5$ [6].

Прогиб перемычки, обусловленный ее изгибом, а также угол поворота ее поперечного сечения связаны с внутренними силовыми факторами в перемычке следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \frac{dv''_i}{dx} &= \gamma_i(x); \\ \frac{d^2 v''_i}{dx^2} &= \frac{M_{iz}(x)}{EI_z}; \\ \frac{d^3 v''_i}{dx^3} &= \frac{F_{iy}(x)}{EI_z}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $v''_i(x)$, $\gamma_i(x)$, $M_{iz}(x)$, $F_{iy}(x)$ — функции распределения прогиба, угла поворота поперечного сечения, изгибающего момента и поперечной силы по длине перемычки; $I_z = cb^3/12$ — момент инерции сечения перемычки относительно оси z . Поперечная сила не зависит от длины перемычки и равна F_{iy} . Считая заготовку достаточно жесткой и неподвижной, можно записать

$$\begin{aligned} v''_i(0) &= 0; \\ \gamma_i(0) &= 0; \\ M_{iz}(a) &= M_{iz}. \end{aligned} \quad (6)$$

Интегрируя выражение (5) с учетом формул (6), получим взаимосвязь прогиба перемычки $v''_i = v''_i(a)$ и угла поворота ее поперечного сечения $\gamma_i = \gamma_i(a)$ от поперечной силы и изгибающего момента. С учетом выражения (4), получим

$$\begin{aligned} v_i &= \left(\frac{ak_2}{GA} + \frac{a^3}{3EI_z} \right) F_{iy} + \frac{a^2}{2EI_z} M_{iz}; \\ \gamma_i &= \frac{a^2}{2EI_z} F_{iy} + \frac{a}{EI_z} M_{iz}. \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогично получим взаимосвязь между прогибом перемычки w_i , углом поворота ее поперечных сечений β_i , поперечной силой F_{iz} и изгибающим моментом M_{iy} :

$$\begin{aligned} w_i &= \left(\frac{ak_2}{GA} + \frac{a^3}{3EI_y} \right) F_{iz} + \frac{a^2}{2EI_y} M_{iy}; \\ \beta_i &= \frac{a^2}{2EI_y} F_{iz} + \frac{a}{EI_y} M_{iy}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $I_y = bc^3/12$ — момент инерции сечения перемычки относительно оси y .

Обозначив $\mathbf{F}_i = (F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}, M_{ix}, M_{iy}, M_{iz})^T$, взаимосвязь между нагрузками, действующими на перемычку, и ее перемещениями запишем в матричной форме:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{J} \boldsymbol{\delta}_i, \quad (9)$$

где \mathbf{J} — матрица жесткости перемычки, одинаковая для всех перемычек.

Выразив в соотношениях (2)–(8) нагрузки через перемещения, после преобразований получим

$$\mathbf{J} = \frac{Ebc}{a} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_b & 0 & 0 & 0 & \frac{ak_b}{2} \\ 0 & 0 & k_c & 0 & \frac{ak_c}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c^2 k_1}{2(1+\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ak_c}{2} & 0 & \frac{c^2}{12} + \frac{a^2 k_c}{4} & 0 \\ 0 & \frac{ak_b}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{b^2}{12} + \frac{a^2 k_b}{4} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где k_b, k_c — безразмерные коэффициенты, определяемые по формулам

$$k_b = \frac{b^2}{2(1+\mu)k_2 b^2 + a^2}; \quad k_c = \frac{c^2}{2(1+\mu)k_2 c^2 + a^2}.$$

Для записи уравнений равновесия детали необходимо перевести нагрузки, действующие на перемычки, в систему координат заготовки. Это можно сделать, задав произвольное малое перемещение δ детали и оценив работу упругих сил на этом перемещении. Работа упругих сил \mathbf{F} в системе координат заготовки $W_1 = \delta^T \mathbf{F}$, а работа упругих сил в системе координат перемычки $W_2 = \delta_i^T \mathbf{F}_i$. Поскольку численное значение работы не зависит от системы координат, $W_1 = W_2$:

$$\delta^T \mathbf{F} = \delta_i^T \mathbf{F}_i = [\mathbf{S}(T_i) \delta]^T \mathbf{F}_i = \delta^T \mathbf{S}(T_i)^T \mathbf{F}_i.$$

После преобразований получим

$$\mathbf{F} = \mathbf{S}(T_i)^T \mathbf{F}_i. \quad (11)$$

Таким образом, матрица преобразования нагрузок в i -й перемычке к системе координат заготовки равна $\mathbf{S}(T_i)^T$.

