

Технология и технологические машины

УДК 539.374.1, 539.381, 539.4.012

DOI 10.18698/0536-1044-2016-6-62-72

Процессы сложного нагружения в технологических задачах

П.М. Винник, К.М. Иванов

«Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова», 190005,
Санкт-Петербург, Российская Федерация, 1-я Красноармейская ул., д. 1

Combined Loading Processes in Technological Problems

P.M. Vinnik, K.M. Ivanov

Baltic State Technical University VOENMEH named after D.F. Ustinov, 190005, Saint-Petersburg, Russian Federation,
1st Krasnoarmeyskaya St., Bldg. 1

@ e-mail: vinnik.pm@gmail.com, Rector@bstu.spb.su

i Оценка близости моделируемого процесса к монотонному либо к другим частным случаям сложного нагружения, позволяющая прогнозировать погрешность реологической модели, является актуальной задачей. Рассмотрены процессы сложного нагружения с точки зрения сохранения их однозначной определенности — близости к монотонным процессам по определению Г.А. Смирнова-Аляева. На основе классификации процессов сложного нагружения по характеру изменения показателя вида деформации и угла поворота направляющего тензора деформаций предложен алгоритм выбора реологической модели — зависимости напряжений от деформаций — для практических расчетов. Показано, что квазипростое нагружение в общей теории пластичности имеет естественное описание в рамках этой классификации. Предложен скалярный параметр, позволяющий количественно оценить степень близости произвольного процесса сложного нагружения к монотонному, на основе этого параметра — понятия слабо и сильно немонотонных процессов. Приведен пример практического применения построенной меры близости. Для деформации кручения стержня круглого сечения проведена оценка возможной ошибки, возникающей вследствие применения предложенного алгоритма выбора реологической модели. Результаты работы могут быть применены для прогнозирования адекватности численных моделей технологических процессов металлообработки.

Ключевые слова: процессы сложного нагружения, монотонная деформация, мера отклонения от монотонности, реологическая модель.

i The estimation of proximity of a modelled process to monotonic or other specific combined loading cases, which helps to predict rheological model imprecisions, is an important task. This paper describes combined loading processes in terms of maintaining their unique determination — proximity to the monotonic process determined by Smirnov-Alyayev. The authors developed an algorithm of selection of a rheological model (the stress-strain curve) based on the classification of combined loading processes according to the change of

deformation type and rotation angle of the directing tensor of deformation. The emphasis is put on the practical use of this algorithm. It is shown that quasi-simple loading in the general theory of plasticity can be described naturally in this classification. A scalar parameter is proposed, which helps to evaluate the proximity of an arbitrary combined loading process to a monotonic one. Based on this parameter, the concepts of weakly non-monotonic and strongly non-monotonic processes are introduced. An example of practical use of the proximity measure is given. For torsion deformation of a round rod, the authors carried out an evaluation of possible errors that may occur when the proposed algorithm of rheological model selection is used. The results of this research can be used to predict the adequacy of numerical models for metalworking technological processes.

Keywords: combined loading processes, monotonic deformation, measure of deviation from monotony, rheological model.

Решение современных задач конструкторской и технологической подготовки производства связано с применением методов математического моделирования и прогнозирования параметров процессов. В настоящее время широкое распространение получили методы численного расчета полей напряжений и деформаций, позволяющие прогнозировать технологические параметры в процессах механообработки.

Однако эффективные процедуры реализации численных методов технологической механики находятся в противоречии с обоснованностью используемых в расчетах реологических моделей материалов. В основном применяют простейшие модели изотропной упругопластической среды, не всегда адекватно описывающие моделируемые явления. Разработанные в трудах А.А. Ильюшина [1] и его учеников теоретические положения сложного нагружения важны для понимания механики процессов, но практически нереализуемы в расчетах вследствие алгоритмических сложностей.

В данной работе с комплексных информационно-системных позиций рассмотрен вопрос моделирования процессов сложного нагружения, в основе которого лежит оценка адекватности применяемых моделей.

Цель работы — построение количественной оценки близости процесса к монотонному и демонстрация применения этой оценки.

Информационно-системная схема численного моделирования процесса металлообработки с учетом сложного нагружения приведена на рис. 1.

На схеме показано, что выбор определенных реологических соотношений будет определяться не только теоретическими положениями механики, но и требуемой адекватностью модели, погрешностями численного решения задачи и

точностью определения констант реологических соотношений материалов.

В Балтийском государственном техническом университете «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова разработана теория и классификация процессов сложного нагружения, в основе которой лежит характер изменения показателя V_ϵ вида деформации и угла поворота α направляющего тензора деформаций [2]. Согласно указанной классификации, все процессы сложного нагружения разделяют на четыре основные группы (см. таблицу).

Наиболее просты для моделирования монотонные процессы, позволяющие корректно применить гипотезу о пропорциональности компонентов тензоров напряжений и приращений деформаций. Кроме того, для монотонных процессов справедлива гипотеза единой кривой, позволяющая использовать для определения констант реологической модели любые испытания материалов на растяжение и сжатие.

Следует отметить, что использование в расчетах монотонных процессов реологических моделей, полученных при испытаниях материалов в условиях немонотонной деформации



Рис. 1. Информационно-системная схема численного моделирования (НДС — напряженно-деформированное состояние)

Классификация процессов сложного нагружения

Параметры классификации	Технологический процесс			Определение зависимости напряжений от деформаций по результатам испытания образцов:
	Название	Категория	Примеры	
$v_{\dot{\epsilon}} = \text{const}$, $\alpha = 0$	Монотонный	Монотонный	Штамповка, гибка, вытяжка и т. п.	на растяжение
$v_{\dot{\epsilon}} \neq \text{const}$, $\alpha = 0$	Однонаправленный	Частично немонотонный	Штамповка в открытых штампах, осадка	на сжатие (растяжение)
$v_{\dot{\epsilon}} = \text{const}$, $\alpha \neq 0$	Односдвиговый	Частично немонотонный	Чистовая вырубка, резка	на кручение
$v_{\dot{\epsilon}} \neq \text{const}$, $\alpha \neq 0$	Сложного нагружения	Немонотонный	Сферодвижная штамповка, раскатка деталей	в условиях сложного нагружения (растяжение + кручение; сжатие + кручение)

(например, при кручении), является некорректным.

