

УДК 531.22.8


DOI 10.18698/0536-1044-2016-12-33-42

Применение метода последовательных нагружений при решении задач механики плоских стержней

А.М. Наумов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1

The Application of the Method of Successive Loadings when Solving Problems of Mechanics of Flat Rods

A.M. NaumovBMSTU, 105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1 e-mail: nam63@mail.ru

i При решении задач о нагружении конструкций, содержащих стержневые элементы, часто приходится иметь дело с большими (соизмеримыми с длиной стержня) перемещениями таких элементов. В механике деформируемого твердого тела разработан ряд методов решения нелинейных задач, применимых к расчету как пластин, оболочек, мембран, так и стержней. В статье рассмотрен относительно простой и достаточно точный для повседневной инженерной практики метод последовательных нагружений для решения плоских задач механики стержней. Представлены результаты численного исследования примеров нагружения стержней различными силами, для которых в научной литературе приведены точные аналитические решения, и наглядно продемонстрирована точность предлагаемого метода решения подобных задач. Приведенный метод численного исследования глубокого деформирования плоского стержня достаточно легко может быть распространен и на конструкции в виде пространственных стержней сколь угодно сложной геометрии. Данная тематика может быть интересна специалистам в области механики стержней.

Ключевые слова: метод последовательных нагружений, плоский стержень, нелинейная система уравнений, связанный базис, декартов базис, матрица преобразования, вектор состояния, линеаризованная система уравнений, шаг по нагрузке.

i When solving problems of loading of structures comprising rod elements, one often has to deal with large displacements of these elements (i.e. commensurate with the length of the rod). A number of methods for solving nonlinear problems applicable to the calculation of plates, shells, membranes, as well as rods, has been developed in the mechanics of deformable solids. This article describes a relatively simple method of successive loadings to solve the plane problems of the mechanics of rods that is accurate enough for everyday engineering practice. The results of numerical studies of the rods exposed to different loads are presented, for which exact analytical solutions are available in the literature. The accuracy of the proposed method of solving such problems is demonstrated. The described method of numerical investigation of deep deformation of flat rods can be easily applied to studying constructions of spatial rods of arbitrarily complex geometry. This topic may be of interest to specialists in the field of mechanics of rods.

Keywords: method of successive loading, flat rod, nonlinear system of equations, associated basis, Cartesian basis, transformation matrix, state vector, linearized system of equations, step load.

Перемещения стержневых элементов, возникающие при нагружении строительных, машиностроительных, приборных и иных конструкций, часто нельзя считать малыми. В связи с этим решить задачу нагружения стержневых конструкций с помощью линейных (линеаризованных) уравнений, описывающих поведение стержня, не представляется возможным. При больших перемещениях необходимо использовать точные уравнения, полученные при выводе статического равновесия стержня в самой общей постановке. Этой проблеме уделяется большое внимание как в России [1–3], так и за рубежом [4–8].

Существует ряд численных методов решения задач механики при нелинейном деформировании объекта исследования (пластина, оболочка или стержень). Есть методы, в основе которых лежит решение непосредственно точных нелинейных уравнений, описывающих поведение объекта [9–13]. Самыми известными и распространенными из них являются: метод продолжения решения по параметру в дискретной и непрерывной постановках [10], метод «пристрелки» (баллистический метод), метод наилучшей параметризации [11], вариационные методы [10]. Все эти методы являются точными, но достаточно сложны в алгоритмизации и численной реализации. Очевидно, что задачу о нелинейном деформировании стержня даже простой геометрии может быть решена только численно, за исключением некоторых частных случаев [9].

Рассмотрим решение задачи деформирования плоского стержня методом последовательных нагружений (МПН), разработанным профессором В.З. Власовым [14] для расчета оболочек. Профессор В.А. Светлицкий адаптировал этот метод для решения задач механики стержней [15]. Этот метод является многошаговым (как и большинство точных методов). Суть метода состоит в последовательном нагружении стержня внешними силами, подобранными таким образом, что при каждом нагружении перемещения точек осевой линии стержня и углы поворота связанных осей являются малыми.

Этот вариант численного решения нелинейных уравнений приводит при каждом дискретном увеличении нагрузки к линейным (линеаризованным) уравнениям. Для m -го нагружения стержня внешняя сила $\mathbf{F}^{(m)} = k\mathbf{F}$, где m — номер шага нагружения; k — параметр, опре-

деляющий часть общей нагрузки на каждом шаге нагружения, $k=1/n$ (n — число шагов нагружения). Таким образом, решение задачи деформирования стержня при больших перемещениях заменяется последовательным решением ряда задач о деформировании стержня при малых перемещениях, т. е. фактически линейных задач.

Необходимо отметить, что при решении задачи одним из перечисленных точных методов приходится использовать итерационные методы подбора решения на каждом шаге нагружения. Это усложняет алгоритм решения задачи и увеличивает время численного счета. Исследователям, занимающимся данной проблематикой, известно, насколько чувствительны итерационные процессы к выбору начального приближения. При неудачном начальном приближении процесс может не сойтись, приходится «откатывать» назад, брать новое приближение, менять шаг нагружения, увеличивать точность как самого численного интегрирования системы уравнений, так и критерия выхода из итерационного процесса и т. д.

Цель работы — продемонстрировать, что задача о нелинейном деформировании плоского стержня может быть решена намного проще без существенной потери в точности, т. е. точность МПН вполне достаточна для повседневной инженерной практики. При этом алгоритмизация численного расчета с использованием МПН достаточна проста и доступна не только исследователям с научным опытом, но и начинающим инженерам и студентам.