Уравнения равновесия устанавливают связь между нагрузками в перемычках в системе координат заготовки и внешними нагрузками, создаваемыми силами резания.

При фрезеровании сила резания раскладывается на окружную составляющую F_t , действующую по касательной к контуру заготовки, радиальную составляющую F_r , действующую по нормали к заготовке, и силу F_a , действующую вдоль оси фрезы (вертикально), причем эти составляющие можно считать постоянными во время обработки. Запишем эти силы в виде вектора $\mathbf{F}_c = (F_r, -F_t, F_a, 0, 0, 0)^T$. Поскольку направления сил в векторе \mathbf{F}_c аналогичны направлениям нагрузок к воображаемой перемычке, находящейся на контуре заготовки в точке ее касания с фрезой, для перевода вектора \mathbf{F}_c в систему координат заготовки можно использовать матрицу $\mathbf{S}(t)^T$.

Записав уравнения равновесия детали в системе координат заготовки, с учетом выражений (1), (9), (11) после преобразований получим

$$\delta(t) = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{S}(t)^T \mathbf{F}_c, \quad (12)$$

где \mathbf{K} — матрица жесткости закрепления, определяемая соотношением

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^m \mathbf{S}(T_i)^T \mathbf{J} \mathbf{S}(T_i). \quad (13)$$

Матрица \mathbf{K} — симметричная, что упрощает решение уравнения (12). Отметим, что способ составления матрицы \mathbf{K} аналогичен применяемому при расчете конструкций методом конечных элементов [2].

Выражение (12) позволяет определить перемещения детали за счет упругих деформаций перемычек для каждого положения фрезы, определяемого параметром t . Это позволяет определить упругие отжатия детали в области резания и оценить напряжения в перемычках.

На точность обработки в первую очередь влияет проекция вектора упругого перемещения на нормаль к контуру детали, которая имеет вид

$$\Delta(t) = [\mathbf{S}(t) \delta(t)]_x. \quad (14)$$

Условие жесткости перемычек заключается в том, что максимальное упругое отжатие детали, определенное по формуле (14), не должно превышать допустимого значения. Фактический контур детали с учетом упругих отжатий заготовки можно определить радиусом-вектором

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{r}(t) - \Delta(t) \mathbf{n}(t). \quad (15)$$

Распределение напряжений в перемычке обусловлено [7] соотношением нагрузок в векторе \mathbf{F}_i и размеров перемычки. Предполагая, что наиболее нагруженной точкой является один из углов прямоугольной площадки контакта перемычки с деталью, определим напряжения в этой точке. Нормальное напряжение в угле сечения перемычки складывается из напряжения от растяжения перемычки и ее изгиба в двух плоскостях. В наиболее нагруженном угле абсолютное значение этого напряжения

$$|\sigma_i| = \left| \frac{F_{ix}}{A} \right| + \left| \frac{M_{iy}}{W_y} \right| + \left| \frac{M_{iz}}{W_z} \right|, \quad (16)$$

где W_y , W_z — моменты сопротивления поперечного сечения перемычки, $W_y = bc^2/6$, $W_z = cb^2/6$.

Поскольку к сторонам перемычки, не контактирующим с деталью, внешняя нагрузка не приложена, напряжение, определенное по формуле (16) можно считать эквивалентным. Условие прочности перемычек заключается в том, что эквивалентное напряжение в них, определенное по формуле (16), не должно превышать предел прочности материала заготовки.