Однако в расчетной практике монотонные процессы встречаются нечасто. В то же время огромное количество технологических задач связано с анализом процессов, близких к монотонным. В связи с этим оценка близости моделируемого процесса к монотонному или другим частным случаям сложного нагружения, позволяющая прогнозировать погрешность реологической модели, является актуальной.

Различные возможности однозначной определенности процесса деформации. А.А. Ильюшин доказал, что при так называемом простом нагружении [1], при котором внешние силы от начала их приложения возрастают пропорционально общему параметру, принятие гипотезы единой кривой обосновано.

При простом нагружении угол вида напряженного состояния, коэффициент Лоде-Надаи v_{σ} для напряжений и положение главных осей тензора напряжений T_{σ} не меняются в процессе нагружения.

Г.А. Смирнов-Аляев [3] ввел понятие монотонной деформации, условиями которой являются: 1) совпадение главных осей скорости деформации с одними и теми же материальными волокнами; 2) постоянство в процессе деформации коэффициента Лоде — Надаи $v = v_{\dot{\epsilon}} = (2\dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3) / (\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3)$ для скоростей деформаций ($\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2, \dot{\epsilon}_3$ — главные компоненты скорости деформации, $\dot{\epsilon}_1 \geq \dot{\epsilon}_2 \geq \dot{\epsilon}_3$). Первое условие монотонности означает, что тензоры деформаций T_{ϵ} и скоростей деформаций $T_{\dot{\epsilon}}$ коаксиальны: $T_{\epsilon} \uparrow\uparrow T_{\dot{\epsilon}}$. При монотонной де-

формации, в отличие от простого нагружения, допускается поворот главных осей тензора T_{σ} .

В научно-технической литературе встречаются различные определения понятия монотонности деформации. Так, в работе [4] деформацию, при которой «все компоненты тензора скорости деформации в сопутствующей лагранжевой системе координат не изменяют своего знака», называют монотонной, в работе [5] деформацию, осуществляемую с изменением направления осей, — немонотонной, а в [6] деформацию, при которой знак угловых скоростей вращения материальной частицы относительно сопутствующей лагранжевой системы координат постоянен, — квазимонотонной, поэтому кручение кругового цилиндра (с сохранением радиуса и длины) считается квазимонотонным. В данной работе под монотонностью процесса будем понимать определение Г.А. Смирнова-Аляева, изложенное выше.

Частные теории пластичности в значительной степени основаны на соотношениях между тензорами T_{ϵ} , $T_{\dot{\epsilon}}$, T_{σ} . Так, теория малых упругопластических деформаций устанавливает равенство $v_{\epsilon} = v_{\sigma}$ коэффициентов Лоде — Надаи для деформаций и напряжений, а также совпадение по направлению и индексу главных осей напряженного состояния с главными осями деформаций $T_{\epsilon} \uparrow\uparrow T_{\sigma}$, т. е. равенство $T_{\sigma} = (\sigma_0 - c\epsilon_0)E + cT_{\epsilon}$, где $\sigma_0 = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$, $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ — компоненты нормальных напряжений по осям X, Y, Z соответственно; c — константа (положительная); $\epsilon_0 = (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz})/3$, $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}$ — компоненты деформаций удлинения по осям X, Y, Z соответственно; E — единичная матрица (3×3) [3].

Теория пластического течения, в свою очередь, устанавливает равенство $v_{\dot{\epsilon}} = v_{\sigma}$ коэффициентов Лоде — Надаи для скоростей деформаций и напряжений, а также совпадение по направлению и индексу главных осей напряженного состояния с главными осями скоростей деформаций $T_{\dot{\epsilon}} \uparrow \uparrow T_{\sigma}$, т. е. равенство $T_{\sigma} = (\sigma_0 - c\dot{\epsilon}_0)E + cT_{\dot{\epsilon}}$, где $\dot{\epsilon}_0 = (\dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} + \dot{\epsilon}_{zz})/3$, $\dot{\epsilon}_{xx}, \dot{\epsilon}_{yy}, \dot{\epsilon}_{zz}$ — компоненты скоростей деформаций удлинения по осям X, Y, Z соответственно (при принятии условия несжимаемости $\dot{\epsilon}_0 = 0$) [3].

Таким образом, выполнение первого условия монотонности деформации означает (независимо от принятия положений теории малых упругопластических деформаций или теории пластического течения) сонаправленность всех трех тензоров: $T_{\dot{\epsilon}} \uparrow \uparrow T_{\dot{\epsilon}} \uparrow \uparrow T_{\sigma}$.

В дальнейшем В.П. Чикидовский и Г.А. Смирнов-Аляев ввели понятие однодвигового процесса [3], а К.М. Иванов — однонаправленного. Однодвиговым был назван процесс, при котором гарантированно выполняется второе условие монотонности, а однонаправленным — процесс, при котором гарантированно выполняется первое условие монотонности.

