

Авиационная и ракетно-космическая техника

УДК 531.37;534.1

DOI 10.18698/0536-1044-2017-7-81-89

Нелинейная динамика космического аппарата с присоединенной упругой стержневой системой*


С.В. Русских

МАИ (НИУ), 125993, Москва, Российская Федерация, ГСП-3, А-80, Волоколамское шоссе, д. 4

Nonlinear Dynamics of a Space Vehicle with an Attached Elastic Rod System

S.V. Russkikh

Moscow Aviation Institute (Nation Research University), 125993, Moscow, Russian Federation, A-80, GSP-3, Volokolamskoe Hwy., Bldg. 4

 e-mail: sergey.russkikh@rambler.ru

i Рассмотрена нелинейная динамика плоской стержневой системы, состоящей из упругих нерастяжимых стержней, концы которых связаны между собой упруговязкими узловыми шарнирами, допускающими большие углы поворота. Стержневая система присоединена к недеформируемому космическому аппарату, совершающему поворот относительно своего центра тяжести и перемещения по горизонтальной и вертикальной оси как свободное твердое тело. Движение такой системы описано в подвижной системе координат. Перемещения каждого стержня характеризуются его конечным поворотом как твердого тела относительно прямой, проходящей через два соседних шарнирных узла, и изгибом с малым поперечным перемещением. Уравнения движения получены в скоростях для космического аппарата и в выбранных обобщенных координатах для стержневой системы на основании принципа возможных перемещений. Приведены примеры расчета с анализом сходимости нелинейных систем дифференциальных уравнений при их интегрировании. Показан способ упрощения вычислений путем приведения масс стержней к узловым массам в шарнирах с необходимыми пояснениями и обоснованиями.

Ключевые слова: нелинейная динамика, космический аппарат, плоская стержневая система, подвижная система координат, упруговязкие шарниры, принцип возможных перемещений

i The nonlinear dynamics of a flat rod system is considered. The system consists of elastic inextensible rods, the ends of which are connected by elastic-viscous nodal hinges allowing large rotation angles. The rod system is attached to a non-deformable space vehicle rotating relative to its centre of gravity and moving along the horizontal and vertical axis as a free rigid body. The motion of such a system is described in the moving coordinates system. The displacements of each rod are characterized by the rod's finite rotation as a rigid body rela-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-08-06259а).

tive to a straight line passing through two neighboring hinge nodes, and by the bend with a small lateral displacement. The motion equations are obtained in velocities for the space vehicle, and in the selected generalized coordinates for the rod system based on the principle of possible displacements. The calculation examples with the analysis of convergence when integrating nonlinear systems of differential equations are presented. The method of simplifying the calculations by reducing the rod masses to nodal masses in hinges is described, with necessary explanations and justifications.

Keywords: nonlinear dynamics, space vehicle, flat rod system, moving coordinate system, elastic-viscous hinges, principle of possible displacements

Динамике упругих стержневых систем при больших перемещениях и углах поворота посвящено большое количество работ, в частности [1, 2]. Такие системы имеют многочисленные практические приложения с различными задачами в динамике космических конструкций [3–7]. В конечно-элементных моделях гибких стержневых систем, используемых в конечно-элементных комплексах (ANSYS, NASTRAN, FEMAP, ABAQUS и др.), наряду с изгибом и кручением обычно учитывается и продольное растяжение стержней. Это приводит к сравнительно простым и разряженным системам дифференциальных уравнений для узловых перемещений и углов поворота [5]. Однако вследствие большей жесткости элементов на растяжение по сравнению с таковой на изгиб и кручение в конечно-элементных моделях присутствуют высокочастотные осцилляции, связанные с продольными перемещениями. Поэтому дифференциальные уравнения движения таких систем являются уравнениями «жесткого типа» и имеют склонность с вычислительной неустойчивости при больших интервалах времени.

В отличие от статьи [8] в данной работе исследована плоская стержневая система, состоящая из упругих нерастяжимых стержней, движение которой описано в подвижной системе координат.

Цель работы — получение дифференциальных уравнений движения и применение их для решения задач в различных постановках.

Постановка задачи. Рассмотрим присоединенную к космическому аппарату (КА) плоскую стержневую систему, состоящую из упругих произвольно ориентированных нерастяжимых стержней, концы которых связаны между собой упруговязкими узловыми шарнирами, допускающими большие углы поворота (рис. 1). Погонные массы t_k и изгибные жесткости EI_k стержней приняты постоянными в пределах их длин l_k ($k = 1, 2, \dots, n$). В шарнирных узлах

$k = 0, 1, \dots, n$ присутствуют сосредоточенные массы μ_k и пружины с угловой жесткостью κ_k и вязким демпфированием ν_k . В некоторых узлах система может иметь стационарные или переменные (управляемые) изломы с заданными углами $\theta(t)$.

Движение свободной составной системы (КА плюс стержневая система) описывается в подвижной системе координат S_{xy} , связанной с недеформируемым твердым телом (КА), с началом в его центре масс (центре тяжести — ЦТ) S . Параметры КА: M_0 — масса; J_0 — момент инерции относительно ЦТ. Проекции скорости точки S на оси x и y подвижной системы координат обозначим как $v_{Cx}(t)$ и $v_{Cy}(t)$, а угловую скорость КА — $\Omega(t)$. Кинематика КА определяется проекциями на оси подвижной системы координат перемещений ЦТ u_{Cx} и u_{Cy} , а также углом поворота θ_C .

