

УДК 517.9; 539.3; 519.6

DOI 10.18698/0536-1044-2017-11-18-27

Разработка конечного элемента осесимметричной оболочки с опцией жесткого торца для решения задач статики и модального анализа тонкостенных конструкций

Ф.Р. Низаметдинов^{1,2}, Ф.Д. Сорокин²

¹ ИКЦ ООО «Альфа-транзит», 141400, Московская область, Химки, Ленинградская ул., д. 1

² МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1

The Development of an Axisymmetric Shell Finite Element with a Rigid End Surface Option for Solving Static and Modal Analysis Problems of Thin-Walled Structures

F.R. Nizametdinov^{1,2}, F.D. Sorokin²

¹ OOO Alfa-Tranzit, 141400, Moscow region, Khimki, Leningradskaya St. 1

² BMSTU, 105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1



e-mail: frnizametdinov@list.ru, sorokin_fd@mail.ru



Несмотря на быстрые темпы роста вычислительных мощностей современных машин, задача снижения вычислительных затрат путем разработки эффективных математических моделей остается актуальной. Создан и апробирован алгоритм получения матриц жесткости и масс двухузлового конечного элемента осесимметричной оболочки при несимметричном деформировании с опцией жесткого торца, которая позволяет сделать одно из узловых сечений конечного элемента абсолютно жестким. Разработанный элемент базируется на конечном элементе конической оболочки при несимметричном деформировании. Для апробации элемента решены тестовые задачи по определению перемещений при статическом нагружении оболочки, а также собственных частот конической оболочки и оболочки с произвольной формой образующей. Возможность создания жесткого торца реализована как опция элемента путем редуцирования матриц жесткости и масс элемента без жесткого торца, что позволяет избежать использования множителей Лагранжа, которые всегда увеличивают размерность системы уравнений и ухудшают ее свойства.

Ключевые слова: матрица масс, конечный элемент, матрица жесткости, собственная частота, функции формы, осесимметричная оболочка



Despite the rapid growth of computing power, the task of reducing computational costs by developing effective mathematical models remains topical. In this paper, an algorithm for obtaining matrices of stiffness and mass for a two-node axisymmetric shell finite element with asymmetric deformation and a rigid end face option is developed and tested. The rigid end face option makes one of the nodal sections of the finite element absolutely rigid. The developed element is based on the conical shell finite element under asymmetric deformation. To test the element, various test problems are solved (determination of displacements under static loading of the shell, determination of the natural frequencies of

the conical shell and a shell with arbitrary form of the generator). The possibility of creating a rigid end face is realized as the element option by reducing the stiffness and mass matrices of the element without the rigid end face. It eliminates the need to use Lagrange multipliers that always increase the dimensionality of the system of equations and impair its properties.

Keywords: mass matrix, finite element, stiffness matrix, natural frequency, form function, axisymmetric shell

Осесимметричные оболочечные конструкции широко применяют во многих областях промышленности и техники. Наибольшее распространение оболочки получили в авиационной и ракетно-космической технике благодаря высокой прочности при малой массе. В таких областях к конструкциям предъявляются повышенные требования, поэтому необходимо совершенствовать все этапы их создания. Важную роль в этом играет математическое моделирование и прогнозирование эксплуатационных свойств на ранних этапах разработки путем замены трудоемких натуральных испытаний численным моделированием поведения оболочек в условиях испытаний и эксплуатации [1–3].

Цель работы — разработка двухузлового конечного элемента (КЭ) осесимметричной обо-

лочка при несимметричном деформировании с опцией жесткого торца.

Такая опция дает возможность сделать один из торцов КЭ оболочки (при меридиональной координате $s = 0$ или $s = l$, где l — длина образующей) абсолютно жестким (рис. 1). Поскольку обобщенные перемещения всех точек жесткого сечения одинаковы по соответствующим направлениям (вдоль и вокруг осей), для удобства узел жесткого торца располагают на оси вращения. КЭ с подобной опцией позволяет моделировать, например, протяженные участки оболочечных конструкций, заключенные между поперечными фланцами, не прибегая к специальным средствам для моделирования жестких сечений (основанных преимущественно на использовании множителей Лагранжа), как это