Г.А. Смирнов-Аляев обосновал, что деформация частиц заготовки, находящихся вблизи от свободной поверхности при вытяжке колпачка и изгибе листа, является монотонной, и что при телескопической деформации и деформации кручения выполняется второе условие монотонности (однодвиговый процесс). К.М. Иванов установил выполнение первого условия монотонности в точках боковой поверхности среднего (перпендикулярного оси) сечения цилиндрического образца при осадке (однонаправленность).

В работах [7–9] рассмотрены различные формы условий, при которых выполняется первое условие монотонности, т. е. при которых процесс является однонаправленным (в [7] показано, что при некоторых условиях телескопическая деформация будет монотонной). Кроме того, установлено, что однонаправленность процесса равносильна специальному характеру зависимости тензора скоростей деформаций от тензора деформаций: $T_{\dot{\epsilon}} = c_0E + c_1T_{\dot{\epsilon}} + c_2T_{\dot{\epsilon}}^2$, где E — единичная матрица; c_0, c_1, c_2 — произвольные функции, зависящие от x, y, z, t . При этом функции c_1, c_2 удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} c_1 > -(\epsilon_1 + \epsilon_2)c_2; \\ c_1 > -(\epsilon_2 + \epsilon_3)c_2, \end{cases}$$

где $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \epsilon_3$ — главные компоненты тензора $T_{\dot{\epsilon}}$.

Все формы этих условий выполнения первого условия монотонности опираются на соотношение перестановочности

$$T_{\dot{\epsilon}}T_{\dot{\epsilon}} = T_{\dot{\epsilon}}T_{\dot{\epsilon}}, \tag{1}$$

известное в механике как условие А.Ю. Ишлинского соосности тензоров.

Выполнение только условия (1) не обеспечивает коаксиальности, поскольку оно гарантирует совпадение главных осей по направлению, но не по индексу. Таким образом, первая главная ось тензора деформаций обязательно совпадет с главной осью тензора скоростей деформаций, но эта ось может быть не первой (как требуется для первого условия монотонности), а второй или третьей (аналогично с другими осями).

Для получения достаточных условий однонаправленности к требованию соосности необходимо присоединить ряд условий — неравенств, различные формы которых описаны в работах [7–9].

В общей теории пластичности рассмотрено нагружение [10], образ которого в пятимерных пространствах девиаторов напряжений и деформаций называют квазипростым. Это такое нагружение, при котором в каждый момент времени пятимерные векторы [10]

$$\mathfrak{E} = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}(\epsilon_{xx} - \epsilon_0); \sqrt{2} \left(\epsilon_{yy} - \epsilon_0 + \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_0}{2} \right); \sqrt{2}\epsilon_{xy}; \sqrt{2}\epsilon_{yz}; \sqrt{2}\epsilon_{xz} \right)^T,$$

$$\mathfrak{\sigma} = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}(\sigma_{xx} - \sigma_0); \sqrt{2} \left(\sigma_{yy} - \sigma_0 + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_0}{2} \right); \sqrt{2}\sigma_{xy}; \sqrt{2}\sigma_{yz}; \sqrt{2}\sigma_{xz} \right)^T$$

направлены по одному лучу (здесь $\epsilon_{xy}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{xz}$ — деформации сдвига, $\sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}$ — напряжения сдвига; верхний индекс «Т» означает операцию транспонирования). Но направленность векторов $\mathfrak{E}, \mathfrak{\sigma}$ по одному лучу означает пропорциональность их координат с коэффициентом пропорциональности $C_1 > 0$:

$$\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}(\sigma_{xx} - \sigma_0)}{\sqrt{\frac{3}{2}}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_0)} = \frac{\sqrt{2}\left(\sigma_{yy} - \sigma_0 + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_0}{2}\right)}{\sqrt{2}\left(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_0}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sigma_{xy}}{\sqrt{2}\varepsilon_{xy}} = \frac{\sqrt{2}\sigma_{yz}}{\sqrt{2}\varepsilon_{yz}} = \frac{\sqrt{2}\sigma_{xz}}{\sqrt{2}\varepsilon_{xz}} = C_1.$$

Тогда получим:

$$\sigma_{xx} = \sigma_0 + C_1(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_0); \quad \sigma_{yy} = \sigma_0 + C_1(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_0);$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_0 + C_1(\varepsilon_{zz} - \varepsilon_0); \quad \sigma_{xy} = C_1\varepsilon_{xy};$$

$$\sigma_{yz} = C_1\varepsilon_{yz}; \quad \sigma_{xz} = C_1\varepsilon_{xz},$$

отсюда имеем представление тензора напряжений T_σ через тензор деформаций T_ε в виде

$$T_\sigma = (\sigma_0 - C_1\varepsilon_0)E + C_1T_\varepsilon, \quad (2)$$

т. е. квазипростое нагружение является однонаправленным.

Наличие многочленной зависимости между тензорами означает наличие такой же связи между их главными компонентами. Для квадратичной зависимости порядок собственных чисел может измениться, для линейной зависимости (2) ввиду условия $C_1 > 0$ — сохраняется. Поэтому для квазипростого нагружения $v_\sigma = v_\varepsilon$.

Однако на практике нельзя рассчитывать, что условие соосности (1), выражаемое равенством, будет выполняться абсолютно точно. Поэтому для развития теории предопределенных (в той или иной мере) процессов необходимо рассмотреть приближенное выполнение (1).

Мера отклонения процесса деформации от первого условия монотонности. Выберем ортогональную прямоугольную систему координат (например, правую), оси которой лежат на главных осях тензора деформации. Переход от этой системы к системе координат, связанной таким же образом с главными осями тензора скоростей деформаций, может быть осуществлен поворотом на некоторый угол α вокруг некой оси [11].

