

# Расчет и конструирование машин

УДК: 621.541.1

## Математическое моделирование манипулятора типа трипод на базе бесштоковых пневматических приводов

**А.М. Грибков, Д.В. Шилин**

*Статья посвящена разработке математической модели трехкоординатного пневматического манипулятора для проведения комплекса работ поиска алгоритмов управления пневматическими приводами. Показана зона достижимости манипулятора. Описана динамическая модель бесштокового пневмопривода.*

**Ключевые слова:** бесштоковый пневмопривод; кинематическая схема типа трипод; динамическая модель пневмопривода.

*The work is devoted to the development of a mathematical model of three-coordinate air handler to perform a complex of works to search the pneumatic actuators control algorithms. The reachability area of the manipulator has been shown. The dynamic model of stockless actuator has been described.*

**Keywords:** rodless pneumatic actuator, tripod type kinematics, dynamic model of pneumatic actuator.

**П**невматические приводы нашли широкое применение в автоматизации производственных процессов. Пневмоустройства используются в качестве приводов зажимных и транспортирующих механизмов, в контрольно-измерительных приборах, для автоматизации машин и устройств, работающих в агрессивных средах, в условиях по-



**ГРИБКОВ**  
Александр Михайлович  
кандидат технических наук,  
доцент, зав. кафедрой  
«Гидромеханика и гидравлические машины»  
(Московский энергетический институт (ТУ))



**ШИЛИН**  
Денис Викторович  
аспирант кафедры  
«Гидромеханика и гидравлические машины»  
(Московский энергетический институт (ТУ))

жаро- и взрывоопасности, радиации, при значительных вибрациях и высоких температурах. Однако пневматические приводы имеют и недостатки: при равных габаритах с гидравлическими они развивают меньшие усилия, утечки воздуха понижают их КПД, заданные законы движения не могут быть ими выполнены с достаточной точностью.

Несмотря на эти недостатки, пневмоприводы с успехом применяют в тех случаях, когда наиболее существенные значения имеют их преимущества.

Развитие автоматизации производственных процессов, прогресс в области науки и техники обусловили существенное усложнение пневматических систем. Часто при обслуживании одной машины используется несколько пневматических приводов, которые могут составлять систему приводов, если связаны друг с другом функционально. Как правило, эти системы обладают очень сложной кинематикой, и решение задач управления усложняется.

В статье приведены решения задач кинематики на примере кинематической схемы типа

трипод и описана математическая модель пропорционального пневматического привода.

Тяги, соединяющие каретки с подвижной платформой, расположены парами и параллельны друг другу. За счет такой конструкции плоскость подвижной платформы всегда параллельна плоскости неподвижного основания (рис. 1). Расчетная кинематическая схема манипулятора изображена на рис. 2.

По расчетной схеме (см. рис. 2.) принимаем:  
 $A_1 A_2 = A_2 A_3 = A_1 A_3 = L$  — длина стороны неподвижного основания манипулятора;

$B_1 C_1 = B_2 C_2 = B_3 C_3 = l$  — длина тяги;

$S_1, S_2, S_3$  — перемещение кареток пневмопривода ( $A_1 B_1 = S_1, A_2 B_2 = S_2, A_3 B_3 = S_3$ );

$\gamma$  — угол между неподвижным основанием манипулятора и бесштоковым пневмоприводом.

Благодаря особой конструкции подвижная платформа  $C_1 C_2 C_3$  всегда параллельна плоскости неподвижного основания. Уравнения связей механизма имеют следующий вид:

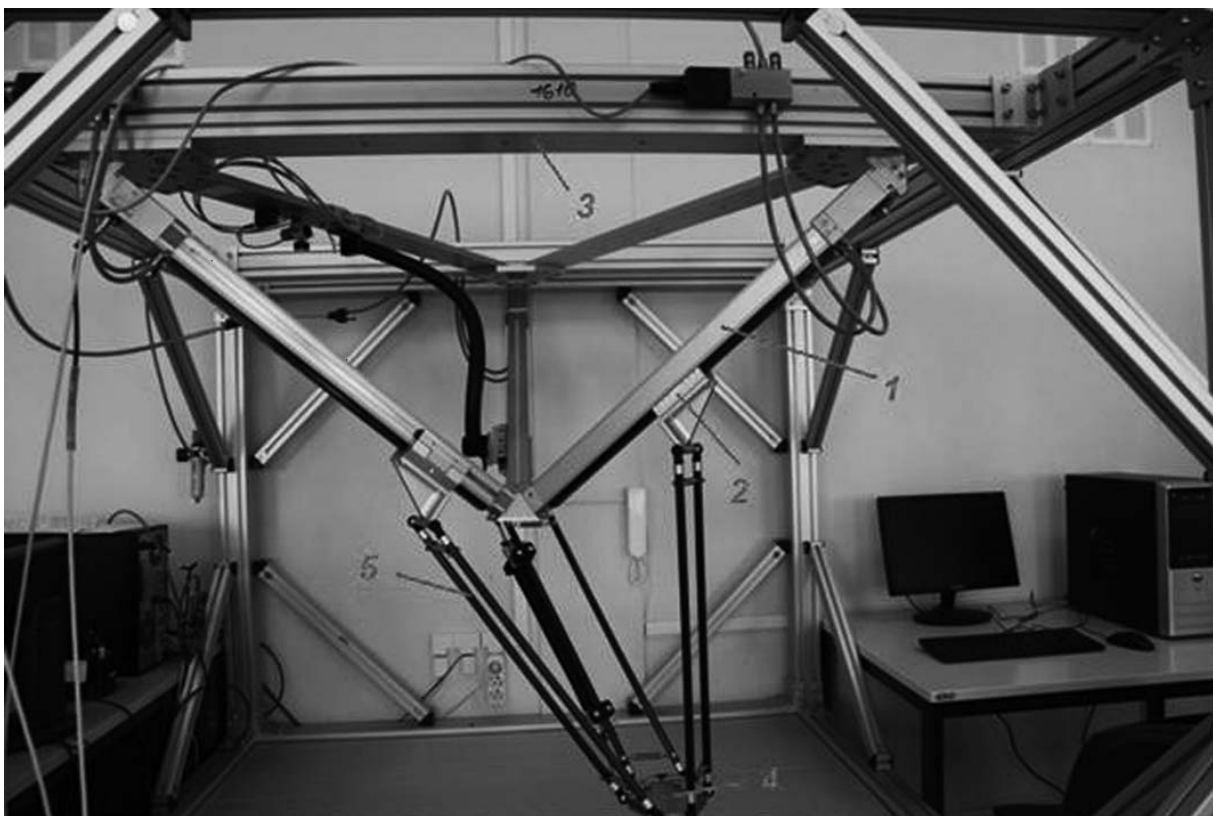


Рис. 1. Общий вид манипулятора:

1 — пневматический привод; 2 — каретка; 3 — неподвижное основание; 4 — подвижная платформа; 5 — тяга