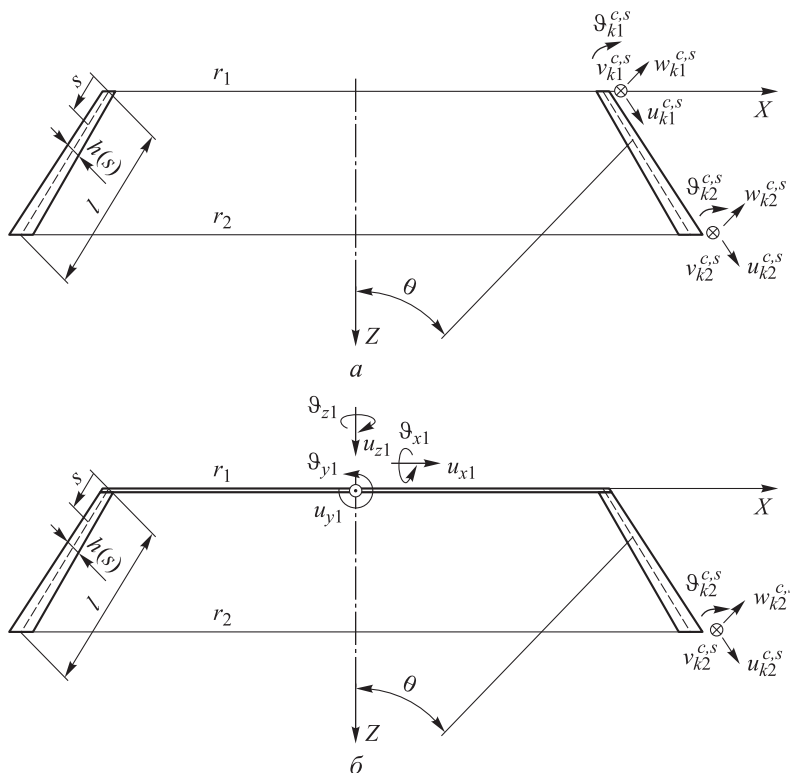


Рис. 1. КЭ оболочки:

a — без активированной опции жесткого сечения ($u_{k1}^{c,s}$, $u_{k2}^{c,s}$, $v_{k1}^{c,s}$, $v_{k2}^{c,s}$, $w_{k1}^{c,s}$, $w_{k2}^{c,s}$, $\vartheta_{k1}^{c,s}$, $\vartheta_{k2}^{c,s}$ — компоненты вектора узловых перемещений); *b* — с активированной опцией в сечении $Z = 0$ (u_{x1} , u_{y1} , u_{z1} , ϑ_{x1} , ϑ_{y1} , ϑ_{z1} , $u_{k2}^{c,s}$, $v_{k2}^{c,s}$, $w_{k2}^{c,s}$,

$\vartheta_{k2}^{c,s}$ — компоненты вектора узловых перемещений); θ — угол между нормалью к поверхности и осью вращения;

$h(s)$ — толщина (может меняться линейно); r_1, r_2 — радиусы срединной поверхности; k — номер гармоники

реализовано в программных комплексах, базирующихся на методе конечных элементов (МКЭ). Это позволяет экономить вычислительные ресурсы, что по-прежнему остается актуальной задачей, несмотря на невероятный рост вычислительных мощностей современных машин.

В разработанном КЭ оболочки опция жесткого сечения реализована путем редуцирования матриц жесткости и масс элемента без жесткого торца. Это дает возможность избежать применения множителей Лагранжа, что является еще одним преимуществом этого элемента перед аналогами (как известно, множители Лагранжа всегда ухудшают свойства системы). Отметим, что построенный КЭ (как с опцией жесткого торца, так и без нее) может быть использован для произвольного k , но при наличии жестких торцов по краям оболочки основную роль играют гармоники $k = 0$ и $k = 1$, так как при возбуждении, вызванном движением (или вызывающем движение торцов), появляются только эти гармоники.