Для нахождения угла α сначала определяют матрицу линейного преобразования, переводящего собственные векторы X_1, X_2, X_3 единичной длины тензора T_ε деформаций в соответствующие единичные собственные векторы Y_1, Y_2, Y_3 тензора $T_\dot{\varepsilon}$ скоростей деформаций. Затем по матрице вычисляют кватернион q

половинного экспоненциального поворота, а по нему — кватернион истинного эйлера поворота, модуль векторной части которого равен искомому углу α [12].

Компоненты тензоров T_ε и $T_\dot{\varepsilon}$ зависят от времени, поэтому угол $\alpha = \alpha(t)$. Если на рассматриваемом временном промежутке обеспечивается равенство $\alpha(t) = 0$, то и условие соосности тензоров (1) выполняется точно. Таким образом, при фиксированном времени t мерой точности (или приближенности) выполнения (1) можно считать угол $\alpha(t)$, а на всем временном промежутке — параметр

$$d_1 = \max_t \alpha(t).$$

Поскольку выбранная система координат изменяется с изменением времени, для любого t имеет место неравенство $0 \leq \alpha(t) \leq \pi$.

Рассмотрим простое растяжение и последующее сжатие [3]. При растяжении первые главные оси тензоров деформаций и скорости деформаций направлены по оси растяжения. Сразу после смены знака деформации первая главная ось итоговой деформации продолжает совпадать с осью растяжения-сжатия, а у тензора скорости деформаций по этой оси будет направлена третья главная ось, так как в это время деформация по этой оси наиболее быстро убывает, т. е. соответствующий компонент тензора скорости деформаций отрицателен и наибольший по абсолютному значению.

Таким образом, при знакопеременной деформации главные оси тензора $T_\dot{\varepsilon}$ мгновенно меняют индексы, т. е. угол $\alpha(t)$ окажется близок к $\pi/2$. Наличие знакопеременной деформации не позволяет говорить о какой-либо однозначности [3] процесса деформирования. В то же время, если в процессе деформирования компоненты деформации растут «в одном направлении» [13], то некая однозначность процесса сохраняется.

Мера отклонения процесса деформации от второго условия монотонности. Рассмотрим второе условие монотонности — выполнение на всем временном отрезке равенства

$$v(t) = v_\varepsilon = \frac{2\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3}{\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3} = \text{const}. \quad (3)$$

Как и условие соосности тензоров (1), выражение (3) является равенством, т. е. на практике нельзя рассчитывать, что оно будет выполняться точно.

За меру отклонения от точного равенства можно принять значение максимального колебания v_ε на рассматриваемом временном отрезке:

$$d_2 = \max_t v(t) - \min_t v(t).$$

Мера отклонения «в целом» процесса деформации от монотонного. Как указано выше, при деформации кручения выполняется второе условие монотонности. В работе [7] показано, что при кручении первое условие монотонности никогда не выполняется. Однако, для указанных точек боковой поверхности при осадке цилиндрического образца первое условие монотонности выполняется, а второе — нет.

Эти примеры показывают, что выполнение первого и второго условий монотонности независимы друг от друга. Поэтому для измерения отклонения процесса «в целом» от монотонного необходимо по выбранным мерам отклонений d_1, d_2 построить «интегральную» «итоговую» меру d_3 . Возможные значения мер d_1, d_2 находятся в пределах $0 \leq d_1 \leq \pi, 0 \leq d_2 \leq 2$, поэтому, уравнивая влияние мер d_1, d_2 введением нормирующих коэффициентов, полагаем

$$d_3 = \max\left(\frac{d_1}{\pi}, \frac{d_2}{2}\right).$$

Кроме мер отклонений d_1, d_2 может оказаться целесообразным рассмотрение мер, основанных на измерении производных по времени от параметров $\alpha(t), v(t)$. Это зависит от

того, считать ли «мало отклоняющимися» от константы значения параметра, определяемого кривой 1, или значения параметра, заданного кривой 2 (рис. 2). Область малых отклонений от монотонности, расположенная под пунктирной линией на рис. 2, б, определяется неравенством $d_3 \leq \delta$, где δ — константа. Длина промежутка времени, на котором кривая 2 попадает в область малых отклонений, существенно зависит от δ , в то же время длина такого же промежутка для кривой 1 при достаточно малых δ мало зависит от δ .

При знакопеременной деформации (при которой однозначности заведомо нет) мера $d_1 \sim \pi/2$, т. е. $d_3 \geq 1/2$, поэтому введем для процесса два определения: *сильно немонотонный* ($d_3 \approx 1/2$) и *слабо немонотонный* ($d_3 \ll 1/2$).

Пример расчета отклонения от монотонности.

Рассмотрим кручение стержня кругового сечения [7]. За центр системы координат выберем произвольную точку O на оси стержня. Ось $O\eta$ направлена по оси стержня, оси $O\xi$ и $O\zeta$ выбраны произвольным образом перпендикулярно друг другу в поперечном сечении стержня, но так, чтобы образовывать правую систему координат. Таким образом, оси $O\xi$ и $O\zeta$ направлены по нормали к свободной поверхности стержня.