Пассивное управление изменением формы системы осуществляется путем освобождения связей предварительно напряженных узловых пружин с последующим торможением на ограничителях, а активное управление системой — за счет приложенной системы сил и моментов: на КА действуют момент $M_C(t)$ и силы $X_C(t)$, $Y_C(t)$, приложенные в его ЦТ; в каждом шарнирном узле возникают силы $X_k(t)$ и $Y_k(t)$, ($k = 1, 2, \dots, n$). Все силы записываются в проек-

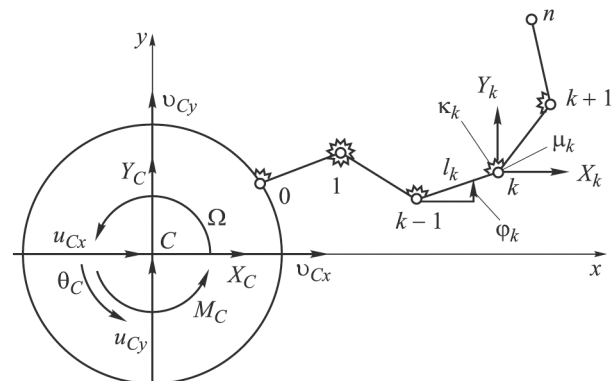


Рис. 1. Общий вид рассматриваемой системы

циях на оси подвижной системы координат $Cxу$.

Перемещения k -го стержня относительно подвижной системы координат обусловлены его поворотом как твердого тела на угол $\varphi_k(t)$, отсчитываемый от оси x , т. е. поворотом прямой, проходящей через узлы $k-1$ и k , и изгибом относительно этой прямой. Изгибное (поперечное) перемещение $\eta_k(s,t)$ точки s k -го стержня как элемента будем считать малым и упругим (рис. 2) и представим в виде

$$\begin{aligned} \eta_k(s,t) &= \alpha_k(t)\sigma_k(s) + \beta_k(t)\tau_k(s); \\ \sigma_k(s) &= \frac{s}{l_k^2}(l_k - s)^2; \\ \tau_k(s) &= -\frac{s^2}{l_k^2}(l_k - s), \end{aligned} \quad (1)$$

где α_k и β_k — углы между касательной к изогнутой оси стержня и его недеформированной осью в k -м шарнирном узле.

Разность углов поворота левого ($k+1$ -го) стержня и правого края k -го стержня в шарнире k с учетом излома на угол θ_k (рис. 2) определяется выражением

$$\Delta\varphi_k = (\varphi_{k+1} + \alpha_{k+1}) - (\varphi_k + \beta_k) - \theta_k. \quad (2)$$

Координаты k -го узла деформированной стержневой системы:

$$x_k = x_0 + \sum_{j=1}^k l_j \cos \varphi_j; \quad y_k = y_0 + \sum_{j=1}^k l_j \sin \varphi_j, \quad (3)$$

где x_0, y_0 — постоянные координаты узла $k=0$, расположенного на КА.

Координаты точки s k -го стержня с учетом его изгиба и выражения (1) имеют вид

$$\begin{aligned} x &= x_k - (l_k - s)\cos \varphi_k - \eta_k \sin \varphi_k; \\ y &= y_k - (l_k - s)\sin \varphi_k + \eta_k \cos \varphi_k. \end{aligned} \quad (4)$$

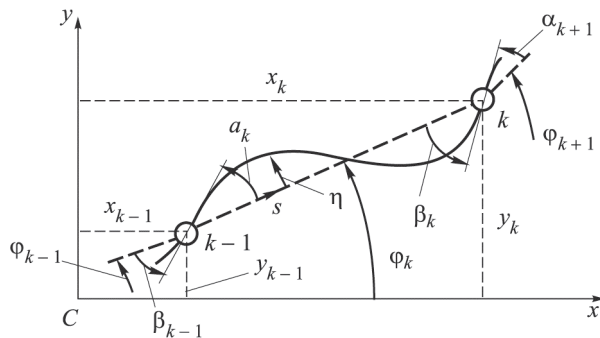


Рис. 2. Схема для расчета стержневого элемента системы

Проекции ускорения в точке s k -го стержня на оси x и y подвижной системы координат определяются по формулам:

$$\begin{aligned} a_x &= \dot{v}_{Cx} - \Omega v_{Cy} - \dot{\Omega}y - \Omega^2 x - 2\Omega\dot{y} + \ddot{x}; \\ a_y &= \dot{v}_{Cy} + \Omega v_{Cx} + \dot{\Omega}x - \Omega^2 y + 2\Omega\dot{x} + \ddot{y}. \end{aligned} \quad (5)$$