Разработанный элемент базируется на классическом КЭ конической оболочки при несимметричном деформировании (рис. 2). Протяженные участки оболочек могут быть смоделированы набором таких кольцевых элементов. Большое количество таких элементов позволяет хорошо описать форму поверхности оболочки вращения, в том числе отличную от конической. В работе [4] подробно рассмотрена процедура получения матрицы жесткости базового элемента, но не описан алгоритм получения матрицы масс. В данной статье построение КЭ показано со всеми подробностями, включая получение матрицы жесткости базового элемента.

КЭ конической оболочки, изображенный на рис. 2, имеет длину образующей l , угол между нормалью к поверхности и осью вращения θ , толщину h , радиусы срединной поверхности r_1 и r_2 . В каждом узловом сечении присутствуют четыре степени свободы. Вектор узловых перемещений имеет вид

$$\{\Delta\} = \{u_{k1}, v_{k1}, w_{k1}, \vartheta_{k1}, u_{k2}, v_{k2}, w_{k2}, \vartheta_{k2}\}^T,$$

где $u_{k1}, u_{k2}, v_{k1}, v_{k2}$ и w_{k1}, w_{k2} — компоненты векторов меридиональных, окружных и нормальных перемещений соответственно; $\vartheta_{k1}, \vartheta_{k2}$ — компоненты вектора углов поворота нормали.

Матрицы жесткости и масс КЭ для одной гармоники разложения решения в тригонометрический ряд. Для получения матрицы жесткости базового элемента использован полуаналитический метод, заключающийся в представлении всех составляющих перемещений в виде периодических функций по окружной координате [4–6]:

$$\begin{aligned} u &= \sum_k u_k^c \cos k\varphi; \\ v &= \sum_k v_k^c \sin k\varphi; \end{aligned} \quad (1)$$

$$w = \sum_k w_k^c \cos k\varphi,$$

где k — номер гармоники напряженного состояния; u, v, w — перемещение соответственно меридиональное, окружное и нормальное; φ — окружная координата; верхний индекс «с» указывает на симметричное относительно нулевого меридиана решение, далее в формулах этот индекс условно не показан.

Соотношения между деформациями и перемещениями для каждой гармоники k имеют вид

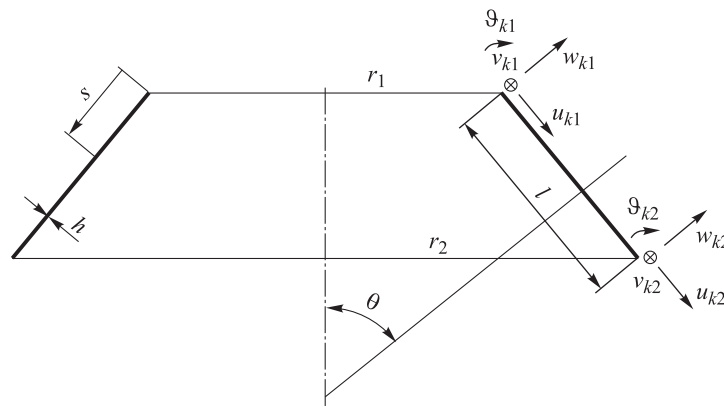


Рис. 2. КЭ конической оболочки

$$\begin{cases} \varepsilon_{1k} \\ \varepsilon_{2k} \\ \gamma_k \end{cases} = [A_1] \begin{cases} u_k \\ v_k \\ w_k \end{cases};$$

$$[A_1] = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & 0 & \frac{1}{R_1} \\ \frac{\cos \theta}{r} & \frac{k}{r} & \frac{\sin \theta}{r} \\ -\frac{k}{r} & \frac{d}{ds} - \frac{\cos \theta}{r} & 0 \end{bmatrix},$$

где R_1 — радиус кривизны меридиана; r — радиус поперечного сечения в точке с координатой s .