Рассмотрим два примера расчета перемычек по предлагаемой методике.

Пример 1. Деталь «фланец корпуса редуктора» [8] (рис. 2, а) из алюминиевого сплава Д16Т вырезают фрезой диаметром $d_{фр} = 8$ мм. Требуемая точность обработки составляет 0,02 мм.

Параметры детали: $r_1 = 83$ мм — радиус средней части; $r_2 = 45$ мм — радиус крайней части; $L = 90$ мм — расстояние между центрами дуг радиусами r_1 и r_2 .

1. Контур детали ограничен отрезками прямых линий и дугами окружностей. Определим некоторые опорные точки на контуре детали, обозначенные на рис. 2, а (под точкой будем понимать радиус-вектор из начала координат заготовки):

- $\mathbf{O} = (0; 0)^T$ — начало координат;
- $\mathbf{A} = (L; 0)^T$ — центр дуги радиусом r_2 ;
- \mathbf{B}, \mathbf{C} — точки сопряжения дуг радиусами r_1 и r_2 с прямым участком контура, заданные соотношениями

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + \frac{r_2}{L} \begin{bmatrix} r_1 - r_2 \\ \sqrt{L^2 - (r_1 - r_2)^2} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C} = \frac{r_1}{L} \begin{bmatrix} r_1 - r_2 \\ \sqrt{L^2 - (r_1 - r_2)^2} \end{bmatrix};$$

- $\mathbf{D} = (-C_x; C_y)$, $\mathbf{E} = (-B_x; B_y)$ — точки, симметричные точками \mathbf{C} и \mathbf{B} относительно оси y .

Определим также угол конца дуги радиусом r_2 от оси x : $\varphi = \arctg(C_y/C_x)$.

Независимо от программной среды [9–11], в которой будет проводиться расчет по предлагаемой методике, удобно использовать аналитические функции, описывающие контур детали. Обозначим эти функции **line** и **arc** (для описания прямых участков и дуг соответственно).

Для описания контура введем дополнительные функции, задающие эти кривые параметрически. Функция **line**($t, \mathbf{A}, \mathbf{B}$) задает отрезок прямой от точки \mathbf{A} до точки \mathbf{B} :

$$\mathbf{line}(t, \mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{A} + (\mathbf{B} - \mathbf{A})t.$$

Функция **arc**($t, \mathbf{C}, r, \varphi_A, \varphi_B$) задает дугу с центром в точке \mathbf{C} и радиусом r , начинающуюся из угла φ_A и заканчивающуюся на угле φ_B от оси x :

$$\mathbf{arc}(t, \mathbf{C}, r, \varphi_A, \varphi_B) = \mathbf{C} + r \begin{bmatrix} \cos[\varphi_A + (\varphi_B - \varphi_A)t] \\ \sin[\varphi_A + (\varphi_B - \varphi_A)t] \end{bmatrix}.$$

Отметим, что такое задание функций **line** и **arc** предполагает, что параметр $t = 0$ в начале линии и $t = 1$ в конце линии. Контур детали с помощью функций **line** и **arc** можно задать следующими соотношениями:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{line}(t, \mathbf{B}, \mathbf{C}), & \text{если } 0 \leq t < 1; \\ \mathbf{arc}(t - 1, \mathbf{O}, r_1, \varphi, \pi - \varphi), & \text{если } 1 \leq t < 2; \\ \mathbf{line}(t - 2, \mathbf{D}, \mathbf{E}), & \text{если } 2 \leq t < 3; \\ \mathbf{arc}(t - 3, -\mathbf{A}, r_2, \pi - \varphi, \pi + \varphi), & \text{если } 3 \leq t < 4; \\ \mathbf{line}(t - 4, -\mathbf{B}, -\mathbf{C}), & \text{если } 4 \leq t < 5; \\ \mathbf{arc}(t - 5, \mathbf{O}, r_1, \pi + \varphi, 2\pi - \varphi), & \text{если } 5 \leq t < 6; \\ \mathbf{line}(t - 6, -\mathbf{D}, -\mathbf{E}), & \text{если } 6 \leq t < 7; \\ \mathbf{arc}(t - 7, \mathbf{A}, r_2, -\varphi, \varphi), & \text{если } 7 \leq t < 8. \end{cases}$$

Параметр t может изменяться от 0 до 8, принимая целые значения на концах линий контура.