Ускорения в k -м узле a_{xk} и a_{yk} получим из соотношений (5), заменив x и y на x_k и y_k :

$$\begin{aligned} a_{xk} &= \dot{v}_{Cx} - \Omega v_{Cy} - \dot{\Omega}y_k - \Omega^2 x_k - 2\Omega\dot{y}_k + \ddot{x}_k; \\ a_{yk} &= \dot{v}_{Cy} + \Omega v_{Cx} + \dot{\Omega}x_k - \Omega^2 y_k + 2\Omega\dot{x}_k + \ddot{y}_k. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнения движения. Потенциальная энергия узловых пружин и изгиба стержней по форме (1) и с учетом выражений (2), $\varphi_0 = 0, \beta_0 = 0$ определяется как

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \kappa_k (\Delta\varphi_k)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{4EI_k}{l_k} (\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \alpha_k \beta_k). \quad (7)$$

Вариация этой потенциальной энергии с учетом соотношений вариаций углов $\delta\Delta\varphi_k = (\delta\varphi_{k+1} + \delta\alpha_{k+1}) - (\delta\varphi_k + \delta\beta_k), \delta\theta_k = 0$ ($k=0, 1, \dots, n-1$), $\delta\varphi_0 = 0$ и $\delta\beta_0 = 0$ представляется в виде

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \sum_{k=0}^{n-1} \kappa_k \Delta\varphi_k \delta\Delta\varphi_k + \\ &+ \sum_{k=1}^n \frac{4EI_k}{l_k} \left[\left(\alpha_k + \frac{1}{2}\beta_k \right) \delta\alpha_k + \left(\frac{1}{2}\alpha_k + \beta_k \right) \delta\beta_k \right], \end{aligned}$$

где слагаемые, содержащие θ_k ($k=0, 1, \dots, n-1$), при формировании системы дифференциальных уравнений записываются в их правые части.

Уравнения движения составной системы формируются на основе принципа возможных перемещений:

$$\delta\Pi - \delta A_d - \delta A_m - \delta A_p = 0, \quad (8)$$

где δA_d — вариация работы демпфирующих моментов в упруговязких шарнирах; δA_m — вариация работы инерционных сил распределенных масс стержней и сосредоточенных масс в узлах; δA_p — вариация работы внешних сил и моментов, приложенных к системе.

Вариация работы демпфирующих моментов в упруговязких шарнирах с учетом соотношений $\Delta\varphi_k = (\varphi_{k+1} + \alpha_{k+1}) - (\varphi_k + \beta_k) - \theta_k, \varphi_0 = 0$ и $\beta_0 = 0$ имеет вид

$$\delta A_d = - \sum_{k=0}^{n-1} v_k \Delta\varphi_k \delta\Delta\varphi_k. \quad (9)$$

Множители выражения (9), содержащие $\dot{\theta}_k$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$), при формировании системы дифференциальных уравнений записываются в их правые части.

Вариация работы инерционных сил распределенных масс стержней и сосредоточенных масс в узлах

$$\begin{aligned} \delta A_m = & - \sum_{k=1}^n \left\{ \delta u_{Cx} \left[\int_0^{l_k} m_k a_x ds + \mu_k a_{xk} + \right. \right. \\ & \left. \left. + M_0 (\dot{v}_{Cx} - \Omega v_{Cy}) \right] + \right. \\ & + \delta u_{Cy} \left[\int_0^{l_k} m_k a_y ds + \mu_k a_{yk} + M_0 (\dot{v}_{Cy} + \Omega v_{Cx}) \right] + \\ & + \delta \theta_C \left[\int_0^{l_k} m_k (a_y x - a_x y) ds + \mu_k (a_{yk} x_k - a_{xk} y_k) + \right. \\ & \left. + J_0 \dot{\Omega} \right] + \int_0^{l_k} m_k (a_x \delta x + a_y \delta y) ds + \\ & \left. + \mu_k (a_{xk} \delta x_k + a_{yk} \delta y_k) \right\}. \quad (10) \end{aligned}$$

Вариация работы внешних сил и моментов, приложенных к системе,

$$\begin{aligned} \delta A_p = & \delta u_{Cx} \left(X_C + \sum_{k=1}^n X_k \right) + \delta u_{Cy} \left(Y_C + \sum_{k=1}^n Y_k \right) + \\ & + \delta \theta_C \left[M_C + \sum_{k=1}^n (Y_k x_k - X_k y_k) \right] + \\ & + \sum_{k=1}^n (X_k \delta x_k + Y_k \delta y_k). \quad (11) \end{aligned}$$

С использованием формул (3), (4) вариации δx_k , δy_k выражаются через $\delta \varphi_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$), а δx , δy — $\delta \varphi_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) и $\delta \alpha_k$, $\delta \beta_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Вариации углов $\delta \alpha_k$, $\delta \beta_k$ также входят в состав уравнения для вариаций $\delta \eta_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Затем уравнение (8) с учетом формул (5)–(7) и (9)–(11) записывается через вариации δu_{Cx} , δu_{Cy} , $\delta \theta_C$, $\delta \varphi_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $\delta \alpha_k$ и $\delta \beta_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Приравнявая к нулю коэффициенты при этих вариациях, получаем систему из $3n+3$ обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка для неизвестных скоростей v_{Cx} , v_{Cy} , Ω и обобщенных координат φ_j , α_r , β_r ($j, r = 1, 2, \dots, n$). Ввиду сложности и громоздкости система уравнений в данной работе не представлена.