Перед рассмотрением плоского стержня покажем, как можно получить систему уравнений МПН на примере пространственного стержня. Возьмем за основу дальнейших исследований нелинейную систему уравнений равновесия пространственно-криволинейного стержня в связанных осях [15]:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{Q}}{d\eta} + \mathbf{a} \times \mathbf{Q} + \mathbf{q} + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}^{(i)} \delta(\eta - \eta_i) &= 0; \\ \frac{d\mathbf{M}}{d\eta} + \mathbf{a} \times \mathbf{M} + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{Q} + \boldsymbol{\mu} + \sum_{v=1}^k \mathbf{T}^{(v)} \delta(\eta - \eta_v) &= 0; \\ L_1 \frac{d\theta}{d\eta} + L_2 \mathbf{a}_0^{(1)} - A^{-1} \mathbf{M} &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\eta} + \mathbf{a} \times \mathbf{u} + (l_{11} - 1)\mathbf{e}_1 + l_{21}\mathbf{e}_2 + l_{31}\mathbf{e}_3 = 0;$$

$$\mathbf{M} = A(\mathbf{a} - \mathbf{a}_0^{(1)}),$$

где \mathbf{Q} , \mathbf{M} , \mathbf{u} — векторы соответственно внутренних сил, моментов и перемещений точек осевой линии стержня; η — безразмерная дуговая координата, $\eta = s/l$ (s — размерная координата; l — длина стержня); \mathbf{a} и $\mathbf{a}_0^{(1)}$ — векторы, компонентами которых являются кривизны осевой линии стержня после нагружения и в естественном состоянии; \mathbf{q} и $\mathbf{\mu}$ — распределенные силы и моменты; $\mathbf{F}^{(i)}$ и $\mathbf{T}^{(v)}$ — сосредоточенные силы и моменты; $\delta(\eta - \eta_i)$, $\delta(\eta - \eta_v)$ — обобщенные функции Дирака, определенные в соответствующих координатах η_i, η_v ; $\boldsymbol{\theta}$ — вектор углов поворота связанных осей относительно положения в естественном (ненагруженном) состоянии, $\boldsymbol{\theta} = \vartheta_i \mathbf{e}_i$ (ϑ_i — компоненты вектора углов поворота, \mathbf{e}_i — орты связанного деформированного главного базиса); A — диагональная матрица безразмерных жесткостей при кручении (A_{11}) и изгибе (A_{22}, A_{33}) (относительно главных осей сечения); l_{ij} — элементы матрицы преобразования базисных векторов L . Входящие в систему уравнений (1) матрицы L_1 и L_2 , а также матрица L подробно рассмотрены в работе [15].

Получим систему уравнений МПН на первом шаге нагружения для внутренних сил.

На первом шаге нагружения

$$\mathbf{F} = \Delta \mathbf{F}^{(1)}.$$

Здесь и далее верхний индекс соответствует номеру шага нагружения. Под \mathbf{F} будем принимать все внешние силы,

$$\mathbf{F} = \mathbf{q} + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}^{(i)} \delta(\eta - \eta_i),$$

а под \mathbf{T} — все внешние моменты,

$$\mathbf{T} = \mathbf{q} + \sum_{v=1}^k \mathbf{T}^{(v)} \delta(\eta - \eta_v).$$

Тогда

$$\frac{d\Delta \mathbf{Q}^{(1)}}{d\eta} + (\mathbf{a}_0 + \Delta \mathbf{a}^{(1)}) \Delta \mathbf{Q}^{(1)} + \Delta \mathbf{F}^{(1)} = 0, \quad (2)$$

где $\Delta \mathbf{Q}^{(1)}$ — приращение внутренней силы на первом шаге нагружения; \mathbf{a}_0 — начальная кривизна; $\Delta \mathbf{a}^{(1)}$ — изменение кривизны.

Для линеаризации уравнения (2) необходимо принять $\Delta \mathbf{a}^{(1)} \approx 0$ (т. е. считать, что изменение кривизны на первом шаге по сравнению с начальной кривизной \mathbf{a}_0 мало). Тогда линеаризованное уравнение для сил на первом шаге нагружения имеет вид

$$\frac{d\Delta \mathbf{Q}^{(1)}}{d\eta} + \mathbf{a}_0 \times \Delta \mathbf{Q}^{(1)} + \Delta \mathbf{F}^{(1)} = 0. \quad (3)$$

На втором шаге нагружения запишем уравнение для сил в абсолютных значениях:

$$\frac{d(\Delta \mathbf{Q}^{(1)} + \Delta \mathbf{Q}^{(2)})}{d\eta} + (\mathbf{a}_0 + \Delta \mathbf{a}^{(1)} + \Delta \mathbf{a}^{(2)}) \times (\Delta \mathbf{Q}^{(1)} + \Delta \mathbf{Q}^{(2)}) + \Delta \mathbf{F}^{(1)} + \Delta \mathbf{F}^{(2)} = 0.$$

Исключая из этого уравнения те слагаемые, которые составляют тождество (3), а также пренебрегая бесконечно малыми и линеаризируя это уравнение (полагая $\Delta \mathbf{a}^{(2)} \times \Delta \mathbf{Q}^{(2)} \approx 0$), получим

$$\frac{d(\Delta \mathbf{Q}^{(2)})}{d\eta} + (\mathbf{a}_0 + \Delta \mathbf{a}^{(1)}) \times \Delta \mathbf{Q}^{(2)} + \Delta \mathbf{a}^{(2)} \times \Delta \mathbf{Q}^{(1)} + \Delta \mathbf{F}^{(2)} = 0.$$

На m -м шаге по нагрузке (предполагая равномерный шаг) имеем векторное уравнение для внутренних сил

$$\frac{d(\Delta \mathbf{Q}^{(m)})}{d\eta} + \left(\mathbf{a}_0 + \sum_{i=1}^{m-1} \Delta \mathbf{a}^{(i)} \right) \Delta \mathbf{Q}^{(m)} + \Delta \mathbf{a}^{(m)} \sum_{i=1}^{m-1} \Delta \mathbf{Q}^{(i)} + \Delta \mathbf{F}^{(m)} = 0.$$