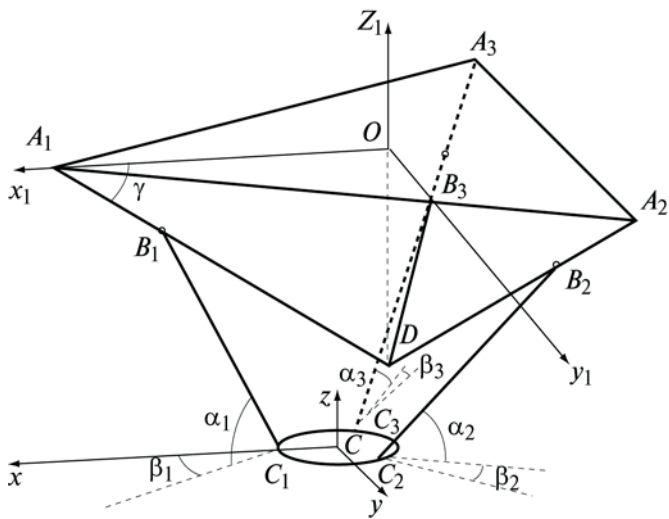


Рис. 2. Расчетная кинематическая схема манипулятора

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{A_1} = z_{A_2}; \\ z_{A_2} = z_{A_3}; \\ x_{A_2} - x_{A_1} = \text{const}; \\ x_{A_3} - x_{A_1} = \text{const}; \\ x_{A_2} - x_{A_1} = \text{const}; \\ x_{A_3} - x_{A_1} = \text{const}; \\ x_C = \frac{-(x_{A_1} + x_{A_2} + x_{A_3})}{3}; \\ y_C = \frac{-(y_{A_1} + y_{A_2} + y_{A_3})}{3}; \\ z_C = \frac{-(z_{A_1} + z_{A_2} + z_{A_3})}{3}. \end{array} \right. \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} x_{A_1} &= S_1 \cos \gamma + l \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + a; \\ y_{A_1} &= l \cos \alpha_1 \sin \beta_1; \\ z_{A_1} &= S_1 \sin \gamma + l \sin \alpha_1; \\ x_{A_2} &= -S_2 \cos \gamma \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - l \cos \alpha_2 \sin\left(\beta_2 + \frac{\pi}{6}\right) - a \sin\left(\frac{\pi}{6}\right); \\ y_{A_2} &= -S_2 \cos \gamma \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - l \cos \alpha_2 \cos\left(\beta_2 + \frac{\pi}{6}\right) - a \cos\left(\frac{\pi}{6}\right); \\ z_{A_2} &= S_2 \sin \gamma + l \sin \alpha_2; \end{aligned}$$

$$x_{A_3} = -S_3 \cos \gamma \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - l \cos \alpha_3 \sin\left(\beta_3 - \frac{\pi}{6}\right) - a \sin\left(\frac{\pi}{6}\right);$$

$$y_{A_3} = -S_3 \cos \gamma \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - l \cos \alpha_3 \cos\left(\beta_3 - \frac{\pi}{6}\right) - a \cos\left(\frac{\pi}{6}\right);$$

$$z_{A_3} = S_3 \sin \gamma + l \sin \alpha_3.$$

Решение системы уравнений (1) проводилось в программе Matlab методом Ньютона. Множеством решений данной системы уравнений является область достижимости манипулятора, представленная на рис. 3 [1].

Перемещение в пространстве подвижной платформы манипулятора обеспечивается путем перемещения кареток пневматических приводов, поршни которых двигаются под действием сил давления, создаваемого сжатым воздухом.

Типовой бесштоковый линейный пневмопривод двустороннего действия схематично изображен на рис. 4.

Движение любой точки поршня можно описать, используя второй закон Ньютона:

$$ma = F(p_1 - p_2) - F_{\text{тр}} - F_{\text{вс}}, \quad (2)$$

где  $a$  — ускорение, с которым перемещается поршень пневмопривода,  $a = d\theta / dt$ ;  $m$  — суммарная масса поршня, штока и присоединенных к штоку инструментов либо элементов конструкции;  $p_1$  — давление воздуха в левой полости;  $p_2$  — давление воздуха в правой полости;  $F$  — площадь поршня;  $F_{\text{тр}}$  — суммарная сила сопротивления, возникающая внутри привода при начале движения и в процессе движения поршня;  $F_{\text{вс}}$  — сила внешнего сопротивления, возникающая при работе привода [2].

Следует отметить, что сила трения  $F_{\text{тр}}$  — это сила трения манжеты поршня пневмопривода о гильзу и сила сопротивления деформации герметизирующей ленты, отделяющей внутреннюю полость привода от окружающего пространства. Для упрощения записи дифференциального уравнения будем рассматривать сумму этих сил как зависимость  $F_{\text{тр}}(v)$ .