При решении полученной системы уравнений можно определить перемещения и угол поворота КА из следующих дифференциальных соотношений:

$$\begin{aligned} \dot{u}_{Cx} + \Omega u_{Cx} &= v_{Cx}; \\ \dot{u}_{Cy} + \Omega u_{Cy} &= v_{Cy}; \\ \dot{\theta}_C &= \Omega. \end{aligned} \quad (12)$$

Система уравнений движения в матричном виде. Для интегрирования с помощью стандартной программы полученная система нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка записывается в матричном виде

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{Nz} + \mathbf{Dp} + \mathbf{Kq} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2,$$

где $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)_{(3n+3) \times (3n+3)}$ — симметричная нелинейная матрица инерции, коэффициенты которой зависят от обобщенных координат, $\mathbf{r} = [\mathbf{p} \ \mathbf{q}]_{(6n+6) \times 1}^T$; $\mathbf{p} = [v_{Cx}, v_{Cy}, \Omega, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dot{\alpha}_1, \dots, \dot{\alpha}_n, \beta_1, \dots, \beta_n]_{(3n+3) \times 1}^T$; — вектор линейных и угловых скоростей, $\mathbf{q} = [u_{Cx}, u_{Cy}, \theta_C, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n]_{(3n+3) \times 1}^T$ — вектор перемещений и углов поворота; $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\mathbf{r}, t)_{(3n+3) \times (2n+3)}$ — матрица нелинейных частей, коэффициенты которой зависят от обобщенных координат, причем квадратная матрица, получаемая из первых $(n+3)$ строк и столбцов, является антисимметричной; $\mathbf{z} = [\Omega v_{Cx}, \Omega v_{Cy}, \Omega^2, (2\Omega \dot{\varphi}_m + \dot{\varphi}_m^2), \{(\dot{\alpha}_m - \dot{\beta}_m)(\Omega + \dot{\varphi}_m)\}]_{(2n+3) \times 1}^T$ — вектор нелинейных частей (m последовательно принимает значения от 1 до n); $\mathbf{D} = \mathbf{D}(t)_{(3n+3) \times (3n+3)}$ и $\mathbf{K} = \mathbf{K}(t)_{(3n+3) \times (3n+3)}$ — симметричные матрицы демпфирования и жесткости соответственно; $\mathbf{Q}_1_{(3n+3) \times 1}$ — вектор правых частей, обусловленный приложенными силами и моментами; $\mathbf{Q}_2_{(3n+3) \times 1}$ — вектор правых частей, обусловленный возможными управляемыми изломами в узлах.

С учетом выражения (12), позволяющего связать дифференциальными соотношениями векторы \mathbf{q} и \mathbf{p} , окончательная матричная запись системы дифференциальных уравнений движения приобретает вид

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = [\mathbf{F}_1(\mathbf{r}, t) \ \mathbf{F}_2(\mathbf{r}, t)]_{(6n+6) \times 1}^T, \quad (13)$$

где $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{(6n+6) \times (6n+6)}$ — единичная матрица;

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1(\mathbf{r}, t) &= -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Nz} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Dp} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Kq} + \\ &+ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}_1 + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}_2; \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_{(3n+3) \times (3n+3)} \mathbf{p} + \mathbf{R};$$

$\tilde{\mathbf{E}}_{(3n+3) \times (3n+3)}$ — единичная матрица;

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{r}, t) = [-\Omega u_{Cx} \ -\Omega u_{Cy} \ 0 \ \dots \ 0]_{(3n+3) \times 1}^T.$$

Система уравнений (13) решалась в программном комплексе компьютерной алгебры компании PTC MathCAD 15.0 M045 с помощью стандартной программы решения систем дифференциальных уравнений AdamsBDF, реализующей метод Адамса («нежесткие системы») и метод обратного дифференцирования («жесткие системы») с автоматическим выбором между ними исходя из входных данных. Данный алгоритм является удобным для интегрирования систем уравнений типа (13).

Исследование сходимости интегрирования уравнений движения. Для оценки сходимости при интегрировании систем нелинейных дифференциальных уравнений с помощью алгоритма AdamsBDF на продолжительных интервалах времени решалась тестовая задача со следующими

исходными данными: $n = 4$; $l_k = 1,5$ м; $m_k = 1,696$ кг/м; $EI_k = 1,374 \cdot 10^4$ Па·м⁴; $\mu_k = 0,5$ кг ($k = 1, \dots, 4$); $\kappa_0 = 6\,000$ Н·м; $\nu_0 = 0,02$ Н·м/с; $\kappa_k = 4\,000$ Н·м; $\nu_k = 0,01$ Н·м/с ($k = 1, 2, 3$); $M_0 = 122,5$ кг; $J_0 = 10$ кг·м²; $x_0 = y_0 = 0,35$ м. Нагрузка на рассматриваемую систему: $M_C(t) = 1\,500$ Н·м при $0 \leq t \leq 1$ с; $M_C(t) = 0$ при $t > 1$ с; $X_C(t) = 500$ Н при $0 \leq t \leq 1$ с; $X_C(t) = 0$ при $t > 1$ с; $Y_C(t) = 500$ Н при $0 \leq t \leq 1$ с; $Y_C(t) = 0$ при $t > 1$ с.