Чтобы связать векторы изменения кривизн и перемещений, сначала рассматривают соотношения между векторами изменения кривизн и углов поворота нормали:

$$\begin{cases} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ 2\alpha_{12k} \end{cases} = [A_3] \begin{cases} \vartheta_{1k} \\ \vartheta_{2k} \end{cases};$$

$$[A_3] = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & 0 \\ \frac{\cos \theta}{r} & \frac{k}{r} \\ -\frac{2k}{r} & 2\left(\frac{d}{ds} - \frac{\cos \theta}{r}\right) \end{bmatrix}.$$

Вектор углов поворота нормали связан с вектором перемещений следующим образом:

$$\begin{cases} \vartheta_{1k} \\ \vartheta_{2k} \end{cases} = [A_4] \begin{cases} u_k \\ v_k \\ w_k \end{cases}; \quad [A_4] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & -\frac{d}{ds} \\ 0 & \frac{\sin \theta}{r} & \frac{k}{r} \end{bmatrix}.$$

Тогда связь вектора изменения кривизн с вектором перемещений можно представить как

$$\begin{cases} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ 2\alpha_{12k} \end{cases} = [A_3][A_4] \begin{cases} u_k \\ v_k \\ w_k \end{cases}.$$

Для базового элемента поле перемещений аппроксимируется зависимостями:

$$\begin{aligned} u_k &= a_1 + a_2s; \\ v_k &= a_3 + a_4s; \\ w_k &= a_5 + a_6s + a_7s^2 + a_8s^3, \end{aligned}$$

где $a_1 - a_8$ — коэффициенты аппроксимирующих полиномов.

Связь вектора перемещений с узловыми перемещениями выражается с помощью матрицы функций формы $[H]$, представленной в работе [4]:

$$\begin{cases} u_k \\ v_k \\ w_k \end{cases} = [H]\{\Delta\}. \quad (2)$$

С помощью формулы (2) определяются матрицы $[B_1] = [A_1][H]$ и $[B_2] = [A_2][H]$, которые устанавливают связь векторов деформаций и изменения кривизн с узловыми перемещениями:

$$\begin{cases} \varepsilon_{1k} \\ \varepsilon_{2k} \\ \gamma_k \end{cases} = [B_1]\{\Delta\}; \quad \begin{cases} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ 2\alpha_{12k} \end{cases} = [B_2]\{\Delta\}. \quad (3)$$

В случае рассматриваемого базового элемента с прямолинейной образующей составляющие матриц $[B_1]$, $[B_2]$ удается представить в виде замкнутых аналитических соотношений.

С учетом выражений (3) на основе вариационного принципа Лагранжа можно вычислить составляющие матрицы жесткости [4, 7, 8]:

$$\begin{aligned} [K_1] &= C \int_0^l [B_1]^T [D_1] [B_1] r ds, \\ [K_2] &= C \int_0^l [B_2]^T [D_2] [B_2] r ds, \end{aligned} \quad (4)$$

$$C = \begin{cases} \pi & \text{при } k > 0; \\ 2\pi & \text{при } k = 0. \end{cases}$$

Здесь

$$[D_1] = \frac{Eh}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix},$$

где E — модуль упругости, μ — коэффициент Пуассона;

$$[D_2] = \frac{h^2}{12} [D_1].$$

Матрица жесткости элемента размером 8×8 определяется как сумма двух составляющих $[K] = [K_1] + [K_2]$. Первая соответствует мембранным силам, вторая — изгибающим и крутящим моментам.

На практике составляющие вектора узловых перемещений удобно выразить через компо-

ненты, направленные вдоль оси вращения, η_{k1} , η_{k2} и по нормали к ней ξ_{k1} , ξ_{k2} :

$$\{a\} = \{\xi_{k1}, \eta_{k1}, \nu_{k1}, \vartheta_{k1}, \xi_{k2}, \eta_{k2}, \nu_{k2}, \vartheta_{k2}\}^T.$$

Векторы перемещений $\{\Delta\}$ и $\{a\}$ связаны следующим образом:

$$\{a\} = [T]\{\Delta\},$$

где

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & -\cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\theta & 0 & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица жесткости, соответствующая силам и перемещениям, направленным вдоль оси вращения и по нормали к ней, определяется преобразованием поворота матрицы $[K]$:

$$[K] = [T][K][T]^T. \quad (5)$$

Матрица масс $[M]$ элемента представляет собой классическую согласованную матрицу масс [9, 10]:

$$[M] = C \int_0^l [H]^T [H] \rho h r ds, \quad (6)$$

$$C = \begin{cases} \pi & \text{при } k > 0; \\ 2\pi & \text{при } k = 0; \end{cases}$$

$$[M] = [T][M][T]^T,$$

где ρ — плотность материала оболочки.