2. Зададим размеры и положение перемычек.

Длину перемычки a следует взять наименьшей (но не менее диаметра фрезы) для обеспечения жесткости и прочности закрепления, а также для экономии материала. Принимаем $a = d_{\text{фр}} = 8$ мм. Толщину перемычки c следует взять наименьшей для уменьшения дефектов поверхности после удаления перемычки, но кратной глубине фрезерования за один проход. Задавая глубину резания 1 мм за проход, принимаем $c = 1$ мм. Ширину перемычки b можно варьировать для обеспечения прочности и жесткости перемычек. Предварительно принимаем $b = a = 8$ мм. Принимая число перемычек $m = 4$, расположим их симметрично в серединах прямых сторон детали (рис. 2, б). Этому соответствуют параметры $T_1 = 0,5$; $T_2 = 2,5$; $T_3 = 4,5$; $T_4 = 6,5$.

3. Определив для сплава Д16Т модуль упругости $E = 70 \cdot 10^3$ МПа, $\mu = 0,35$, рассчитаем матрицу жесткости перемычки \mathbf{J} по выражению (10). По формуле (13) определим матрицу жесткости закрепления \mathbf{K} и инвертируем ее.

4. Задав режим резания, определим силы резания — $F_t = 300$ Н, $F_r = 120$ Н, $F_a = 90$ Н [12] — и составим вектор $\mathbf{F}_c = (F_r, -F_t, F_a, 0, 0, 0)^T$.

5. По формулам (12), (14) построим распределение упругих перемещений заготовки в проекциях на нормаль к ее контуру. Фактический контур получаемой детали с учетом упругих отжаний заготовки, рассчитанный по формуле (15), приведен на рис. 2, б (для наглядности масштаб упругого смещения составляет 1 мм/мкм). Максимальное смещение, определенное по формуле (14), составит 3 мкм, что удовлетворяет требованиям точности обработки.

6. По формуле (16) построим распределение эквивалентных напряжений во всех перемыч-

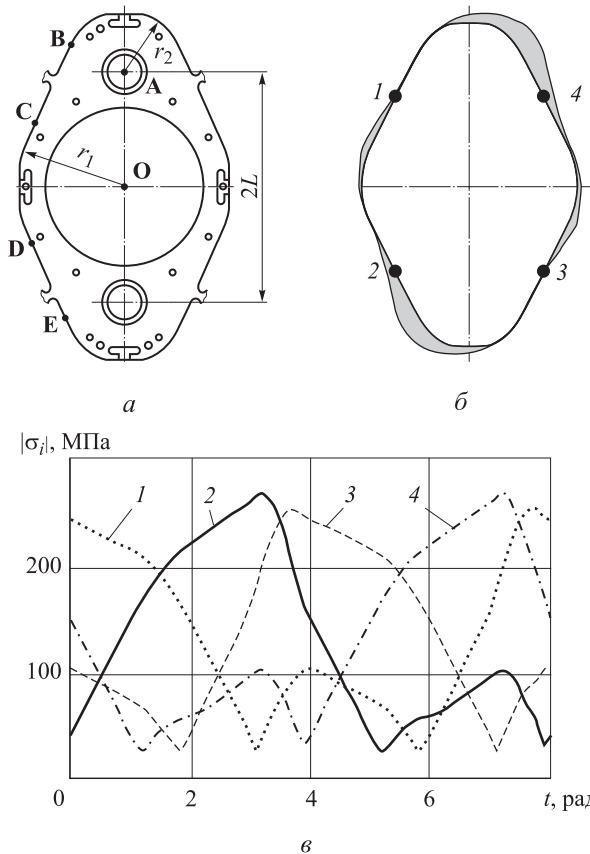


Рис. 2. К расчету перемычек при изготовлении фланца редуктора:

a — эскиз детали; *б* — фактический контур детали с учетом упругих отжатый заготовки (1–4 — перемычки); *в* — эквивалентные напряжения в углах перемычек при движении фрезы вокруг контура (кривые 1–4 соответствуют номерам перемычек)