Для оценки сходимости вычислений выполнено два вида исследования: интегрирование системы с варьируемым шагом в заданном интервале; интегрирование системы с заданным постоянным шагом на различных больших интервалах времени. Сравнение результатов в рамках одного исследования проведено по «медленным» движениям системы (по углу по-

Таблица 1

Результаты первого исследования сходимости интегрирования уравнений движения

n	Шаг интегрирования по времени, с	φ_4 , рад	$\dot{\alpha}_1$, рад/с
20	0,1	0,49135614	0,39532537
50	0,04	0,49135615	0,39535410
100	0,02	0,49135614	0,39531046
1 000	0,002	0,49135614	0,39532279
10 000	0,0002	0,49135614	0,39532646

Таблица 2

Результаты второго исследования сходимости интегрирования уравнений движения

Текущий момент времени, с	Интервал интегрирования, с	φ_4 , рад	$\dot{\alpha}_1$, рад/с
30	30	0,013610716	-0,29871016
	60	0,013610794	-0,29881655
	120	0,013610431	-0,29870484
	240	0,013610312	-0,29894626
	480	0,013610362	-0,29848985
60	60	0,48224818	-1,0100441
	120	0,48224767	-1,0101415
	240	0,48224762	-1,0100451
	480	0,48224758	-1,0102209
120	120	-0,22652627	-0,56379181
	240	-0,22652624	-0,56371960
	480	-0,22652622	-0,56374700
240	240	0,50494089	0,48113081
	480	0,50494062	0,48114561

ворота стержня как твердого тела — φ_k) и по «быстрым» движениям системы (по первой производной от угла изгиба левого конца стержня — $\dot{\alpha}_k$).

В первом случае интегрирование проводили в интервале $0 \leq t \leq 2$ с при изменении количества разбиений отрезка n от 20 до 10 000. Результаты этого исследования для момента времени $t = 1$ с приведены в табл. 1. Во втором случае систему интегрировали в интервалах от $0 \leq t \leq 30$ с до $0 \leq t \leq 480$ с при постоянном количестве разбиений отрезка $n = 10\,000$ и сравнивали одноименные величины в некоторые моменты времени. Результаты второго исследования представлены в табл. 2.

Анализ полученных данных показал, что процесс интегрирования является стабильным, в том числе и на больших интервалах интегрирования.

Пример расчета. В качестве примера рассмотрим задачу о реакции системы на произволь-

ный возмущающий импульс. Исходные данные: $n = 4$; $l_k = 1,5$ м; $m_k = 1,696$ кг/м; $EI_k = 1,374 \cdot 10^4$ Па·м⁴; $\mu_k = 0,5$ кг ($k = 1, \dots, 4$); $\kappa_0 = 2\,000$ Н·м; $\nu_0 = 0,02$ Н·м/с; $\kappa_k = 500$ Н·м; $\nu_k = 0,01$ Н·м/с ($k = 1, 2, 3$); $M_0 = 122,5$ кг; $J_0 = 10$ кг·м²; $x_0 = y_0 = 0,35$ м. Нагрузка на систему: $M_C(t) = 1\,500$ Н·м при $0 \leq t \leq 1$ с; $M_C(t) = 0$ при $t > 1$ с; $X_C(t) = 500$ Н при $0 \leq t \leq 1$ с; $X_C(t) = 0$ при $t > 1$ с; $Y_C(t) = 500$ Н при $0 \leq t \leq 1$ с; $Y_C(t) = 0$ при $t > 1$ с. Интегрирование проведено в интервале $0 \leq t \leq 2$ с при $n = 10\,000$.

На рис. 3 показаны графические зависимости параметров КА от времени: *a* — линейных скоростей движения ЦТ КА v_{Cx} и v_{Cy} ; *б* — угловой скорости Ω ; *в* — перемещений ЦТ КА u_{Cx} и u_{Cy} ; *г* — угла поворота θ_C .

На рис. 4 показана форма КА со стержнями в подвижной системе координат в моменты времени $t = 0$ с и $t = 0,4$ с (для отображения изгиба стержней выбран масштабный коэффициент 25, так как максимальный прогиб стерж-