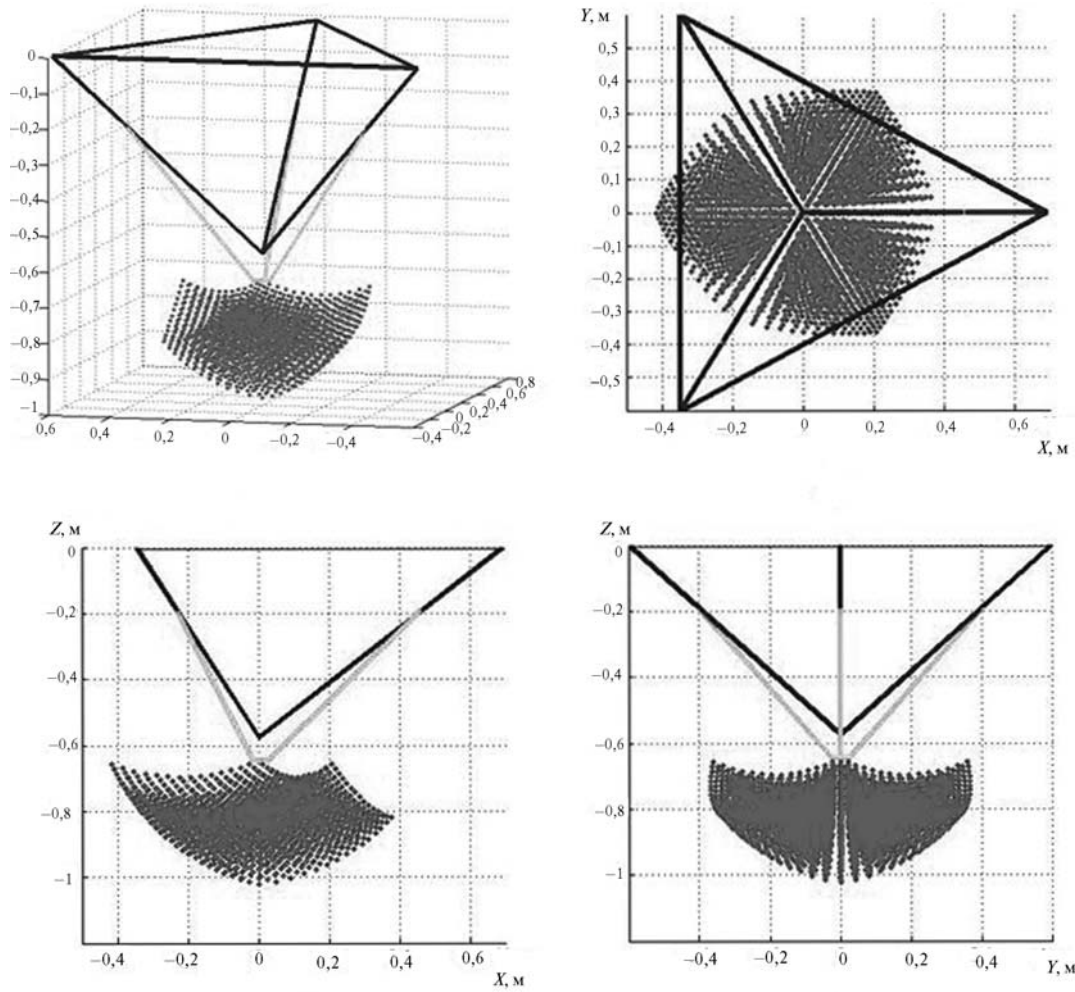


Рис. 3. Область достижимости манипулятора

Для измерения величины силы  $F_{тр}$  был разработан стенд с числовым программным управлением.

Сила трения измеряется с помощью тензометрического датчика, закрепленного между

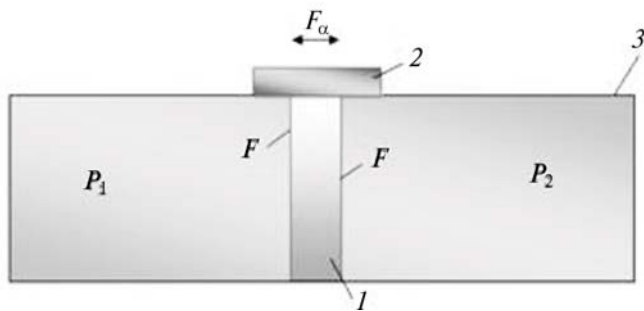


Рис. 4. Бесштоковый линейный пневмопривод двустороннего действия:

- 1 — поршень; 2 — каретка;
- 3 — корпус пневмопривода

кареткой бесштокового пневмопривода и кареткой механического преобразователя вращательного движения электродвигателя. Сигнал с датчика передается на преобразователь сигналов. Выходной электрический сигнал преобразователя ( $\pm 10$  В), соответствующий значению измеренной силы  $F_{тр}$ , приходит на ПЛК Siemens CPU 313C-2DP. При заданной постоянной скорости накапливается выборка значений, далее осредненные результаты измерений фиксируются в блоке базы данных контроллера и выводятся на экран компьютера при помощи SCADA-системы WinCC flexible. Управление синхронным двигателем осуществляется с помощью СПК Siemens.