ках (рис. 2, *в*). Анализ графика этого распределения показывает, что максимальные эквивалентные напряжения составляют 250 МПа. Сопоставляя это значение с пределом прочности сплава Д16Т (400 МПа) делаем вывод, что прочность перемычек обеспечена.

Пример 2. Деталь «циклоидальный сателлит микроредуктора» [13] (рис. 3, *a*) из стали 40Х вырезают фрезой диаметром $d_{фр} = 0,2$ мм. Требуемая точность обработки составляет 0,002 мм. Параметры детали: $z_1 = 21$ — число зубьев сателлита; $z_2 = 22$ — число зубьев сопрягаемого колеса; $d_2 = 6$ мм — делительный диаметр сопрягаемого колеса; $e = 0,1$ мм — эксцентриситет; $d_p = 0,3$ мм — диаметр цевки сопрягаемого колеса.

1. Профиль циклоидального сателлита образован эквидистантой к укороченной эпициклоиде, определяемой радиусом-вектором [13]

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{E}(t) + \frac{d_p}{2} \mathbf{N}(t),$$

где $\mathbf{E}(t)$ — радиус-вектор, определяющий укороченную эпициклоиду; $\mathbf{N}(t)$ — вектор нормали к укороченной эпициклоиде; t — свободный параметр, изменяющийся от 0 до 2π .

Укороченную эпициклоиду определяют по соотношению [8]

$$\mathbf{E}(t) = \frac{d_2}{2} \begin{pmatrix} \sin t - \frac{\lambda}{z_2} \sin(z_2 t) \\ \cos t - \frac{\lambda}{z_2} \cos(z_2 t) \end{pmatrix},$$

где $\lambda = 2ez_2/d_2$ — коэффициент укорочения эпициклоиды.

Нормаль к этой кривой имеет вид

$$\mathbf{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos(z_1 t)}} \begin{pmatrix} \lambda \sin(z_2 t) - \sin t \\ \lambda \cos(z_2 t) - \cos t \end{pmatrix}.$$

Отметим, что при таком задании нормали к эпициклоиде, нормаль к ее эквидистанте $\mathbf{n}(t) = -\mathbf{N}(t)$.

2. Зададим размеры и положение перемычек.

Принимаем $a = d_{фр} = 0,2$ мм; $c = 0,05$ мм; $b = a = 0,2$ мм. Принимая число перемычек $m = 3$, расположим их симметрично на вершинах

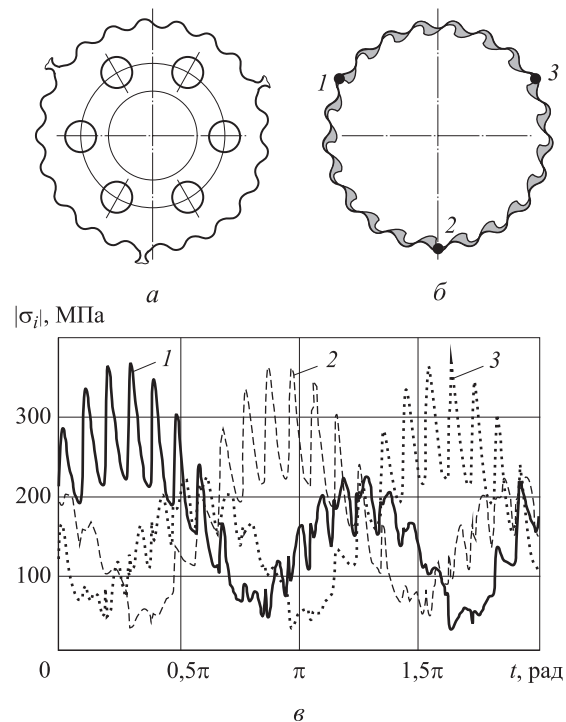


Рис. 3. К расчету перемычек при изготовлении сателлита:

a — эскиз детали; *б* — фактический контур детали с учетом упругих отжатый заготовки (1–3 — перемычки); *в* — эквивалентные напряжения в углах перемычек при движении фрезы вокруг контура (кривые 1–3 соответствуют номерам перемычек)