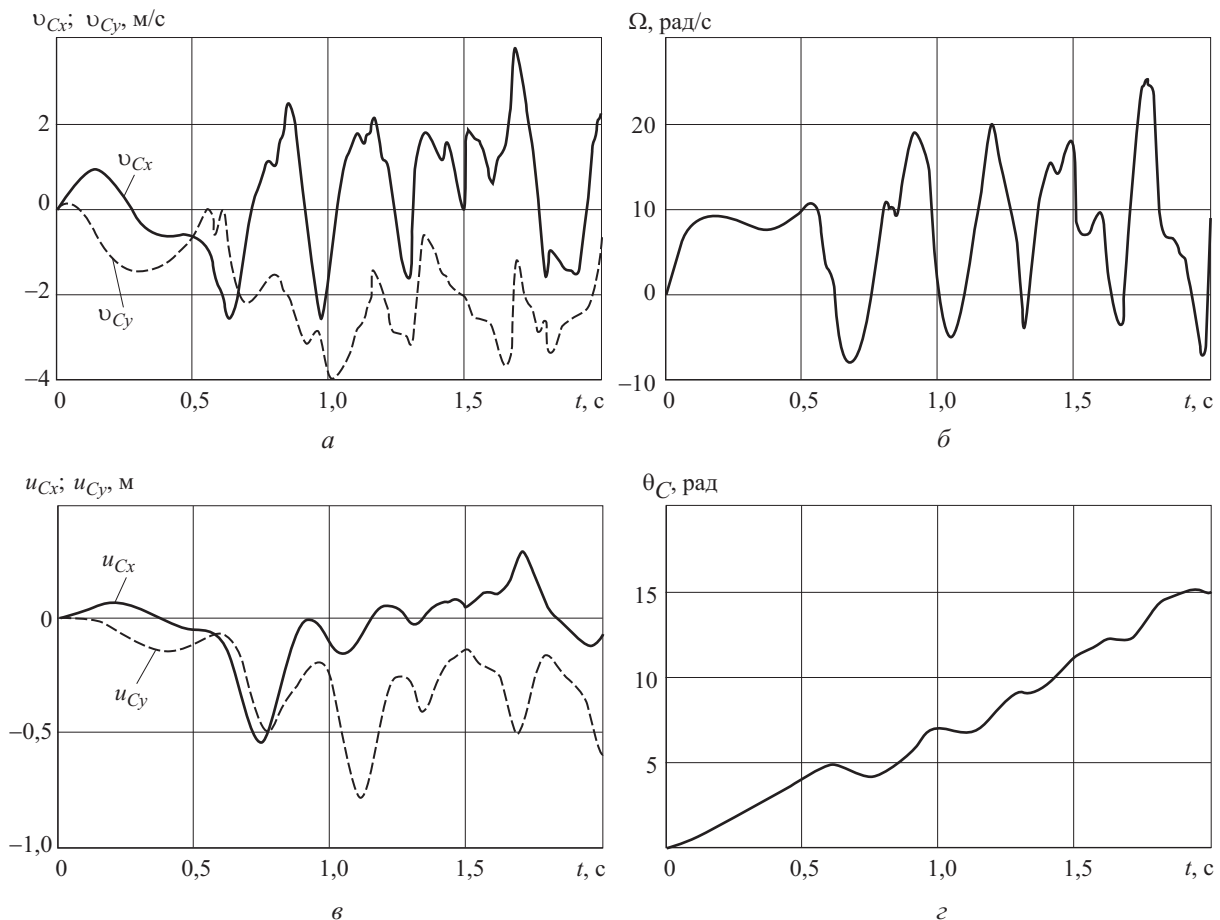


Рис. 3. Зависимости параметров КА от времени t : *a* — линейных скоростей движения ЦТ v_{Cx} и v_{Cy} ; *б* — угловой скорости вращения Ω ; *в* — перемещений ЦТ u_{Cx} и u_{Cy} ; *г* — угла поворота θ_C

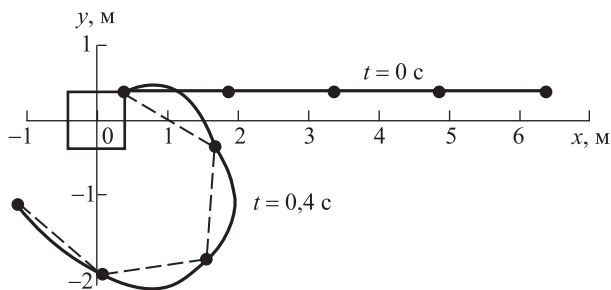


Рис. 4. Форма КА со стержневой системой

ней в рассматриваемый момент времени равен 0,015 м).

Редуцирование стержневой системы. Если масса каждого стержня $m_k l_k$ мала по сравнению с узловой массой μ_k , расположенной в шарнирном узле, то можно редуцировать данную систему следующим образом: привести массу каждого стержня к узловым массам (по половине массы стержня к каждому соседнему узлу) и рассмотреть уравнение движения системы невесомых стержней, имеющих изгибную жесткость и соединенных массивными узловыми шарнирами. В этом случае существенно упрощается аналитический вывод уравнений движения, так как в выражении (10) для вариации работы инерционных сил все слагаемые, стоящие под знаком интегралов

$$\int_0^{l_k} (\dots) ds$$

можно опустить.

Таблица 3

Сравнение результатов расчета, полученных при решении задачи в точной и редуцированной постановках

Отношение масс	φ_1 , град	φ_4 , град	u_{Cx} , м	θ_C , рад
2	<u>-16,436</u>	<u>21,920</u>	<u>0,194</u>	<u>4,046</u>
	-18,122	17,160	0,192	4,040
4	<u>14,277</u>	<u>22,652</u>	<u>0,258</u>	<u>2,240</u>
	13,212	20,339	0,246	2,255
8	<u>-60,441</u>	<u>-142,412</u>	<u>0,104</u>	<u>3,611</u>
	-60,982	-142,663	0,103	3,627
16	<u>-44,534</u>	<u>-180,568</u>	<u>0,354</u>	<u>2,849</u>
	-44,189	-180,659	0,355	2,844
32	<u>-39,314</u>	<u>-177,633</u>	<u>0,627</u>	<u>1,894</u>
	-38,930	-177,281	0,629	1,887

Примечание. Значения в числителе дроби получены при решении задачи в точной постановке, а в знаменателе — в редуцированной.