Для оболочки постоянной толщины матрицы жесткости $[K]$ и масс $[M]$ могут быть вычислены по формулам (4) и (6) с использованием компьютерной аналитики. В общем случае произвольного закона изменения толщины $h = h(s)$ более предпочтительным является численный метод расчета определенных интегралов в формулах (4) и (6), заменяющий интегрирование суммированием по гауссовым точкам.

Переход от симметричного по окружности решения к кососимметричному и общему виду деформированного состояния КЭ. Распределение перемещений, заданное соотношениями (1), является симметричным относительно нулевого меридиана ($\varphi = 0$). В общем случае должна учитываться и кососимметричная часть, задаваемая следующими выражениями:

$$\begin{aligned} u &= \sum_k u_k^s \sin k\varphi; \\ v &= -\sum_k v_k^s \cos k\varphi; \\ w &= \sum_k w_k^s \sin k\varphi, \end{aligned} \quad (7)$$

где верхний индекс «s» указывает на кососимметричное относительно нулевого меридиана решение.

Для гармоники с номером $k = 1$ переход от соотношений (1) к (7) соответствует повороту системы координат оболочки вокруг продольной оси на угол $\pi/2$.

В целях одновременного учета симметричного и кососимметричного состояний вектор узловых перемещений КЭ расширен до размера 16×1 :

$$\{a_{\text{exp}}^k\} = \{\xi_{k1}^c, \eta_{k1}^c, \nu_{k1}^c, \vartheta_{k1}^c, \xi_{k1}^s, \eta_{k1}^s, \nu_{k1}^s, \vartheta_{k1}^s, \xi_{k2}^c, \eta_{k2}^c, \nu_{k2}^c, \vartheta_{k2}^c, \xi_{k2}^s, \eta_{k2}^s, \nu_{k2}^s, \vartheta_{k2}^s\}^T, \quad (8)$$

где узловые перемещения с индексом «c» принадлежат решению, симметричному относительно нулевого меридиана, с индексом «s» — кососимметричному.

Известно [6], что переход от соотношения (1) к (7) во всех формулах, описывающих оболочку вращения, приводит к тем же выражениям для параметров с верхним индексом «s», что и для параметров с верхним индексом «c». Поэтому распространение полученных выше формул на общий случай, т. е. учет кососимметричной части решения, сводится к дублированию матриц, найденных ранее с помощью выражений (5) и (6). Если матрицы, полученные (5–6), разбить на блоки размером 4×4 :

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix}; \quad [M] = \begin{bmatrix} [M_{11}] & [M_{12}] \\ [M_{21}] & [M_{22}] \end{bmatrix},$$

то расширенные матрицы масс и жесткости, соответствующие расширенному вектору узловых перемещений (8), будут иметь вид

$$[K_{\text{exp}}] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [0] & [K_{12}] & [0] \\ [0] & [K_{11}] & [0] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [0] & [K_{22}] & [0] \\ [0] & [K_{21}] & [0] & [K_{22}] \end{bmatrix};$$

$$[M_{\text{exp}}] = \begin{bmatrix} [M_{11}] & [0] & [M_{12}] & [0] \\ [0] & [M_{11}] & [0] & [M_{12}] \\ [M_{21}] & [0] & [M_{22}] & [0] \\ [0] & [M_{21}] & [0] & [M_{22}] \end{bmatrix}.$$

Выполненное расширение позволяет одновременно учитывать симметричную и кососимметричную составляющие решения, т. е. рассматривать деформированное состояние общего вида.

Формирование опции жесткого торца с использованием матриц перехода. Вектор узловых перемещений (8), содержащий 16 компонентов, задает по восемь степеней свободы на каждом из торцов КЭ. Но жесткий торец как любое абсолютно жесткое тело имеет всего шесть степеней свободы.