На данном стенде было произведено измерение силы трения страгивания поршня бесштокового пневмопривода серии DGPIL. Был



измерен момент  $M_{\Sigma}$ , развиваемый синхронным двигателем, необходимый для преодоления суммарной силы трения в пневмоприводе  $M_{п.ц}$  и механическом преобразователе движения  $M_{м.п}$ , а также момент, необходимый для преодоления сил сопротивления только в механическом преобразователе движения  $M_{м.п}$ . Таким образом, был найден момент необходимый для страгивания каретки пневмопривода  $M_{п.ц}$ .

По формуле пересчета для шарико-винтовой передачи было найдено линейное усилие, необходимое для страгивания каретки бесштокового пневмопривода серии DGPIL:

$$T_{стр} = \frac{2\pi\eta_p M_{п.ц}}{D},$$

где  $T_{стр}$  — усилие, необходимое для страгивания каретки бесштокового пневмопривода;  $\eta_p$  — КПД шарико-винтовой передачи;  $D$  — диаметр вала механического преобразователя движения.

По полученным данным был построен график зависимости силы трения от скорости перемещения каретки пневмопривода (рис. 5).

Аналитическое выражение зависимости силы трения от скорости перемещения каретки пневмопривода используется при динамическом моделировании системы.

Из уравнения (2) следует, что управлять движением поршня можно, изменяя давление в полостях двигателя. Регулирование давления осуществляется путем изменения объема воздуха в полостях. Отсюда следует, что в модель должны войти уравнения, которые описывают связь между изменением объема воздуха в каждой полости и давления в полостях.

Объем воздуха в полости меняется за счет поступления в нее нового воздуха из магистрали, либо за счет истечения воздуха в атмосферу. Наполнение сжатым воздухом рабочей полости двигателя объемом  $V_1$  происходит из источника питания, давление в котором принимаем постоянным ( $p_m = const$ ).

Все процессы рассматриваем как квазистационарные, т.е. такие, при которых во всех точках объема полости предлагаются одинаковые параметры (давление, температура и плот-