Остальные уравнения системы (1) приводятся к линеаризованному виду аналогично. Таким образом, можно получить систему обыкновенных линеаризованных дифференциальных уравнений МПН, описывающих поведение пространственно-криволинейного стержня на m -м шаге нагружения. Приведем ее, заменив векторные произведения векторно-матричными:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta \mathbf{Q}^{(m)}}{d\eta} + A_{\mathbf{a}}^{(m-1)} \Delta \mathbf{Q}^{(m)} + A_Q^{(m-1)} \Delta \mathbf{a}^{(m)} &= -\Delta \mathbf{F}; \\ \frac{d\Delta \mathbf{M}^{(m)}}{d\eta} + A_{\mathbf{a}}^{(m-1)} \Delta \mathbf{M}^{(m)} + A_M^{(m-1)} \Delta \mathbf{a}^{(m)} + A_1 \Delta \mathbf{Q}^{(m)} &= -\Delta \mathbf{T}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{d\Delta \boldsymbol{\theta}^{(m)}}{d\eta} + A_{\mathbf{a}}^{(m-1)} \Delta \boldsymbol{\theta}^{(m)} - \Delta \mathbf{a}^{(m)} = 0;$$

$$\frac{d\Delta \mathbf{u}^{(m)}}{d\eta} + A_{\mathbf{a}}^{(m-1)} \Delta \mathbf{u}^{(m)} + A_1 \Delta \boldsymbol{\theta}^{(m)} = 0;$$

$$\mathbf{M}^{(m)} = A \Delta \mathbf{a}^{(m)},$$

где $\mathbf{Q}^{(m)}$, $\Delta \mathbf{M}^{(m)}$, $\Delta \boldsymbol{\theta}^{(m)}$ и $\Delta \mathbf{u}^{(m)}$ — приращение вектора соответственно внутренней силы, внут-

ренного момента, угловых перемещений и линейных перемещений на m -м шаге нагружения.

В системе уравнений (4)

$$A_{\alpha}^{(m-1)} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_3^{(m-1)} & \alpha_2^{(m-1)} \\ \alpha_3^{(m-1)} & 0 & -\alpha_1^{(m-1)} \\ -\alpha_2^{(m-1)} & \alpha_1^{(m-1)} & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_Q^{(m-1)} = \begin{bmatrix} 0 & Q_3^{(m-1)} & -Q_2^{(m-1)} \\ -Q_3^{(m-1)} & 0 & Q_1^{(m-1)} \\ Q_2^{(m-1)} & -Q_1^{(m-1)} & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_M^{(m-1)} = \begin{bmatrix} 0 & M_3^{(m-1)} & -M_2^{(m-1)} \\ -M_3^{(m-1)} & 0 & M_1^{(m-1)} \\ M_2^{(m-1)} & -M_1^{(m-1)} & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$\alpha_j^{(m-1)} = \alpha_{j0} + \sum_{k=1}^{m-1} \Delta \alpha_j^{(k)}; \quad Q_j^{(m-1)} = \sum_{k=1}^{m-1} \Delta Q_j^{(k)};$$

$$M_j^{(m-1)} = \sum_{k=1}^{m-1} \Delta M_j^{(k)}.$$

На основе системы (4) для пространственно-криволинейного стержня можно получить систему уравнений МПН и для плоского стержня. Его поведение описывается не двенадцатью компонентами вектора состояния, а шестью:

$$\frac{d\Delta Q_1^{(m)}}{d\eta} - \alpha_3^{(m-1)} \Delta Q_2^{(m)} - Q_2^{(m-1)} \Delta M_3^{(m)} = -\Delta F_1;$$

$$\frac{d\Delta Q_2^{(m)}}{d\eta} + \alpha_3^{(m-1)} \Delta Q_1^{(m)} + Q_1^{(m-1)} \Delta M_3^{(m)} = -\Delta F_2;$$

$$\frac{d\Delta M_3^{(m)}}{d\eta} - \Delta Q_2^{(m)} = -\Delta T_3;$$

$$\frac{d\Delta \vartheta_3^{(m)}}{d\eta} - \frac{1}{A_{33}} \Delta M_3^{(m)} = 0;$$

$$\frac{d\Delta u_1^{(m)}}{d\eta} - \alpha_3^{(m-1)} \Delta u_2^{(m)} = 0;$$

$$\frac{d\Delta u_2^{(m)}}{d\eta} + \alpha_3^{(m-1)} \Delta u_1^{(m)} + \Delta \vartheta_3^{(m)} = 0,$$

где $\alpha_3^{(m-1)}$ и $Q_j^{(m-1)}$ — кривизна и внутренние силы, «накопленные» в стержне на предыдущих $(m-1)$ -х шагах нагружения,

$$\alpha_3^{(m-1)} = \alpha_{30} + \sum_{i=1}^{m-1} \Delta \alpha_3^{(i)},$$

$$Q_j^{(m-1)} = \sum_{i=1}^{m-1} \Delta Q_j^{(i)}, \quad j = 1, 2;$$

$\Delta \vartheta_3^{(m)}$ — приращение угла поворота на m -м шаге нагружения.

Следует отметить, что такой вид система имеет только при действии следящих сил, когда нет так называемого приращения нагрузки, связанного с изменением направления сил по отношению к векторам связанного базиса. Например, в случае действия «мертвых» сил правая часть первых трех уравнений изменится [15].

Для того чтобы судить о точности МПН, применим его для численного решения двух задач о деформировании плоских стержней, которые имеют точное аналитическое решение.

Задача о деформировании плоского кольца.

На рис. 1 показано кольцо, сжимаемое по диаметру двумя силами, представленное в монографии Е.П. Попова [9], где приведено точное решение этой задачи, точно рассчитана сила, при которой происходит смыкание кольца, и показан вид деформированной оси нижней правой четверти кольца при различных нагрузках (рис. 2). Текущая сила P имеет размерность гс (грамм-сила), $100 \text{ гс} = 1 \text{ Н}$.

Приведем методику решения данной задачи с помощью МПН. В силу симметрии объекта исследования рассмотрим только половину кольца (рис. 3). Сформулируем краевые условия задачи: 1) при $\eta = 0$ (в неподвижной заделке слева): $\Delta u_1^{(m)} = \Delta u_2^{(m)} = \Delta \vartheta_3^{(m)} = 0$; 2) при $\eta = 1$ (в скользящей заделке справа) $\Delta u_1^{(m)} = \Delta \vartheta_3^{(m)} = 0$; $\Delta Q_2^{(m)} = \Delta F$. Нагрузка на правом конце стержня является следящей, т. е. меняется от шага к шагу только ее модуль, но не меняется направление по отношению к связанным осям. Она всегда направлена по орту e_2 . Таким обра-