Для переноса восьми степеней свободы оболочки (без абсолютно жесткого торца) в шесть степеней абсолютно жесткого торца применена матрица перехода $[L_k]$ (k — номер гармоники). Предполагается, что жесткий торец расположен только у первого торца КЭ, поэтому у второго торца степени свободы не преобразуются. Например, матрица перехода $[L_1]$, а также формула преобразования, предназначенные для формирования опции абсолютно жесткого торца и соответствующие гармонике $k = 1$, имеют вид

$$\{a_{\text{exp}}^1\} = [L_1] \left\{ \begin{matrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{z1} \\ \vartheta_{1x} \\ \vartheta_{1y} \\ \vartheta_{1z} \\ \xi_{12}^c \\ \eta_{12}^c \\ \nu_{12}^c \\ \vartheta_{12}^c \\ \xi_{12}^s \\ \eta_{12}^s \\ \nu_{12}^s \\ \vartheta_{12}^s \end{matrix} \right\} = \begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -r_1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} [0] \\ [0] \\ [0] \\ [0] \\ [0] \\ [0] \\ [0] \\ [0] \end{matrix} & \begin{matrix} [E] \\ [E] \\ [E] \\ [E] \\ [E] \\ [E] \\ [E] \\ [E] \end{matrix} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{z1} \\ \vartheta_{1x} \\ \vartheta_{1y} \\ \vartheta_{1z} \\ \xi_{12}^c \\ \eta_{12}^c \\ \nu_{12}^c \\ \vartheta_{12}^c \\ \xi_{12}^s \\ \eta_{12}^s \\ \nu_{12}^s \\ \vartheta_{12}^s \end{matrix} \right\}$$

При получении матрицы $[L_1]$ использованы следующие соотношения:

$$\left\{ \begin{matrix} \xi_{11}^c \\ \eta_{11}^c \\ \nu_{11}^c \\ \vartheta_{11}^c \\ \xi_{11}^s \\ \eta_{11}^s \\ \nu_{11}^s \\ \vartheta_{11}^s \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} u_{x1} \\ -r_1 \vartheta_{y1} \\ -u_{x1} \\ -\vartheta_{y1} \\ -u_{y1} \\ -r_1 \vartheta_{x1} \\ u_{y1} \\ -\vartheta_{x1} \end{matrix} \right\}. \tag{9}$$

Аналогичные соотношения для матрицы перехода $[L_0]$, соответствующей гармонике $k = 0$, имеют вид

$$\left\{ \begin{matrix} \eta_{01}^c \\ \nu_{01}^s \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} u_{z1} \\ -r \vartheta_{z1} \end{matrix} \right\}.$$

Сама матрица $[L_0]$ здесь не показана, так как она включает в себя очень много нулей вследствие того, что остальные компоненты векторов нулевые.

При $k > 1$ матрицы перехода $[L_k]$ содержат лишь один ненулевой блок, например, для создания абсолютно жесткого торца в первом локальном узле матрицы перехода можно записать как

$$[L_k] = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ 8 \times 6 & 8 \times 8 \\ [0] & [E] \\ 8 \times 6 & 8 \times 8 \end{bmatrix}.$$

Расширенные матрицы жесткости и масс преобразуются в таковые для элемента с абсолютно жестким торцом по следующему правилу:

$$[\tilde{K}_{\text{exp}}] = [L_k]^T [K_{\text{exp}}] [L_k];$$

$$[\tilde{M}_{\text{exp}}] = [L_k]^T [M_{\text{exp}}] [L_k].$$

Тестирование КЭ. Для тестирования конечный элемент с опцией абсолютно жесткого торца был реализован в программном пакете Wolfram Mathematica (WM).

Тестовая задача № 1 по определению перемещений при статическом нагружении оболочки вращения (рис. 3) решена при следующих исходных данных: модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па; коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$; радиусы $r_1 = 0,2$ м и $r_2 = 0,4$ м; толщина стенки $h = r_2/50$; высота $L = 2r_2$; усилия, действующие вдоль осей X и Z , соответственно $F_x = 1\,000$ Н,