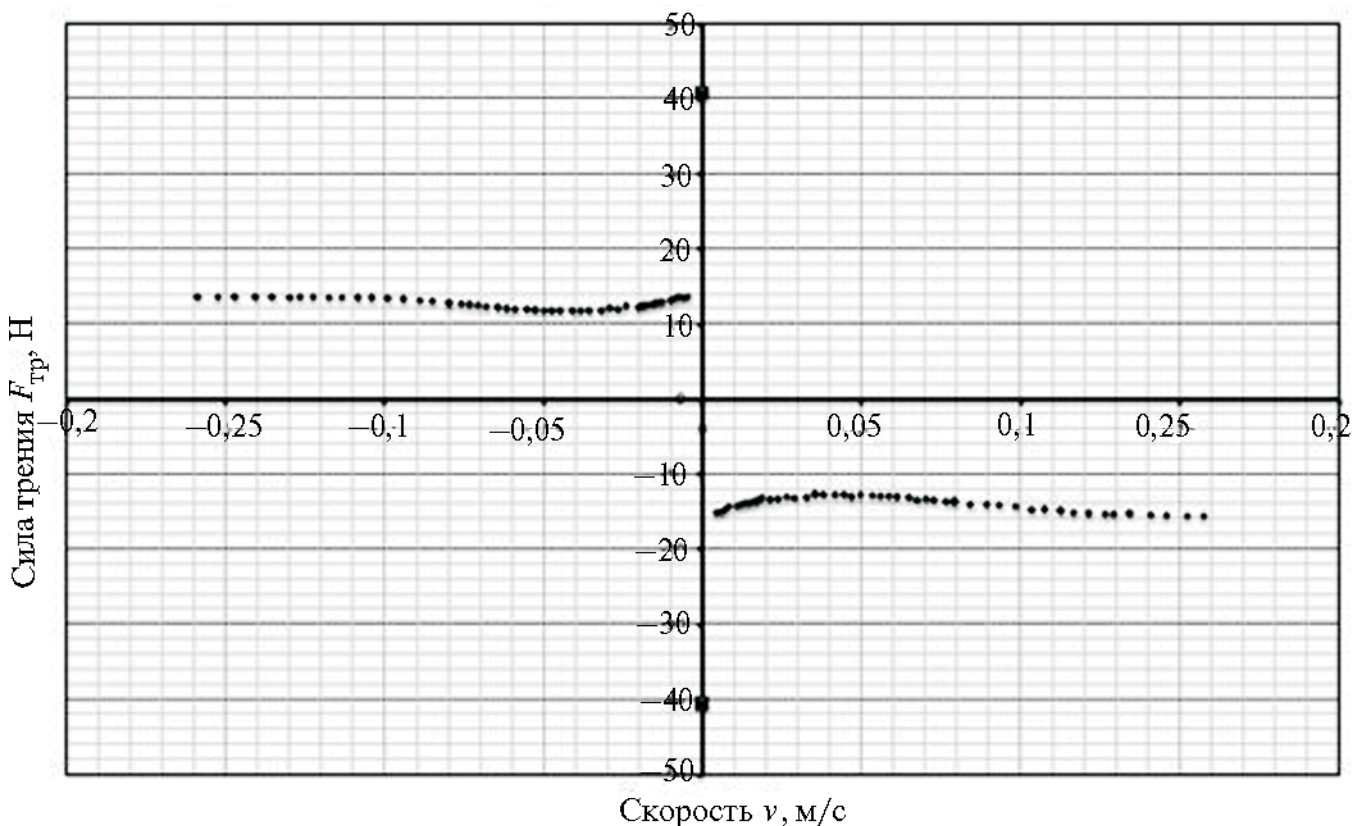


Рис. 5. Зависимость силы трения от скорости перемещения каретки пневмопривода

ность). Для упрощения задачи сначала пренебрегаем теплообменом с окружающей средой. Принимаем, что рабочая полость имеет индекс «I».

Согласно первому закону термодинамики, вся подведенная с газом тепловая энергия  $dQ_m$  расходуется на изменение внутренней энергии  $dU_1$  и работу расширения газа  $dL_1$ . Запишем уравнение энергетического баланса:

$$dQ_m = dU_1 + dL_1. \quad (3)$$

Учитывая, что количество подведенной тепловой энергии, поступившей в полость с газом, равно произведению его массы на удельную энтальпию  $dQ_m = i_m dm_m$ , а изменение внутренней энергии газа в полости и совершаемая им работа соответственно равны  $dU_1 = d(u_1 m_1)$  и  $dL_1 = p_1 dV_1$ . Отсюда получаем следующее выражение для тепловой энергии подведенной с воздухом из магистрали:

$$i_m dm_m = u_1 dm_1 + m_1 du_1 + p_1 dV_1, \quad (4)$$

где  $u_1$  — удельная внутренняя энергия.

Выразим в уравнении (4) значения энтальпии и внутренней энергии через произведение температуры на теплоемкость соответственно при постоянных давлении  $c_p$  и объеме  $c_v$ :

$$c_p T_m dm_m = c_v T_1 dm_1 + c_v m_1 dT_1 + p_1 dV_1. \quad (5)$$

Рассматривая воздух как идеальный газ, молекулярными силами сцепления которого можно пренебречь, опишем его состояние с помощью уравнения Клапейрона:

$$p_1 V_1 = m_1 R T_1, \quad (6)$$

где  $R$  — газовая постоянная,  $R = 287$  Дж / (кг · К) для воздуха при  $T_m = 293$  К.

Записав уравнение (6) в приращениях, получим следующее выражение:

$$p_1 dV_1 + V_1 dp_1 = R dm_1 T_1 + R m_1 dT_1. \quad (7)$$

Из формулы (7) выразим  $m_1 dT_1$ :

$$m_1 dT_1 = \frac{p_1 dV_1}{R} + \frac{V_1 dp_1}{R} - dm_1 T_1, \quad (8)$$

или

$$k R T_m dm_m = k p_1 dV_1 + V_1 dp_1, \quad (9)$$

где  $k = \frac{c_p}{c_v}$  и  $R = c_p - c_v$ .