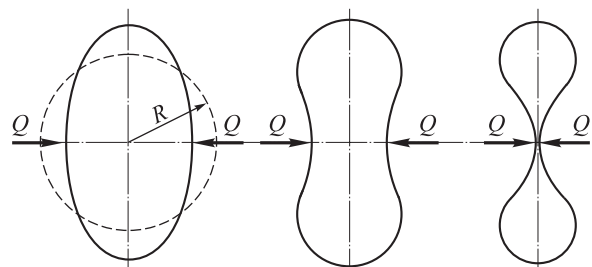


Рис. 1. Кольцо, сжимаемое по диаметру двумя силами (из монографии Е.П. Попова)

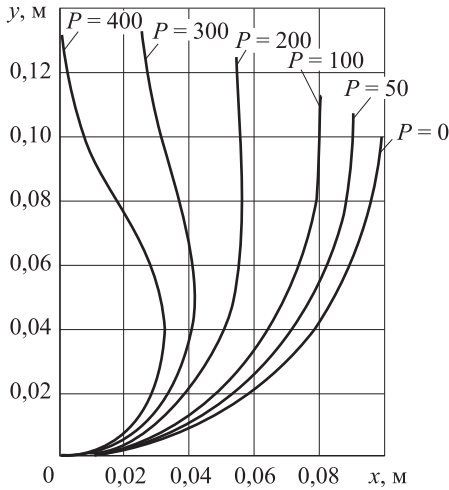


Рис. 2. Виды деформированной оси кольца, полученные Е.П. Поповым при различных значениях нагрузки P (гс)

зом, внешняя нагрузка, приложенная к стержню, является краевой. Больше никаких сил к стержню не приложено, поэтому в уравнениях (5) имеем $\Delta F_1 = \Delta F_2 = \Delta T_3 = 0$.

Для сведения краевой задачи к задаче Коши (задаче с начальными условиями) используем метод начальных параметров. Рассмотрим решение системы (5), представив ее в виде одного векторно-матричного уравнения

$$\frac{d\mathbf{Y}^{(m)}(\eta)}{d\eta} + A(\eta)\mathbf{Y}^{(m)}(\eta) = 0, \quad (6)$$

где $\mathbf{Y}^{(m)}(\eta)$ — вектор состояния системы, $\mathbf{Y}^{(m)}(\eta) = (\Delta Q_1^{(m)}, \Delta Q_2^{(m)}, \Delta M_3^{(m)}, \Delta \vartheta_3^{(m)}, \Delta u_1^{(m)}, \Delta u_2^{(m)})$; $A(\eta)$ — матрица коэффициентов системы.

Решение уравнения (6) запишем в виде

$$\mathbf{Y}^{(m)}(\eta) = \mathbf{K}^{(m)}(\eta)\mathbf{C}^{(m)}, \quad (7)$$

где $\mathbf{K}^{(m)}(\eta)$ — фундаментальная матрица решений на шаге нагружения; $\mathbf{C}^{(m)}$ — вектор постоянных на m -м шаге.

Для получения матрицы $\mathbf{K}^{(m)}(\eta)$ достаточно проинтегрировать однородную систему уравнений (5) шесть раз со следующими начальными условиями:

$$\mathbf{Y}_1^{(m)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2^{(m)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{Y}_6^{(m)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

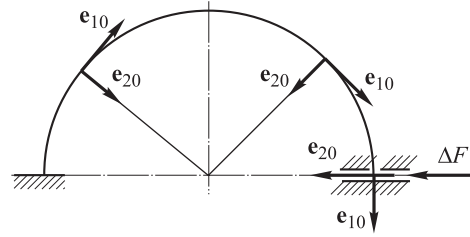


Рис. 3. Схема нагружения полукольца

Каждое решение $\mathbf{Y}_i^{(m)}(\eta)$ будет i -м столбцом матрицы $\mathbf{K}^{(m)}(\eta)$. В соответствии с приведенными выше краевыми условиями при $\eta = 0$ имеем $c_4^{(m)} = c_5^{(m)} = c_6^{(m)} = 0$. Для оставшихся трех компонент вектора $\mathbf{C}^{(m)}$ получим три алгебраических уравнения из условий при $\eta = 1$:

$$\begin{cases} k_{21}^{(m)}(1)c_1^{(m)} + k_{22}^{(m)}(1)c_2^{(m)} + k_{23}^{(m)}(1)c_3^{(m)} = \Delta F; \\ k_{41}^{(m)}(1)c_1^{(m)} + k_{42}^{(m)}(1)c_2^{(m)} + k_{43}^{(m)}(1)c_3^{(m)} = 0; \\ k_{51}^{(m)}(1)c_1^{(m)} + k_{52}^{(m)}(1)c_2^{(m)} + k_{53}^{(m)}(1)c_3^{(m)} = 0, \end{cases}$$

где $k_{ij}^{(m)}(1)$ — компоненты матрицы $\mathbf{K}^{(m)}(1)$.

Из системы (5) находим оставшиеся три константы $c_1^{(m)}, c_2^{(m)}, c_3^{(m)}$ и можем полностью сформировать решение $\mathbf{Y}^{(m)}(\eta)$ на текущем m -м шаге по формуле (7). Этот алгоритм повторяется заранее намеченное число шагов нагружения n . В итоге имеем напряженно-деформированное состояние стержня:

$$Q_i^{(n)}(\eta) = \sum_{j=1}^n \Delta Q_i^{(j)}(\eta); \quad M_3^{(n)}(\eta) = \sum_{j=1}^n \Delta M_3^{(j)}(\eta);$$

$$\vartheta_3^{(n)}(\eta) = \sum_{j=1}^n \Delta \vartheta_3^{(j)}(\eta); \quad u_{xi}^{(n)}(\eta) = \sum_{j=1}^n \Delta u_{xi}^{(j)}(\eta), \quad i = 1, 2.$$