В качестве примера рассмотрим систему, в которой масса каждого стержня одинаковая и остается постоянной, а узловые массы одинаковые и варьируются, принимая значения от 2 до 32 масс стержней. Рассмотрим решение данной задачи в точной и редуцированной постановках.

Исходные данные для расчета: $n = 4$; $l_k = 1,5$ м; $m_k = 0,509$ кг/м; $EI_k = 1,374 \cdot 10^4$ Па·м⁴; масса стержня $M_k = 0,763$ кг ($k = 1, \dots, 4$); $\kappa_0 = 7\,000$ Н·м; $v_0 = 0,02$ Н·м/с; $\kappa_k = 5\,000$ Н·м; $v_k = 0,01$ Н·м/с ($k = 1, 2, 3$); $M_0 = 122,5$ кг; $J_0 = 10$ кг·м²; $x_0 = y_0 = 0,35$ м. Нагрузка на рассматриваемую систему: $M_C(t) = 1\,000$ Н при $0 \leq t \leq 1$ с; $M_C(t) = 0$ при $t > 1$ с; $X_C(t) = 400$ Н при $0 \leq t \leq 1$ с; $X_C(t) = 0$ при $t > 1$ с; $Y_C(t) = 400$ Н при $0 \leq t \leq 1$ с; $Y_C(t) = 0$ при $t > 1$ с. Отношение общей массы шарнирных грузов к общей массе стержней равно 2, 4, 8, 16 и 32.

Сравнение результатов расчета выполнено по «медленным» движениям, в качестве которых рассматривались углы поворота стержней как твердого тела — φ_k , перемещения и углы поворота КА — u_{Cx} и θ_C . Результаты расчета для момента времени $t = 1$ с приведены в табл. 3.

На рис. 5 показаны графические зависимости угла поворота φ_1 от времени, полученные при решении задачи в точной (1) и редуцированной (2) постановках, для отношения массы шарнирных грузов к массе стержней, равного 2 и 32. Как видно на рис. 5, б, в масштабе графика решения практически совпадают.

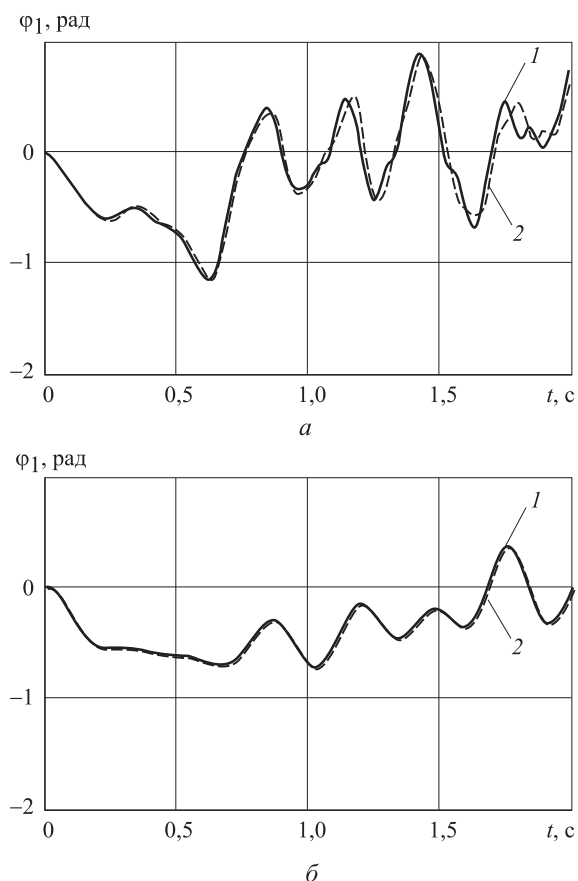


Рис. 5. Зависимости угла поворота φ_1 от времени t , полученные при решении задачи в точной (1) и редуцированной (2) постановках, для отношения массы шарнирных грузов к массе стержней, равного 2 (а) и 32 (б)

На основании анализа результатов, представленных в табл. 3 и на рис. 5, можно утверждать, что при малых массах стержней по сравнению с узловыми массами, можно использовать редуцированную систему, имеющую относительно общего случая более простые уравнения движения.

Выводы

1. Рассмотрена нелинейная динамика плоской стержневой системы, состоящей из упругих нерастяжимых стержней, концы которых связаны между собой упруговязкими узловыми шарнирами. Получена система дифференциальных уравнений и сделано ее преобразование для решения стандартной программой.

2. Выполнена оценка сходимости при интегрировании системы уравнений движения с точки зрения количества шагов интегрирования и интегрирования на больших интервалах по времени.