Заменим в уравнении (9) массу сжатого воздуха  $dm_m$ , поступающего в полость  $V_1$  в течение времени  $dt$ , соответствующим значением  $G_m = dm_m / dt$  массового расхода:

$$dm_m = G_m dt \quad (10)$$

и решим уравнение (9) относительно давления:

$$dp_1 = \frac{k G_m R T_m dt}{V_1} - k p_1 \frac{dV_1}{V_1}. \quad (11)$$

Расход воздуха из неограниченного объема (магистрали) определяют чаще всего по формуле Сен-Венана — Ванцеля:

$$G_m = \mu_1 f_1 p_m \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{1}{R T_m} \left[ \left( \frac{p_1}{p_m} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{p_1}{p_m} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]}, \quad (12)$$

где  $\mu_1$  — коэффициент расхода;  $f_1$  — площадь открытия рабочей щели распределителя;  $T_m$  — температура воздуха в магистрали.

Представим формулу (12) расхода воздуха из магистрали в более удобном виде:

$$G_m = \frac{\mu_1 f_1 p_m K \varphi(\sigma_1)}{\sqrt{R T_m}} = \frac{K}{\sqrt{R T_m}} \mu_1 f_1 p_m \varphi(\sigma_1), \quad (13)$$

где

$$K = \sqrt{\frac{2k}{k-1}}; \quad (14)$$

функция расхода

$$\varphi(\sigma_1) = \sqrt{\sigma_1^{\frac{2}{k}} - \sigma_1^{\frac{k+1}{k}}}. \quad (15)$$

Будем считать данный процесс адиабатным  $k = 1,4$ . Полагая температуру воздуха в магистрали постоянной  $T_m = 293$  К, уравнение (13) примет следующий вид:

$$G_m = 0,00912 \mu_1 f_1 p_m \varphi(\sigma_1). \quad (16)$$

Эксперименты проведенные Сен-Венаном и Ванцелем, впоследствии неоднократно под-

твержденные другими учеными, показали что в надкритической зоне расходная функция имеет постоянное значение. Таким образом можно выделить две зоны: подкритическую, когда вид расходной функции определяется уравнением (15) при  $\sigma > \sigma_{кр}$ , и надкритическую, где имеет место максимальный критический расход воздуха  $G_{м.кр}$  при  $\sigma < \sigma_{кр}$ .

Критический расход при  $k = 1,4$  будет определяться по формуле

$$G_m = \frac{K}{\sqrt{RT_m}} \mu_1 f_1 p_m \varphi(\sigma_{кр}) = 0,00236 \mu_1 f_1 p_m. \quad (17)$$

Подставив в уравнение (11) значение  $G_m$  из формулы (13), а также представив объем полости в виде произведения площади поршня  $F$  на длину полости (с учетом координаты  $x_{01}$ ) получим уравнение для определения давления в полости в общем виде:

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{k \mu_1 f_1 \sqrt{\frac{2k}{k-1}} p_m \sqrt{RT_m} \varphi(\sigma_1)}{F(x_{01} + x)} - \frac{kp_1}{(x_{01} + x)} \frac{dx}{dt}. \quad (18)$$

Здесь

$$\varphi(\sigma_1) = \sqrt{\sigma_1^{\frac{2}{k}} - \sigma_1^{\frac{k+1}{k}}} \text{ при } 0,528 < \sigma < 1;$$

$$\varphi(\sigma_{кр}) = 0,259 \text{ при } 0 < \sigma < 0,528,$$

где  $x_{01}$  — начальная координата поршня,  $x_{01} = V_{01} / F$ ;  $V_{01}$  — начальный объем рабочей полости;  $F$  — площадь поршня.

При перемещении поршня  $1$  в пневмоприводе давление сжатого воздуха в выхлопной полости  $2$  (см. рис. 4) может повышаться вследствие уменьшения ее объема. В этом случае происходит истечение воздуха в атмосферу. Здесь также может быть применен первый закон термодинамики, но в этом уравнении следует поставить знак «-» в левой части, так как происходит истечение воздуха, т.е. отвод тепловой энергии, расходуемой на изменение внутренней энергии  $dU_2$  и работу газа  $dL_2$ :

$$-dQ_2 = dU_2 + dL_2. \quad (19)$$

Соответственно, изменяем индекс «1», относящийся к рабочей полости, на индекс «2» выхлопной полости.