Заметим, что внутренние силы, моменты и углы поворота просто суммируются на каждом шаге, а линейные перемещения необходимо суммировать в неизменном декартовом базисе. Поэтому на каждом шаге нагружения формируется соответствующая матрица перехода. Это происходит следующим образом. Сначала формируется матрица преобразования \mathbf{L}^0 декартова базиса $\{\mathbf{i}\}$ в связанный недеформированный $\{\mathbf{e}_0(\eta)\}$ (рис. 4). Угол между ортами \mathbf{i}_1 и \mathbf{e}_{10} равен $\vartheta_{30}(\eta) = \pi/2 - \varphi(\eta)$, где $\varphi(\eta) = s/R$. Поэтому матрица \mathbf{L}^0 имеет вид

$$\mathbf{L}^0(\eta) = \begin{matrix} & \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{e}_{10} & \cos \vartheta_{30}(\eta) & \sin \vartheta_{30}(\eta) \\ \mathbf{e}_{20} & \sin \vartheta_{30}(\eta) & -\cos \vartheta_{30}(\eta) \end{matrix} =$$

$$= \mathbf{e}_{10} \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 \\ \sin \varphi(\eta) & \cos \varphi(\eta) \\ \mathbf{e}_{20} \cos \varphi(\eta) & -\sin \varphi(\eta) \end{vmatrix}.$$

Матрица перехода $\mathbf{L}^{(m-1)}(\eta)$ от недеформированного базиса $\{\mathbf{e}_0(\eta)\}$ к деформированному $\{\mathbf{e}^{(m-1)}(\eta)\}$ на $(m - 1)$ -м шаге (рис. 5):

$$\mathbf{L}^{(m-1)}(\eta) = \mathbf{e}_1^{(m-1)} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{10} & \mathbf{e}_{20} \\ \cos \vartheta_3^{(m-1)}(\eta) & \sin \vartheta_3^{(m-1)}(\eta) \\ \mathbf{e}_2^{(m-1)} \begin{vmatrix} -\sin \vartheta_3^{(m-1)}(\eta) & \cos \vartheta_3^{(m-1)}(\eta) \end{vmatrix} \end{vmatrix},$$

где

$$\vartheta_3^{(m-1)}(\eta) = \sum_{i=1}^{m-1} \Delta \vartheta_3^{(i)}(\eta).$$

Тогда на каждом текущем шаге m приращение линейных перемещений в декартовом базисе определяется как

$$\begin{vmatrix} \Delta u_{x1}^{(m)}(\eta) \\ \Delta u_{x2}^{(m)}(\eta) \end{vmatrix} = (\mathbf{L}^{(m-1)}(\eta) \mathbf{L}^0(\eta))^T \begin{vmatrix} \Delta u_1^{(m)}(\eta) \\ \Delta u_2^{(m)}(\eta) \end{vmatrix}.$$

Зная линейные перемещения, можно определить и деформированное состояние полукольца

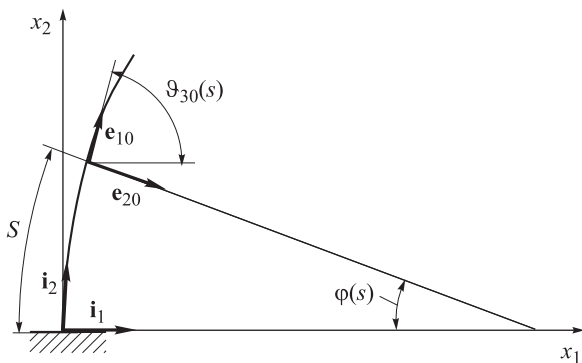


Рис. 4. Связь между центральным углом $\varphi(s)$ и углом $\vartheta_{30}(s)$ (для вывода матрицы преобразования \mathbf{L}^0)

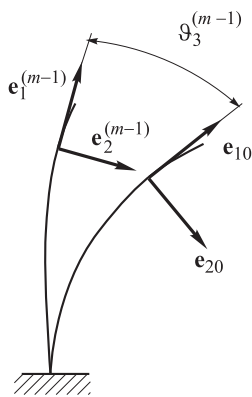


Рис. 5. Связь между базисами $\{\mathbf{e}_0(\eta)\}$ и $\{\mathbf{e}^{(m-1)}(\eta)\}$ (для вывода матрицы преобразования $\mathbf{L}^{(m-1)}(\eta)$)

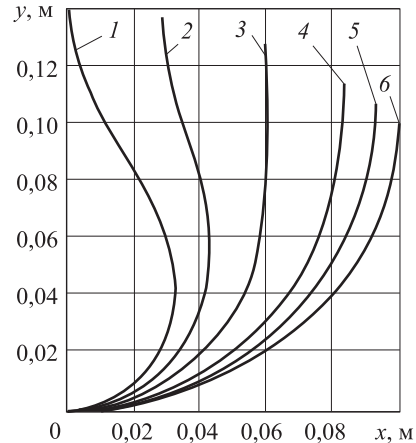


Рис. 6. Виды деформированной оси кольца, полученные при расчете:
1 — $F = 4$ Н; 2 — $F = 3$ Н; 3 — $F = 2$ Н; 4 — $F = 1$ Н;
5 — $F = 0,5$ Н; 6 — $F = 0$

на каждом шаге нагружения. На рис. 6 представлено деформированное состояние кольца для тех же сил и при той же жесткости, что и в монографии Е.П. Попова. У Попова теоретически рассчитанная сила смыкания $Q^T = 8,016EI_x/R^2$, где EI_x — жесткость. При расчете были приняты следующие параметры кольца: радиус кольца $R = 10$ см; высота сечения $h = 0,5$ мм; ширина сечения $b = 4,8$ мм; модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Тогда $EI_x/R^2 = 1$ Н, и сила $Q^T = 8,016$ Н. Расчетная сила смыкания полукольца $F^P = 4,05$ Н, тогда расчетная сила смыкания полного кольца $Q^P = 8,1$ Н. Погрешность составляет около 1 %. Такая точность достигается при 40 шагах нагружения и относительной точности интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом Адамса, не превышающей 10^{-4} .

Задача о нагружении консольной балки концевой сосредоточенной «мертвой» силой. На рис. 7 приведена консольная балка, нагружен-

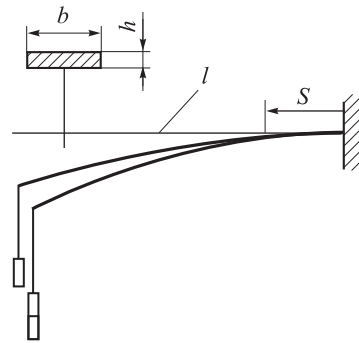


Рис. 7. Схема нагружения балки «мертвой» нагрузкой

ная на конце вертикальной силой, не меняющей своего направления в пространстве. Это может быть сила веса груза. Длина балки l , b и h — ширина и высота прямоугольного сечения.