зубьев сателлита (рис. 3, б). Этому соответствуют параметры $T_1 = \pi/3$, $T_2 = \pi$, $T_3 = 5\pi/3$.

3. Определив для стали 40X модуль упругости $E = 2,15 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0,3$, рассчитаем матрицу жесткости перемычки \mathbf{J} по формуле (10). По выражению (13) определим матрицу жесткости закрепления \mathbf{K} и инвертируем ее.

4. Задавшись режимом резания, определим силу резания — $F_t = 1$ Н, $F_r = 0,4$ Н, $F_a = 0,3$ Н — и составим вектор $\mathbf{F}_c = (F_r, -F_t, F_a, 0, 0, 0)^T$.

5. По формулам (12), (14) построим распределение упругих перемещений заготовки в проекциях на нормаль к ее контуру. Фактический контур получаемой детали с учетом упругих отжатий заготовки, рассчитанный по формуле (15), приведен на рис. 3, б (для наглядности масштаб упругого смещения составляет 1 мм/мкм). Максимальное смещение, определенное по формуле (14), составит 0,3 мкм, что удовлетворяет требованиям точности обработки.

6. По формуле (16) построим распределение эквивалентных напряжений во всех перемычках (рис. 3, в). Анализ графика этого распределения показывает, что максимальные эквива-

лентные напряжения составляют 380 МПа. Сопоставляя это значение с пределом прочности стали 40X (650 МПа), делаем вывод, что прочность перемычек обеспечена.

Выводы

1. Предложенная методика подходит для проверочного расчета перемычек при изготовлении деталей различной конфигурации на фрезерных станках с ЧПУ. При этом вырезаемый контур может быть описан произвольными аналитическими функциями.

2. Упругие отжатия заготовки во время обработки, обусловленные деформациями перемычек, могут быть определены по формуле (14). Фактический след инструмента с учетом упругих отжатий может быть определен по формуле (15).

3. Эквивалентные напряжения в перемычках во время обработки могут быть определены по формуле (16). Если на всей траектории фрезы они не превышают предел прочности материала заготовки, прочность перемычек можно считать обеспеченной.

Литература

- [1] Фролов В.К., Гладский М.Н. Аналитическое решение задачи определения упругих деформаций инструмента при контурном фрезеровании концевыми фрезами. *Вестник НТУУ КПИ. Сер. Машиностроение*, 2011, № 63, с. 171–174.
- [2] Киселев И.А. *Моделирование динамики процесса фрезерования тонкостенных сложнопрофильных деталей*. Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Москва, 2013. 16 с.
- [3] Подувальцев В.В., Хлыстунов М.С., Могилюк Ж.Г. 77-30569/252202 Метрологические характеристики численного моделирования и расчета резонансных частот методом конечных элементов. *Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2011, № 12, 55 с. URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/252202.html> (дата обращения 25 февраля 2016).
- [4] Чертищев В.В., Чертищев В.В. Расчет полей температур и тепловых потоков в неподвижной среде методом конечных элементов. *Известия АлтГУ*, 2011, № 1–2, с. 176–180.
- [5] Сагдеева Ю.А., Копысов С.П., Новиков А.К. *Введение в метод конечных элементов*. Ижевск, Изд-во Удмуртский университет, 2011. 44 с.
- [6] Осипов А.А., Першин В.Ф., Першина С.В. *Сопротивление материалов*. Ч. 2. Тамбов, ТГТУ, 2011. 80 с.
- [7] Билецкий Е.О., Гуськов А.М., Ряховский О.А., Фирсов Е.П. Особенности проектирования упругой компенсирующей муфты. Ч. 1: Расчет упругого элемента при соосном расположении валов. *Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2010, № 12. URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/163921.html> (дата обращения 25 февраля 2016).
- [8] Фомин М.В. *Планетарно-цевочные передачи*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. 64 с.
- [9] Щуров И.А., Болдырев И.С. Моделирование процесса резания заготовок из композитных материалов с применением метода конечных элементов. *Вестник ЮУрГУ. Сер. Машиностроение*, 2012, № 12 (271), с. 143–147.
- [10] Репецкий О.В., До М.Т. Математическое моделирование и численный анализ колебаний идеальных циклически-симметрических систем методом конечных элементов. *Известия ИГЭА*, 2012, № 3, с. 149–153.