Начальное положение любой точки M определяется тремя параметрами: расстоянием $R = (x^2 + y^2)^{1/2}$ от точки до оси стержня; углом φ , измеряемым в плоскости $\xi O \zeta$ против часовой стрелки от положительного направле-

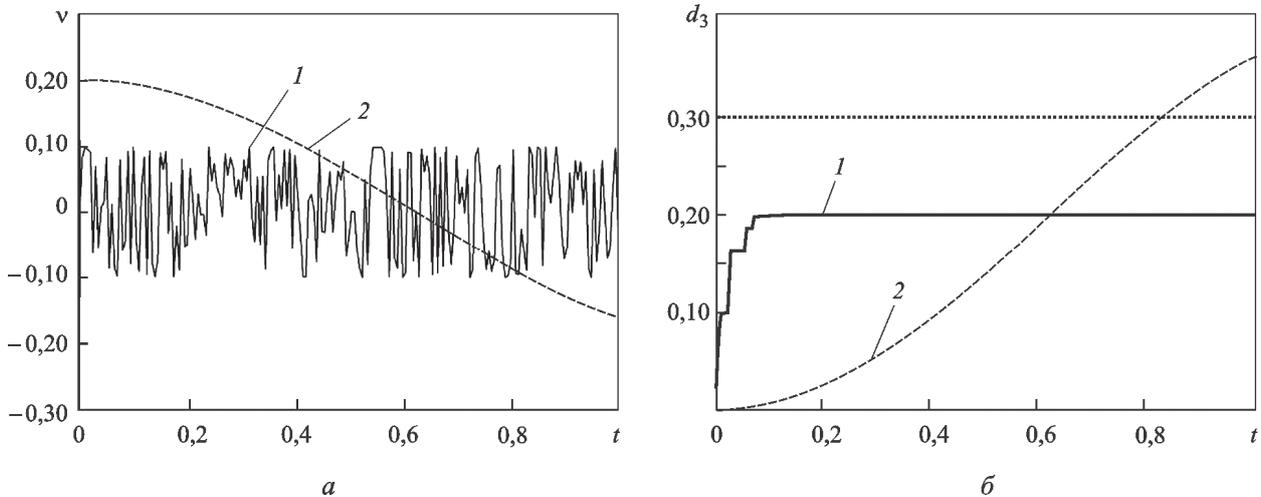


Рис. 2. Выбор «мало отклоняющихся» значений (достижение времени $t = 1$ означает окончание процесса): а — возможные графики параметра Лоде–Надаи для различных процессов; б — соответствующие им значения параметра d_3 , рассматриваемого на интервале $[0; t]$ ($\delta = 0,3; d_1 = 0$)

ния оси $O\xi$ до направления на точку M ; расстоянием z от точки до плоскости $\xi O\zeta$.

Полагаем, что при кручении площадь поперечного сечения неизменна, а в направлении оси η перемещений не происходит. Поэтому текущие координаты ξ, ζ, η точки M зависят от угла закручивания Φ в данном поперечном сечении, а угол Φ — от времени t и начального расстояния z от точки M до плоскости $\xi O\zeta$. Таким образом, координата η постоянна, а координаты ξ и ζ изменяются:

$$\begin{aligned}\xi &= R \cos[\varphi + \Phi(z, t)]; \\ \zeta &= R \sin[\varphi + \Phi(z, t)]; \\ \eta &= z,\end{aligned}$$

где x, y, z — начальные координаты точки M ; $\Phi(z, t)$ — угол закручивания в поперечном сечении стержня, проходящем через точку M .

В начальный момент времени $t = 0$ угол закручивания $\Phi(z, 0) = 0$ и на оси стержня в любой момент времени $\Phi(0, t) = 0$. Полагаем, что функция $\Phi(z, t)$ и ее частные производные являются непрерывными.

Оба рассматриваемых тензора имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

При этом параметры a и b :

- для тензора деформаций

$$\begin{aligned}a &= -\frac{R}{2} \sin(\varphi + \Phi) \Phi'_z; \\ b &= \frac{R}{2} \cos(\varphi + \Phi) \Phi'_z;\end{aligned} \quad (5a)$$

- для тензора скорости деформаций

$$\begin{aligned}a &= -\frac{R}{2} [\cos(\varphi + \Phi) \Phi'_t \Phi'_z + \sin(\varphi + \Phi) \Phi''_{tz}]; \\ b &= -\frac{R}{2} [\sin(\varphi + \Phi) \Phi'_t \Phi'_z - \cos(\varphi + \Phi) \Phi''_{tz}].\end{aligned} \quad (5b)$$

Собственные векторы (правая тройка, \mathbf{X}_1 соответствует наибольшему собственному числу, \mathbf{X}_3 — наименьшему, \mathbf{X}_2 — среднему) матрицы (4) имеют вид

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_1 &= \left(\frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}; \frac{b}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right); \\ \mathbf{X}_2 &= \left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}; \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; 0 \right); \\ \mathbf{X}_3 &= \left(\frac{-a}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}; \frac{-b}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right).\end{aligned}$$

$$\mathbf{X}_3 = \left(\frac{-a}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}; \frac{-b}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Обозначим a и b для тензора скорости деформаций как a_1 и b_1 . Тогда матрица перехода имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{aa_1+bb_1}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a_1^2+b_1^2}} & \frac{ba_1-ab_1}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a_1^2+b_1^2}} & 0 \\ \frac{ab_1-ba_1}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a_1^2+b_1^2}} & \frac{aa_1+bb_1}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a_1^2+b_1^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

В общем случае поворот вокруг произвольной оси, угол которого вычисляют через кватернионы, переводящий векторы $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ соответственно в векторы $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3$, является результатом трех последовательных поворотов вокруг координатных осей [11]. Однако, как следует из матрицы перехода (6), для кручения искомый поворот — поворот на угол $\alpha = \arctg[(ab_1 - ba_1)/(aa_1 + bb_1)]$ вокруг оси OZ . Подставив в эту формулу выражения (5) для a, b, a_1, b_1 , получим искомый угол $\alpha = \arctg(\Phi'_t \Phi'_z / \Phi''_{tz})$. В работе [7] на основании всегда выполняющегося неравенства $\Phi'_t \Phi'_z \neq 0$ и был сделан вывод, что для кручения первое условие монотонности не обеспечивается.