Данная задача также точно решена Е.П. Поповым [9]. На рис. 8 приведены виды изогнутой (деформированной) оси балки, полученные им при различных значениях силы, где H — жесткость балки при изгибе, $H = EI_x = Ebh^3/12$. Краевые условия данной задачи следующие: 1) при $\eta = 0$ (в неподвижной заделке справа) $\Delta u_1^{(m)} = \Delta u_2^{(m)} = \Delta \vartheta_3^{(m)} = 0$; 2) при $\eta = 1$ (на свободном конце слева) $\Delta Q_1^{(m)} = \Delta F_1^{(m)}$, $\Delta Q_2^{(m)} = \Delta F_2^{(m)}$, $\Delta M_3^{(m)} = 0$. Нагрузка на левом конце стержня является «мертвой», т. е. от шага к шагу меняются как ее модуль, так и направление по отношению к постоянно меняющимся связанным осям. Поэтому определение сил $\Delta F_1^{(m)}(1)$ и $\Delta F_2^{(m)}(1)$, входящих в граничные условия, представляет отдельную задачу. Внешняя нагрузка, приложенная к стержню по его длине, отсутствует, следовательно, как и в предыдущей задаче, $\Delta F_1 = \Delta F_2 = \Delta T_3 = 0$.

Определим краевую нагрузку — силы $\Delta F_1^{(m)}(1)$, $\Delta F_2^{(m)}(1)$. В случае действия «мертвых» сил необходимо учитывать на каждом шаге по нагрузке тот факт, что сила меняет свое направление по отношению к меняющимся векторам связанного базиса. Поэтому определим так называемое приращение нагрузки на каждом шаге. Это приращение получает не только нагрузка, прикладываемая на m -м шаге, но и вся нагрузка, действующая на балку к данному шагу (т. е. как бы «накопленная» к данному шагу).

Силы $\Delta F_1^{(m)}(1)$, $\Delta F_2^{(m)}(1)$ в краевых условиях при $\eta = 1$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \Delta F_1^{(m)}(1) \\ \Delta F_2^{(m)}(1) \end{vmatrix} &= \mathbf{L}^{(m-1)}(1)\mathbf{L}^0(1) \begin{vmatrix} \Delta F_{x1}^{(m)}(1) \\ \Delta F_{x2}^{(m)}(1) \end{vmatrix} + \\ &+ \Delta \mathbf{L}^m(1)\mathbf{L}^{(m-1)}(1)\mathbf{L}^0(1) \begin{vmatrix} F_{x1}^{(m)}(1) \\ F_{x2}^{(m)}(1) \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\mathbf{L}^0(1)$ — единичная матрица (т. е. декартов базис и связанный недеформированный совпадают); $\Delta \mathbf{L}^m(1)$ — матрица, имеющая вид

$$\Delta \mathbf{L}^m(1) = \begin{vmatrix} 0 & \Delta \vartheta_3^{(m)}(1) \\ -\Delta \vartheta_3^{(m)}(1) & 0 \end{vmatrix}.$$

Первое слагаемое в формуле (8) определяет силы данного m -го шага в связанном базисе

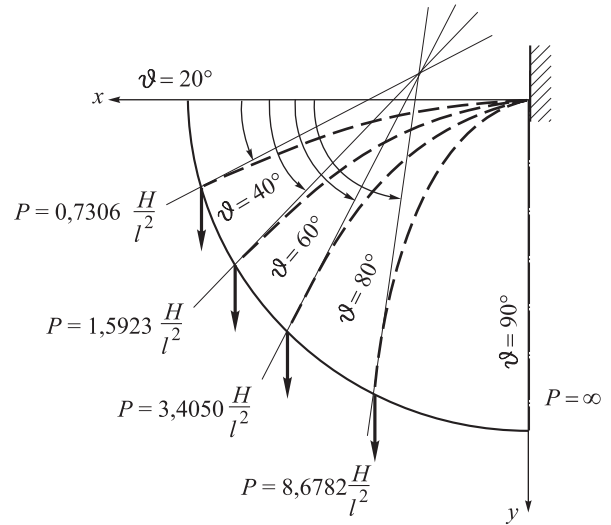


Рис. 8. Виды деформированной оси балки, полученные Е.П. Поповым

($m - 1$) (силы в предыдущем по отношению к совершаемому шагу базисе всегда известны), а второе — выражение для приращения всей силы, приложенной на конце балки, т. е. и накопленной к данному шагу, и прикладываемой на данном шаге. Внешняя сила направлена вертикально вниз, поэтому в декартовом базисе имеем

$$\begin{vmatrix} \Delta F_{x1}^{(m)}(1) \\ \Delta F_{x2}^{(m)}(1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\Delta F \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} F_{x1}^{(m)}(1) \\ F_{x2}^{(m)}(1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -m\Delta F \end{vmatrix}.$$

Обозначим:

$$\mathbf{L}^{(m-1)}(1)\mathbf{L}^0(1) \begin{vmatrix} 0 \\ -\Delta F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta F_1^{(m-1)}(1) \\ \Delta F_2^{(m-1)}(1) \end{vmatrix}$$

— внешние силы m -го шага на конце балки в базисе $\{\mathbf{e}^{(m-1)}\}$;

$$\mathbf{L}^{(m-1)}(1)\mathbf{L}^0(1) \begin{vmatrix} 0 \\ -m\Delta F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1^{(m)}(1) \\ F_2^{(m)}(1) \end{vmatrix}$$

— полные внешние силы, накопленные на предыдущем ($m - 1$)-м шаге и на совершаемом m -м шаге. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \Delta F_1^{(m)}(1) \\ \Delta F_2^{(m)}(1) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \Delta F_1^{(m-1)}(1) \\ \Delta F_2^{(m-1)}(1) \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} 0 & \Delta \vartheta_3^{(m)}(1) \\ -\Delta \vartheta_3^{(m)}(1) & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_1^{(m)}(1) \\ F_2^{(m)}(1) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, определены внешние силы $\Delta F_1^{(m)}(1)$ и $\Delta F_2^{(m)}(1)$, входящие в краевые условия балки при $\eta = 1$ на m -м шаге нагружения.