- [11] Фокин В.Г., Дмитриев В.А. Определение методом конечных элементов дополнительных остаточных напряжений при разрезке деталей. *Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки*, 2009, № 1 (18), с. 95–100.
- [12] Михайлов В.А., Иванников С.Н., Мокринская А.Ю. Определение характеристик режущего инструмента методом конечных элементов. *Известия МГТУ «МАМИ»*, 2010, № 1, с. 132–135.
- [13] Киреев С.О. *Теоретические основы методов анализа и синтеза планетарных механизмов с внецентроидным цевочным зацеплением*. Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. Новочеркасск, 2002. 20 с.

References

- [1] Frolov V.K., Gladskii M.N. Analiticheskoe reshenie zadachi opredeleniia uprugikh deformatsii instrumenta pri konturnom frezerovanii kontsevymi frezami [The analytical solution of the problem of determining the elastic deformation of the tool during contour milling end mills]. *Vestnik NTUU KPI. Ser. Mashinostroenie* [Journal of Mechanical Engineering the National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute»]. 2011, no. 63, pp. 171–174.
- [2] Kiselev I.A. *Modelirovanie dinamiki protsessa frezerovaniia tonkostennykh slozhnoprofil'nykh detalei*. Diss. kand. tekhn. nauk [Modeling the dynamics of the milling process of thin-walled parts slozhnoprofilnykh. Cand. tech. sci. diss.]. Moscow, 2013. 16 p.
- [3] Poduval'tsev V.V., Khlystunov M.S., Mogiliuk Zh.G. Metrologicheskie kharakteristiki chislennogo modelirovaniia i rascheta rezonansnykh chastot metodom konechnykh elementov [Metrological characteristics of resonant frequencies numerical modelling and calculation by the finite element method]. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Bauman* [Science and Education. Bauman MSTU]. 2011, no. 12. Available at: <http://technomag.bmstu.ru/doc/252202.html> (accessed 25 February 2016).
- [4] Chertishchev V.V., Chertishchev V.V. Raschet polei temperatur i teplovykh potokov v nepodvizhnoi srede metodom konechnykh elementov [Calculating Temperature Fields and Heat Flows in Motionless Medium by Finite Element Method]. *Izvestiia AltGU* [News of Altai State University]. 2011, no. 1–2, pp. 176–180.
- [5] Sagdeeva Iu.A., Kopysov S.P., Novikov A.K. *Vvedenie v metod konechnykh elementov* [Introduction to finite element method]. Izhevsk, Udmurtskii universitet publ., 2011. 44 p.
- [6] Osipov A.A., Pershin V.F., Pershina S.V. *Soprotivlenie materialov. Ch. 2* [Strength of materials. Pt. 2]. Tambov, TSTU publ., 2011. 80 p.
- [7] Biletskii E.O., Gus'kov A.M., Riakhovskii O.A., Firsov E.P. Osobennosti proektirovaniia uprugoi kompensiruiushchei mufty. Ch. 1. Raschet uprugogo elementa pri soosnom raspolozhenii valov [Design features an elastic compensating coupling. Pt. 1. Calculation of the elastic element in the coaxial shafts]. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Bauman* [Science and Education. Bauman MSTU]. 2010, no. 12. Available at: <http://technomag.bmstu.ru/doc/163921.html> (accessed 25 February 2016).
- [8] Fomin M.V. *Planetarno-tsevochnye peredachi* [Planetary transmission-lantern]. Moscow, Bauman Press, 2009. 64 p.
- [9] Shchurov I.A., Boldyrev I.S. Modelirovanie protsessa rezaniia zagotovok iz kompozitnykh materialov s primeneniem metoda konechnykh elementov [Finite element method calculation of free orthogonal cutting of composite materials]. *Vestnik IuUrGU. Ser. Mashinostroenie* [Bulletin of the SUSU, Series «Mechanical engineering industry»]. 2012, no. 12 (271), pp. 143–147.
- [10] Repetskii O.V., Do M.T. Matematicheskoe modelirovanie i chislennyi analiz kolebanii ideal'nykh tsiklicheski-simmetricheskikh sistem metodom konechnykh elementov [Mathematical modeling and numerical analysis of vibrations of ideal cyclic symmetric systems by finite element method]. *Izvestiia IGEA* [Izvestiya of Irkutsk State Economics Academy]. 2012, no. 3, pp. 149–153.
- [11] Fokin V.G., Dmitriev V.A. Opredelenie metodom konechnykh elementov dopolnitel'nykh ostatochnykh napriazhenii pri razrezke detalei [Determination of the finite element method