Для оценки близости процесса кручения к монотонному следует задать закон закручивания $\Phi(t, z)$. Если использовать наиболее простой закон

$$\Phi(t, z) = \begin{cases} Ctz, & 0 \leq t \leq t_0; \\ Ct_0z, & t > t_0, \end{cases}$$

предполагающий равномерное увеличение угла закручивания по времени и высоте стержня до окончания процесса в момент времени t_0 , то

$$\alpha(t) = \begin{cases} \arctg(Ctz), & 0 \leq t \leq t_0; \\ \arctg(Ct_0z), & t > t_0, \end{cases}$$

где C — произвольная константа, характеризующая скорость закручивания, $C > 0$.

Отметим, что значение $\arctg(Ct_0z)$ — окончательный угол закручивания подвижного конца стержня. После завершения процесса $d_1 = \arctg(Ct_0z)$, $d_2 = 0$, следовательно, $d_3 = \arctg(Ct_0z)/\pi$.

Для обеспечения слабой немонотонности процесса необходимо, чтобы окончательный угол закручивания стержня был небольшим, при больших углах закручивания процесс становится сильно немонотонным.

Пример оценки погрешности, вызванной применением приближенной зависимости напряжений от деформаций. Идеальным было бы проведение испытаний образца точно такого же характера, как и нагружение, которому будут подвергаться изделия при эксплуатации. Но в силу нехватки, а часто и отсутствия измерительной аппаратуры, позволяющей это сделать, при проектировании технологических процессов приходится применять наиболее близкую к эксплуатационному нагружению кривую из доступных кривых, отражающих зависимость напряжений от деформаций (см. таблицу).

При применении такой близкой кривой вместо эксплуатационной в расчет вносится погрешность, оценка которой в общем случае является сложной задачей.

Рассмотрим оценку погрешности для случая упругопластического кручения стержня круглого сечения из упрочняющегося материала. Как указано в работах [13, 14], деформации и напряжения в точке однозначно определяются координатами точки и относительным углом закручивания $\theta = \Phi(t, z)/z$, который вычисляют из выражения

$$M = 2\pi \int_0^a f(r\theta)r^2 dr,$$

где M — крутящий момент; r — расстояние от оси стержня, a — радиус поперечного сечения стержня; $\tau = f(\gamma)$ — зависимость касательных напряжений от деформаций сдвига (τ — касательное напряжение, γ — деформация сдвига), $f(r\theta) = f(\gamma)|_{\gamma=r\theta}$.

Расчетная погрешность, возникающая вследствие применения близкой кривой вместо эксплуатационной, есть погрешность нахождения угла закручивания θ .

Пусть $\tau = f_1(\gamma)$ — эксплуатационная кривая напряжений-деформаций (естественно предполагать ее неизвестной); $\tau = f_2(\gamma)$ — принятая в расчетах близкая кривая; θ_1 — угол закручивания, найденный по эксплуатационной кривой, т. е. удовлетворяющий соотношению

$$M = 2\pi \int_0^a f_1(r\theta_1)r^2 dr, \tag{7}$$

где θ_2 — угол закручивания, определенный по близкой кривой, т. е. соответствующий выражению

$$M = 2\pi \int_0^a f_2(r\theta_2)r^2 dr. \tag{8}$$

Приравняв правые части формул (7) и (8), получим

$$\int_0^a f_1(r\theta_1)r^2 dr = \int_0^a f_2(r\theta_2)r^2 dr;$$

$$\int_0^a [f_1(r\theta_1) - f_2(r\theta_1)]r^2 dr = \int_0^a [f_2(r\theta_2) - f_2(r\theta_1)]r^2 dr.$$

По теореме Лагранжа

$$\int_0^a [f_1(r\theta_1) - f_2(r\theta_1)]r^2 dr = \int_0^a f_2'(r\theta_c)(\theta_2 - \theta_1)r^3 dr,$$

где

$$f_2'(r\theta_c) = \left(\frac{df(\gamma)}{d\gamma} \right) \Big|_{\gamma=r\theta_c},$$

θ_c находится строго между θ_1 и θ_2 .

Тогда

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{\int_0^a [f_1(r\theta_1) - f_2(r\theta_1)]r^2 dr}{\int_0^a f_2'(r\theta_c)r^3 dr}.$$

Вычисляя модуль обеих частей, получим

$$|\theta_2 - \theta_1| \leq \frac{\max_{0 \leq r \leq a} |f_1(r\theta_1) - f_2(r\theta_1)| \int_0^a r^2 dr}{\min_{0 \leq r \leq a} |f_2'(r\theta_c)| \int_0^a r^3 dr} =$$

$$= \frac{4 \max_{0 \leq r \leq a} |f_1(r\theta_1) - f_2(r\theta_1)|}{3a \min_{0 \leq r \leq a} |f_2'(r\theta_c)|}.$$

Поскольку $r\theta_1$ и $r\theta_c$ являются некоторыми деформациями (сдвига), т. е. попадают в область определения кривых $\tau = f_1(\gamma)$, $\tau = f_2(\gamma)$, имеем

$$|\theta_2 - \theta_1| \leq \frac{4 \max_{0 \leq r \leq a} |f_1(r\theta_1) - f_2(r\theta_1)|}{3a \min_{0 \leq r \leq a} |f_2'(r\theta_c)|} \leq$$

$$\leq \frac{4 \max_{\gamma} |f_1(\gamma) - f_2(\gamma)|}{3a \min_{\gamma} |f_2'(\gamma)|}.$$

Для большинства кривых напряжений-деформаций упрочняющихся материалов минимум производной достигается на их правом конце (а при наличии на кривой точки перегиба — в точке перегиба), поэтому значение параметра

$$C_d = \min_{\gamma} |f_2'(\gamma)|$$

можно определить по известной кривой $\tau = f_2(\gamma)$.