Далее выкладки будут аналогичны приведенным выше (формулы (3)—(9)). Остановимся на выражении (9) и запишем его для процесса истечения сжатого воздуха из полости пневмоцилиндра:

$$-kRT_2 dm_2 = kp_2 dV_2 + V_2 dp_2. \quad (20)$$

Имея в виду, что

$$dm_2 = -d\left(\frac{V_2}{\theta_2}\right) = \frac{-(\theta_2 dV_2 - V_2 d\theta_2)}{\theta_2^2},$$

получаем  $\theta_2 dp_2 - kp_2 d\theta_2 = 0$  или после интегрирования и потенцирования этого выражения  $-p_2 \theta_2^k = \text{const}$  — уравнение адиабаты.

Расход воздуха из ограниченного объема  $V_2$  в атмосферу описывается формулой Сен-Венана — Ванцеля:

$$G_2 = \mu_2 f_2 p_2 \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{1}{RT_2} \left[ \left(\frac{p_m}{p_2}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_m}{p_2}\right)^{\frac{k+1}{k}} \right]},$$

$$G_2 = \frac{0,156 \mu_2 f_2 p_2 \varphi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)}{\sqrt{T_2}}. \quad (21)$$

Подставив в уравнение (20)  $dm_2 = G_2 dt$  и  $G_2$  из формулы (21), получим уравнение для определения давления в выхлопной полости, соединенной с атмосферой:

$$\frac{dp_2}{dt} = - \frac{k \mu_2 f_2 \sqrt{\frac{2k}{k-1}} p_2 \sqrt{RT_m} \varphi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)}{F(s + x_{02} - x)} + \frac{kp_2}{(s + x_{02} - x)} \frac{dx}{dt}, \quad (22)$$

где

$$\varphi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right) = \sqrt{\sigma_2^{\frac{2}{k}} - \sigma_2^{\frac{k+1}{k}}} \text{ при } 0,528 < \sigma < 1;$$

$$\varphi(\sigma_{кр}) = 0,259 \text{ при } 0 < \sigma < 0,528;$$

$$\sigma_2 = \frac{p_m}{p_2}.$$

Температура  $T_2$  из уравнения (22) может быть выражена через давление  $p_2$  на основании уравнения адиабаты:

$$\frac{p_2}{p_m} = \left( \frac{T_2}{T_m} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (23)$$

Тогда выражение (22) примет следующий вид:

$$\frac{dp_2}{dt} = - \frac{k\mu_2 f_2 \sqrt{\frac{2k}{k-1}} p_2^{\frac{3k-1}{2k}} \sqrt{RT_m} \Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)}{F(s + x_{02} - x) p_m^{\frac{k-3}{2k}}} + \frac{kp_2}{(s + x_{02} - x)} \frac{dx}{dt} \quad (24)$$

Давление будет изменяться по уравнению (24), в котором вместо  $\frac{1}{\sigma_2}$  следует подставить  $\frac{\sigma_a}{\sigma_2}$ , так как истечение будет происходить в атмосферу пропорционально отношению давлений:

$$\frac{p_a}{p_2} = \frac{\sigma_a}{\sigma_2},$$

где  $\sigma_a = \frac{p_a}{p_m}$ ,  $\sigma_2 = \frac{p_2}{p_m}$ .

Отсюда

$$\frac{dp_2}{dt} = - \frac{k\mu_2 f_2 \sqrt{\frac{2k}{k-1}} p_2^{\frac{3k-1}{2k}} \sqrt{RT_m} \Phi\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_2}\right)}{F(s + x_{02} - x) p_m^{\frac{k-3}{2k}}} + \frac{kp_2}{(s + x_{02} - x)} \frac{dx}{dt} \quad (25)$$

где  $S$  — толщина поршня [2].

Приведенные выше уравнения равновесного состояния, подвода и истечения воздуха из полостей пневмопривода вошли в математическое описание системы.

### Выводы

1. Полученная область достижимости манипулятора имеет симметричный характер относительно пневмоприводов.
2. Рассмотренные вопросы в данной работе позволят существенно упростить поиск алгоритмов управления данным манипулятором.
3. С помощью разработанной программы предоставляется возможность исследования кинематики аналогичных расчетных схем с различными габаритами.

### Литература

1. Егоров О.Д., Подураев Ю.В. Конструирование мехатронных модулей. М.: ИЦ МГТУ «СТАНКИН», 2004. 360 с.
2. Герц Е.В. Динамика пневматических систем машиностроения. М.: Машиностроение, 1975. 272 с.

Статья поступила в редакцию 19.08.2011 г.