- of additional residual stresses in cutting parts]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Ser. «Fiziko-matematicheskie nauki»* [Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences]. 2009, no. 1 (18), pp. 95–100.
- [12] Mikhailov V.A., Ivannikov S.N., Mokrinskaia A.Iu. Opredelenie kharakteristik rezhushchego instrumenta metodom konechnykh elementov [Capability Check of the Cutting Tool by Method of Final Elements]. *Izvestiia MGTU «MAMI»* [Proceedings of the MSTU «MAMI»]. 2010, no. 1, pp. 132–135.
- [13] Kireev S.O. *Teoreticheskie osnovy metodov analiza i sinteza planetarnykh mekhanizmov s vnetsentroidnym tsevochnym zatsepleniem*. Diss. dokt. tekhn. nauk [Theoretical foundations of methods of analysis and synthesis of planetary mechanisms with non-centrode pin engagement. Dr. tech. sci. diss.]. Novocherkassk, 2002. 20 p.

Статья поступила в редакцию 25.03.2016

Информация об авторах

ЕРМОЛАЕВ Михаил Михайлович (Москва) — кандидат технических наук, ассистент кафедры «Металлорежущие станки». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: mmermolaev@gmail.com).

ВОЛЧКЕВИЧ Илья Леонидович (Москва) — доктор технических наук, профессор кафедры «Технология машиностроения». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: vil@bmstu.ru).

ПОЛКАНОВ Евгений Георгиевич (Москва) — кандидат технических наук, советник генерального директора холдинга АО «СТАНКОПРОМ» (129110, Москва, Российская Федерация, ул. Гиляровского, д. 65, стр. 1).

БЫКОВ Павел Анатольевич (Москва) — ассистент кафедры «Металлорежущие станки». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: pavel-bykov@yandex.ru).

Information about the authors

ERMOLAEV Mikhail Mikhailovich (Moscow) — Candidate of Science (Eng.), Assistant, Department of Metal-Cutting Machine Tools. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: mmermolaev@gmail.com).

VOLCHKEVICH Iliya Leonidovich (Moscow) — Doctor of Science (Eng.), Professor, Department of Technologies of Mechanical Engineering. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: vil@bmstu.ru).

POLKANOV Evgeniy Georgievich (Moscow) — Candidate of Science (Eng.), Advisor to the General Director, Holding Company AO STANKOPROM (129110, Moscow, Russian Federation, Gilyarovskogo St., Bldg. 65, Block 1).

BYKOV Pavel Anatolievich (Moscow) — Teaching Assistant, Department of Metal-Cutting Machine Tools. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: pavel-bykov@yandex.ru).