Окончательно имеем

$$|\theta_2 - \theta_1| \leq \frac{4 \max_{\gamma} |f_1(\gamma) - f_2(\gamma)|}{3\alpha C_d}. \quad (9)$$

Учитывая сходный характер зависимостей напряжений от деформаций для различных видов нагружения одного материала [2], оценим по известной кривой $\tau = f_2(\gamma)$ (с некоторым запасом) значение

$$\max_{\gamma} |f_1(\gamma) - f_2(\gamma)| \approx 0,2 f_2(\gamma).$$

Из выражения (9) можно сделать вывод, что при прочих равных условиях погрешность, вызванная применением близкой кривой зависи-

мости напряжений от деформаций, уменьшается с увеличением радиуса стержня.

Выводы

1. Рассмотрена информационно-системная методология выбора и обоснования реологической модели материала при численном моделировании технологических процессов металлообработки.

2. Представлена классификация процессов сложного нагружения с точки зрения их однозначной определенности.

3. Разработана и обоснована методика оценки близости произвольных процессов сложного нагружения к монотонным, позволяющая прогнозировать адекватность численных моделей технологических процессов металлообработки.

Литература

- [1] Ильющин А.А. *Труды (1946-1966). Т. 2: Пластичность*. Москва, Физматлит, 2004. 480 с.
- [2] Иванов К.М., Митюшов А.А., Ульянов Э.И., Усманов Д.В., Винник П.М. *Механические свойства материалов при сложном нагружении*. Санкт-Петербург, Балт. гос. техн. ун-т, 2011. 150 с.
- [3] Смирнов-Аляев Г.А. *Сопротивление материалов пластическому деформированию*. Ленинград, Машиностроение, 1978. 368 с.
- [4] Колмогоров В.Л. К математическому моделированию динамики течения и разрушения металла при пластической деформации. *Вестник Пермского государственного технического университета. Математическое моделирование систем и процессов*, 2001, № 9, с. 47–66.
- [5] Утяшев Ф.З. Кинематика течения и структурообразование металла при интенсивной пластической деформации. *Физика и техника высоких давлений*, 2013, т. 23, № 1, с. 45–55.
- [6] Богатов А.А., Пузырев С.С. Особенности формоизменения и упрочнения металла при обработке давлением со знакопеременной деформацией. *Инновационные технологии в металлургии и машиностроении. Уральская научно-педагогическая школа имени профессора А.Ф. Головина: Матер. 6-й Междунар. молодежной науч.-практ. конф.*, Екатеринбург, Изд-во Урал. ун-та, 2012, с. 9–14.
- [7] Иванов К.М., Винник П.М., Иванов В.Н. Механические свойства материалов при сложном нагружении. *Вестник Московского авиационного института*, 2012, т. 19, № 5, с. 172–181.
- [8] Иванов К.М., Винник П.М. Допустимые зависимости скоростей деформации от деформаций в однонаправленных процессах. *Обработка материалов давлением*, 2014, № 1 (38), с. 26–31.
- [9] Иванов К.М., Винник П.М. Допустимые зависимости скоростей деформации от деформаций в однонаправленных процессах без диагонализации тензора деформации. *Прогрессивные методы и технологическое оснащение процессов обработки металлов давлением: Матер. Междунар. науч.-техн. конф., Санкт-Петербург, 14–17 октября 2014*, Санкт-Петербург, Изд-во БГТУ, 2014, с. 91–94.
- [10] Зубчанинов В.Г. *Устойчивость и пластичность. Т. 2: Пластичность*. Москва, Физматлит, 2008. 396 с.
- [11] Голубев Ю.Ф. Алгебра кватернионов в кинематике твердого тела. *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2013, № 39, 23 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-39> (дата обращения 10 ноября 2015).

- [12] Гордеев В.Н. *Кватернионы и трехмерная геометрия*. [Электрон. ресурс], Киев, 2012. URL:<http://www.techlibrary.ru> (дата обращения 9 ноября 2015).
- [13] Степин П.А. *Сопротивление материалов*. Санкт-Петербург, Москва, Краснодар, Лань, 2012. 320 с.
- [14] Надаи А. *Пластичность и разрушение твердых тел*. Москва, Иностранная литература, 1954. 648 с.