3. Приведены примеры расчета с определением параметров движения и построением необходимых графиков. Наглядно изображена форма КА со стержневой системой в произвольный момент времени.

4. Показан способ редуцирования системы для случая относительно легких стержней по сравнению с узловыми шарнирными массами.

Литература

- [1] Светлицкий В.А. *Механика стержней. Ч. 2. Динамика*. Москва, Высшая школа, 1987. 304 с.
- [2] Светлицкий В.А. *Механика абсолютно гибких стержней*. Москва, Изд-во МАИ, 2001. 432 с.
- [3] Докучаев Л.В. *Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами*. Москва, Машиностроение, 1987. 232 с.
- [4] Шклярчук Ф.Н. Нелинейные и линеаризованные уравнения движения упругих космических конструкций. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 1996, № 1, с. 161–175.
- [5] Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. *Динамика упругих управляемых конструкций*. Москва, Изд-во МАИ, 2007. 328 с.
- [6] Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Нелинейная динамика трансформируемых стержневых систем. *Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сб. докл. 6-й Всерос. науч. конф. с междунар. участием*, Москва, 16–18 ноября 2016 г., Москва, ИПРИМ РАН, 2016. 213 с.
- [7] Русских С.В. Нелинейная плоская задача динамики космического аппарата с присоединенной стержневой системой. *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Сб. тез. XXIII Междунар. симп. им. А.Г. Горшкова*, Кременки, 13–17 февраля 2017 г., Москва, ООО «ТРП», 2017. 222 с.
- [8] Гришанина Т.В. Динамика управляемого движения упругих систем при конечных перемещениях и поворотах. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2004, № 6, с. 171–186.

References

- [1] Svetlitskii V.A. *Mekhanika sterzhnei. Ch. 2. Dinamika* [Mechanics of rods. Part 2. Dynamics]. Moscow, Vysshaya shkola publ., 1987. 304 p.
- [2] Svetlitskii V.A. *Mekhanika absolutno gibkikh sterzhnei* [Mechanics of absolutely flexible rods]. Moscow, MAI publ., 2001. 432 p.
- [3] Dokuchaev L.V. *Nelineinaya dinamika letatel'nykh apparatov s deformiruemymi elementami* [Nonlinear dynamics of aircraft with deformable elements]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1987. 232 p.
- [4] Shkliarchuk F.N. Nelineinye i linearizovannye uravneniya dvizheniya uprugikh kosmicheskikh konstruktssii [Nonlinear and linearized equations of motion of a flexible space structures]. *Izvestiia RAN. Mekhanika tverdogo tela* [A Journal of Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids]. 1996, no. 1, pp. 161–175.
- [5] Grishanina T.V., Shkliarchuk F.N. *Dinamika uprugikh upravliaemykh konstruktssii* [Driven dynamics of elastic structures]. Moscow, MAI publ., 2007. 328 p.
- [6] Russkikh S.V., Shkliarchuk F.N. Nelineinaya dinamika transformiruemykh sterzhnevnykh sistem [Nonlinear dynamics of a transformable rod systems]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktssii, slozhnykh i geterogennykh sred. Sbornik dokladov 6-i Vserossiiskoi nauchnoi konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem* [Mechanics of composite materials and structures, complex and heterogeneous environments. A collection of papers of the 6th All-Russian scientific conference with international participation]. Moscow, 16–18 November 2016, Moscow, IPRIM RAN publ., 2016. 213 p.
- [7] Russkikh S.V. Nelineinaya ploskaia zadacha dinamiki kosmicheskogo apparata s prisoedinennoi sterzhnevoi sistemoi [Nonlinear plane problem of dynamics of a spacecraft with an attached rod]. *Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstruktssii i sploshnykh sred. Sb. tez. 23 Mezhdunar. simp. im. A.G. Gorshkova* [Dynamic and technological problems of mechanics of constructions and continuous media. Abstracts of the 23 International Symposium named after A.G. Gorshkov]. Kremenki, 13–17 February 2017, Moscow, TRP publ., 2017. 222 p.
- [8] Grishanina T.V. Dinamika upravliaemogo dvizheniya uprugikh sistem pri konechnykh peremeshcheniyakh i povorotakh [Dynamics of controlled motion of elastic systems subject to finite displacements and rotations]. *Izvestiia RAN. Mekhanika tverdogo tela* [A Journal of Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids]. 2004, vol. 39, is. 6, pp. 132–144.

Статья поступила в редакцию 27.03.2017

Информация об авторе

РУССКИХ Сергей Владимирович (Москва) — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прочность авиационных и ракетно-космических конструкций». МАИ (НИУ) (125993, Москва, Российская Федерация, ГСП-3, А-80, Волоколамское шоссе, д. 4, e-mail: sergey.russkih@rambler.ru).

Information about the author

RUSSKIKH Sergey Vladimirovich (Moscow) — Candidate of Science (Physics and Math), Associate Professor, Strength of Aeronautic and Astronautic Constructions Department. Moscow Aviation Institute (Nation Research University) (125993, Moscow, Russian Federation, A-80, GSP-3, Volokolamskoe Hwy., Bldg. 4, e-mail: sergey.russkih@rambler.ru).