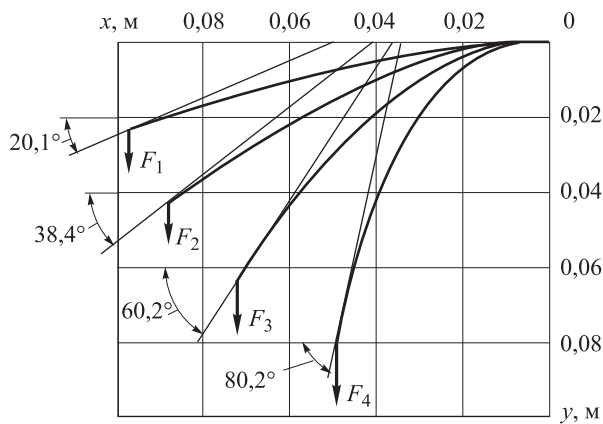


Рис. 9. Виды деформированной оси балки, полученные при расчете

В дальнейшем алгоритме отличаются лишь уравнения для определения трех оставшихся постоянных. Они будут следующими:

$$\begin{cases} (k_{11}^{(m)}(1) + k_{41}^{(m)}(1)F_2^{(m)})c_1^{(m)} + (k_{12}^{(m)}(1) + \\ + k_{42}^{(m)}(1)F_2^{(m)})c_2^{(m)} + (k_{13}^{(m)}(1) + k_{43}^{(m)}(1)F_2^{(m)})c_3^{(m)} = \\ = \Delta F_1^{(m-1)}; \\ (k_{21}^{(m)}(1) - k_{41}^{(m)}(1)F_1^{(m)})c_1^{(m)} + (k_{22}^{(m)}(1) - \\ - k_{42}^{(m)}(1)F_1^{(m)})c_2^{(m)} + (k_{23}^{(m)}(1) - k_{43}^{(m)}(1)F_1^{(m)})c_3^{(m)} = \\ = \Delta F_2^{(m-1)}; \\ k_{31}^{(m)}(1)c_1^{(m)} + k_{32}^{(m)}(1)c_2^{(m)} + k_{33}^{(m)}(1)c_3^{(m)} = 0. \end{cases}$$

Пример расчета. В качестве примера работы МПН при «мертвых» нагрузках рассчитана балка со следующими параметрами: $l = 10$ см; высота сечения $h = 0,5$ мм; ширина сечения $b = 4,8$ мм; модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Тогда $EI_x/R^2 = 1$ Н. Расчеты выполнены при тех же

силах, что и в монографии Е.П. Попова: $F_1 = 0,7306$ Н; $F_2 = 1,5923$ Н; $F_3 = 3,4055$ Н; $F_4 = 8,6782$ Н. Проведено сравнение углов поворота конца балки при этих силах. Число шагов нагружения было от 10 при $F = F_1$, до 40 при $F = F_4$. Анализ результатов расчета, представленных на рис. 9, показал хорошее совпадение с данными, полученными Е.П. Поповым. Наибольшее отклонение между расчетным ($\vartheta_3^p(1) = 38,4^\circ$) и точным ($\vartheta_3^t(1) = 40^\circ$) углами возникло при силе $F_2 = 1,5923$ Н. Погрешность составила 4 %. При других значениях силы погрешность по углу лежит в пределах 1 %. Это доказывает, что и при сложном поведении нагрузки МПН обеспечивает достаточно точные результаты.

Выводы

1. Предложенный алгоритм решения задач механики плоских стержней при больших перемещениях является приближенным, но точность, по мнению автора, является вполне приемлемой для инженерной практики.

2. Преимуществом предложенного метода перед методами «пристрелки» и продолжения по параметру является достаточно простая алгоритмизация для численного счета, а также легкость варьирования геометрии (в плане как осевой линии, так и переменности жесткости по длине) и свойств материала стержня.

3. Приведенный алгоритм численного исследования глубокого деформирования плоского стержня можно достаточно легко адаптировать к решению задач статического нагружения конструкций в виде пространственно-криволинейных стержней сколь угодно сложной геометрии.

Литература

- [1] Левин В.Е., Пустовой Н.В. *Механика деформирования криволинейных стержней*. Новосибирск, Изд-во НГТУ, 2008. 208 с.
- [2] Сорокин Ф.Д. Прямое тензорное представление уравнений больших перемещений гибкого стержня с использованием вектора конечного поворота. *Известия РАН. МТТ*, 1994, № 1, с. 164–168.
- [3] Наумов А.М., Соколов А.М., Соколов А.И. Определение напряженно-деформированного состояния жестких проводов, находящихся в потоке воздуха. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2008, № 2, с. 11–21.
- [4] Du H., Xiong W., Wang H., Wang Z., Yuan B. Nonlinear dynamic deformation simulation for helical rod like objects. *Engineering Review*, 2013, vol. 33, is. 3, pp. 233–238.
- [5] Rashidinia J. Finite difference methods for a class of two-point boundary value problems. *IUST International Journal of Engineering Science*, 2008, vol. 19, no. 5–2, pp. 67–72.
- [6] Dinkar Sharma, Ram Jiwari, Sheo Kumar. Numerical Solution of Two Point Boundary Value

- Problems Using Galerkin-Finite Element Method. *International Journal of Nonlinear Science*, 2012, vol. 13, no. 2, pp. 204–210.
- [7] Pai P.F. Geometrically exact beam theory without Euler angles. *International Journal of Solids and Structures*, 2011, no. 48, pp. 3075–3090.
- [8] Borse K.N., Dubey S. Geometric Linear and Nonlinear Analysis of Beam. *International Journal of Engineering Research & Technology*, 2013, no. 2 (7), pp. 415–423.
- [9] Попов Е.П. *Теория и расчет гибких упругих стержней*. Москва, Наука, 1986. 296 с.
- [10] Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. *Проблемы нелинейного деформирования. Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела*. Москва, Наука, 1988. 230 с.
- [11] Данилин А. Н. *Решение задач нелинейной механики гибких систем методом наилучшей параметризации*. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Москва, 2005. 290 с.
- [12] Лалин В.В., Яваров А.В. Построение и тестирование конечного элемента геометрически нелинейного стержня Бернулли-Эйлера. *Жилищное строительство*, 2013, № 5, с. 51–55.
- [13] Лалин В.В., Розин Л.А., Кушова Д.А. Вариационная постановка плоской задачи геометрически нелинейного деформирования и устойчивости упругих стержней. *Инженерно-строительный журнал*, 2013, № 1 (36), с. 87–96.
- [14] Власов В.З. *Избранные труды. Общая теория оболочек. Т. 1*. Москва, Изд-во Академии наук СССР, 1962. 528 с.
- [15] Светлицкий В.А. *Строительная механика машин. Механика стержней. В 2 т. Т. 1: Статика*. Москва, Физматлит, 2009. 408 с.