References

- [1] Il'iushin A.A. *Trudy (1946-1966). T. 2. Plastichnost'* [Proceedings (1946-1966). Vol. 2. Plasticity]. Moscow, Fizmatlit publ., 2004. 480 p.
- [2] Ivanov K.M., Mitiushov A.A., Ul'ianov E.I., Usmanov D.V., Vinnik P.M. *Mekhanicheskie svoistva materialov pri slozhnom nagruzhении* [Mechanical properties of materials under complex loading]. Saint-Petersburg, VOENMEH publ., 2011. 150 p.
- [3] Smirnov-Aliaev G.A. *Soprotivlenie materialov plasticheskomu deformirovaniu* [Resistance of materials to plastic deformation]. Leningrad, Mashinostroenie publ., 1978. 368 p.
- [4] Kolmogorov V.L. K matematicheskomu modelirovaniu dinamiki techeniia i razrusheniia metalla pri plasticheskoi deformatsii. *Vestnik Permskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Matematicheskoe modelirovanie sistem i protsessov* [Bulletin of Perm State Technical University. Mathematical modeling of systems and processes]. 2001, no. 9, pp. 47–66.
- [5] Utiashev F.Z. Kinematika techeniia i strukturoobrazovanie metalla pri intensivnoi plasticheskoi deformatsii [Kinematics of flow and structure formation of a metal under severe plastic deformation]. *Fizika i tekhnika vysokikh davlenii* [High pressure physics and technics]. 2013, vol. 23, no. 1, pp. 45–55.
- [6] Bogatov A.A., Puzyrev S.S. Osobennosti formoizmeneniia i uprochneniia metalla pri obrabotke davleniem so znakoperemennoi deformatsiei [Features of forming and hardening of metal by pressure treatment with an alternating deformation]. *Innovatsionnye tekhnologii v metallurgii i mashinostroenii. Ural'skaia nauchno-pedagogicheskaja shkola imeni professora A.F. Golovina: materialy 6-i mezhdunarodnoi molodezhnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii*. [Innovative technologies in metallurgy and mechanical engineering: proceedings of the 6th international youth scientific-practical conference «Innovative technologies in metallurgy and mechanical engineering. Ural scientific and pedagogical school named after Professor A.F. Golovin»]. Ekaterinburg, Ural Federal University publ., 2012, pp. 9–14.
- [7] Ivanov K.M., Vinnik P.M., Ivanov V.N. Mekhanicheskie svoistva materialov pri slozhnom nagruzhении [Mechanical properties of materials under complex loading]. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta* [Bulletin of Moscow aviation institute]. 2012, vol. 19, no. 5, pp. 172–181.
- [8] Ivanov K.M., Vinnik P.M. Dopustimye zavisimosti skorostei deformatsii ot deformatsii v odnonapravennykh protsessakh [Valid the dependence of the strain rates from the deformation in unidirectional processes]. *Obrabotka materialov davleniem* [Pressure treatment of materials]. 2014, no. 1 (38), pp. 26–31.
- [9] Ivanov K.M., Vinnik P.M. Dopustimye zavisimosti skorostei deformatsii ot deformatsii v odnonapravennykh protsessakh bez diagonalizatsii tenzora deformatsii [Valid the dependence of the strain rates from the deformation in unidirectional processes without diagonalization of the tensor of deformation]. *Progressivnye metody i tekhnologicheskoe osnashchenie protsessov obrabotki metallov davleniem: Materialy mezhdunarodnoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii, Sankt-Peterburg, 14–17 oktiabria 2014* [Materials of international scientific-technical conference «Progressive methods and technologies of processing of metals pressure», Saint-Petersburg, 14–17 October 2014]. Saint-Petersburg, BSTU publ., 2014, pp. 91–94.
- [10] Zubchaninov V.G. *Ustoichivost' i plastichnost'. T. 2. Plastichnost'* [Stability and flexibility. Vol. 2. Plasticity]. Moscow, Fizmatlit publ., 2008. 396 p.
- [11] Golubev Iu.F. Algebra kvaternionov v kinematike tverdogo tela [Quaternion algebra in rigid body kinematics]. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha* [KIAM Preprint no. 39]. 2013, no. 39, 23 p. Available at: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-39> (accessed 10 November 2015).

- [12] Gordeev V.N. *Kvaterniony i trekhmernaya geometriia* [Application of quaternions in problems of orientation of a rigid body]. Kiev, 2012. Available at: <http://www.techlibrary.ru> (accessed 09 September 2015).
- [13] Stepin P.A. *Soprotivlenie materialov* [Strength of materials]. St. Petersburg, Moscow, Krasnodar, Lan' publ., 2012. 320 p.
- [14] Nadai A. *Plastichnost' i razrushenie tverdykh tel* [Plasticity and fracture of solids]. Moscow, Inostrannaia literature publ., 1954. 648 p.

Статья поступила в редакцию 11.03.2016

Информация об авторах

ВИННИК Петр Михайлович (Санкт-Петербург) — кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой высшей математики. «Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова» (190005, Санкт-Петербург, Российская Федерация, 1-ая Красноармейская ул., д.1, e-mail: vinnik.pm@gmail.com).

ИВАНОВ Константин Михайлович (Санкт-Петербург) — доктор технических наук, профессор, ректор. Балтийского государственного технического университета «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова (190005, Санкт-Петербург, Российская Федерация, 1-ая Красноармейская ул., д. 1, e-mail: Rector@bstu.spb.su).

Information about the authors

VINNIK Pyotr Mikhailovich (Saint-Petersburg) — Candidate of Science (Physics & Math), Associate Professor, Head of Higher Mathematics Department. Baltic State Technical University VOENMEH named after D.F. Ustinov (190005, Saint-Petersburg, Russian Federation, 1st Krasnoarmeyskaya St., Bldg. 1, e-mail: vinnik.pm@gmail.com).

IVANOV Konstantin Mikhailovich (Saint-Petersburg) — Doctor of Science (Eng.), Rector Baltic State Technical University VOENMEH named after D.F. Ustinov (190005, Saint-Petersburg, Russian Federation, 1st Krasnoarmeyskaya St., Bldg. 1, e-mail: Rector@bstu.spb.su).



В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана
вышло в свет 16-е издание учебника
В.И. Феодосьева

«Соппротивление материалов»

Книга соответствует традиционной программе технических вузов. Излагаются следующие разделы курса сопротивления материалов: растяжение, кручение, изгиб, статически неопределимые системы, теория напряженного состояния, теория прочности, толстостенные трубы и тонкостенные оболочки, прочность при переменных напряжениях, расчеты при пластических деформациях, устойчивость и методы испытаний. По сравнению с предыдущими изданиями она сокращена за счет разделов, которые на лекциях обычно не читаются, и дополнена некоторыми элементарными сведениями по композиционным материалам.

Для студентов технических вузов. Может быть полезен аспирантам и преподавателям, а также специалистам, деятельность которых связана с вопросами прочности, жесткости, устойчивости, и надежности элементов конструкций, машин и приборов.

По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;
press@bmstu.ru; www.baumanpress.ru