References

- [1] Levin V.E., Pustovoi N.V. *Mekhanika deformirovaniia krivolineinykh sterzhnei* [The mechanics of deformation of curved rods]. Novosibirsk, NSTU publ., 2008. 208 p.
- [2] Sorokin F.D. Priamoe tenzornoe predstavlenie uravnenii bol'shikh peremeshchenii gibkogo sterzhnia s ispol'zovaniem vektora konechnogo povorota [Direct representation of the tensor equations of large displacements of the flexible rod with finite rotation vector]. *Izvestiia RAN. MTT* [Mechanics of Solids]. 1994, no. 1, pp. 164–168.
- [3] Naumov A.M., Sokolov A.M., Sokolov A.I. Opredelenie napriazhenno-deformirovannogo sostoiianiia zhestkikh provodov, nakhodiashchikhsia v potoke vozdukhia [Determination of Stress and Strain State of Rigid Wires in Air Flow]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering]. 2008, no. 2, pp. 11–21.
- [4] Du H., Xiong W., Wang H., Wang Z., Yuan B. Nonlinear dynamic deformation simulation for helical rod like objects. *Engineering Review*, 2013, vol. 33, is. 3, pp. 233–238.
- [5] Rashidinia J. Finite difference methods for a class of two-point boundary value problems. *IUST International Journal of Engineering Science*, 2008, vol. 19, no. 5–2, pp. 67–72.
- [6] Dinkar Sharma, Ram Jiwari, Sheo Kumar. Numerical Solution of Two Point Boundary Value Problems Using Galerkin-Finite Element Method. *International Journal of Nonlinear Science*, 2012, vol. 13, no. 2, pp. 204–210.
- [7] Pai P.F. Geometrically exact beam theory without Euler angles. *International Journal of Solids and Structures*, 2011, no. 48, pp. 3075–3090.
- [8] Borse K.N., Dubey S. Geometric Linear and Nonlinear Analysis of Beam. *International Journal of Engineering Research & Technology*, 2013, no. 2 (7), pp. 415–423.
- [9] Popov E.P. *Teoriia i raschet gibkikh uprugikh sterzhnei* [Theory and Design of flexible elastic rods]. Moscow, Nauka publ., 1986. 296 p.
- [10] Grigoliuk E. I., Shalashilin V. I. *Problemy nelineinogo deformirovaniia. Metod prodolzheniia resheniia po parametru v nelineinykh zadachakh mekhaniki tverdogo deformiruемого tela* [Problems of nonlinear deformation. Continuation method on parameter in nonlinear problems of solid deformable body mechanics]. Moscow, Nauka publ., 1988. 230 p.
- [11] Danilin A. N. *Reshenie zadach nelineinoy mekhaniki gibkikh sistem metodom nailuchshei parametrizatsii*. Diss. ... dokt. fiz.-mat. nauk [Solving problems of nonlinear mechanics of

- flexible systems, the best method of parameterization. Dr. phys. & math. sci. diss.]. Moscow, 2005. 290 p.
- [12] Lalin V.V., Iavarov A.V. Postroenie i testirovanie konechnogo elementa geometricheski nelineinogo sterzhnia Bernulli-Eйлера [Construction and Testing of a Finite Element of (a) the Geometrically Non-Linear Bar of Bernoulli-Euler]. *Zhilishchnoe stroitel'stvo* [Housing Construction]. 2013, no. 5, pp. 51–55.
- [13] Lalin V.V., Rozin L.A., Kushova D.A. Variatsionnaia postanovka ploskoi zadachi geometricheski nelineinogo deformirovaniia i ustoychivosti uprugikh sterzhnei [Variational functionals for two-dimensional equilibrium and stability problems of Cosserat-Timoshenko elastic rods]. *Inzhenerno-stroitel'nyi zhurnal* [Magazine of Civil Engineering]. 2013, no. 1 (36), pp. 87–96.
- [14] Vlasov V.Z. *Izbrannye trudy. Obshchaia teoriia obolochek. T. 1* [Selected works. The general theory of shells. Vol. 1]. Moscow, AN SSSR publ., 1962. 528 p.
- [15] Svetlitskii V.A. *Stroitel'naiia mekhanika mashin. Mekhanika sterzhnei. V 2 t. T. 1: Statika* [Construction machinery mechanic. Mechanics rods. Vol. 1. Static]. Moscow, Fizmatlit publ., 2009. 408 p.


Статья поступила в редакцию 23.06.2016

Информация об авторе

НАУМОВ Андрей Михайлович (Москва) — кандидат технических наук, доцент кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: nam63@mail.ru).

Information about the author

NAUMOV Andrey Mikhailovich (Moscow) — Candidate of Science (Eng.), Associate Professor, Department of Applied Mechanics. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: nam63@mail.ru).



В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана
вышло в свет 2-е издание учебного пособия
А.В. Туманова, В.В. Зеленцова, Г.А. Щеглова

**«Основы компоновки бортового оборудования
космических аппаратов»**

Рассмотрены этапы проектирования космического аппарата и основные документы, необходимые для выполнения его компоновки. Изложены требования, предъявляемые к компоновке целевого оборудования, а также к аппаратуре системы управления движением и другим системам бортового оборудования. Приведены критерии оценки качества выполненной компоновки и обширный иллюстративный материал по обеспечивающим системам бортового оборудования.

Второе издание дополнено описанием не вошедших в первое издание элементов бортового оборудования, а также нормативными документами, регламентирующими его компоновку.

Содержание учебного пособия соответствует курсу лекций, которые авторы читают в МГТУ им. Н. Э. Баумана.

По вопросам приобретения обращайтесь:
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;
press@bmstu.ru; www.baumanpress.ru