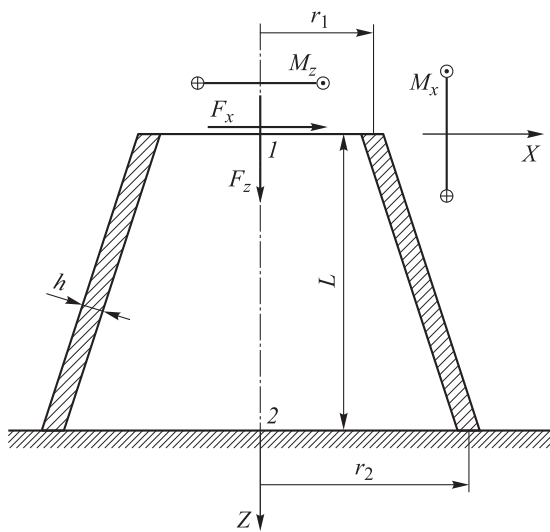


Рис. 3. Схема оболочки вращения для тестовой задачи № 1

$F_z = 1\ 000\ \text{Н}$; моменты вокруг осей X и Z соответственно $M_x = 100\ \text{Н}\cdot\text{м}$, $M_z = 100\ \text{Н}\cdot\text{м}$.

Оболочку разбивали на 20 кольцевых элементов, при этом два из них по краям имели абсолютно жесткие торцы в сечениях 1 и 2. Анализируя приложенные нагрузки, можно заметить, что для решения данной задачи необходимо использовать лишь нулевую и первую гармоники ($k = 0, k = 1$).

В результате решения тестовой задачи № 1 в пакете WM определены узловые перемещения в жестком сечении 1:

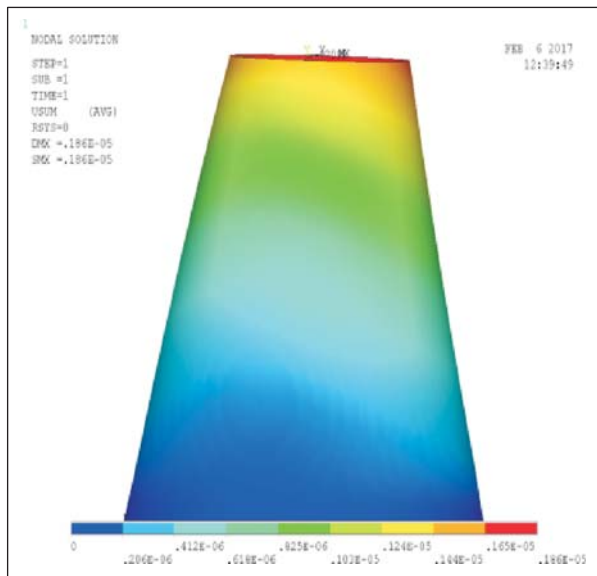
$$\begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{z1} \\ \vartheta_{1x} \\ \vartheta_{1y} \\ \vartheta_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,6554 \cdot 10^{-6} \text{ м} \\ 1,1252 \cdot 10^{-7} \text{ м} \\ 2,8578 \cdot 10^{-7} \text{ м} \\ 8,8558 \cdot 10^{-7} \\ -1,1252 \cdot 10^{-6} \\ 9,5235 \cdot 10^{-7} \end{Bmatrix}. \quad (10)$$

Перемещения сечения 1, полученные при решении этой же задачи в программном комплексе ANSYS (рис. 4):

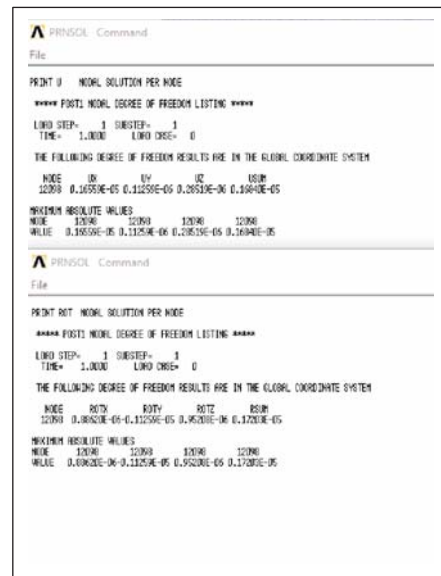
$$\begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{z1} \\ \vartheta_{1x} \\ \vartheta_{1y} \\ \vartheta_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,6559 \cdot 10^{-6} \text{ м} \\ 1,1259 \cdot 10^{-7} \text{ м} \\ 2,8519 \cdot 10^{-7} \text{ м} \\ 8,8620 \cdot 10^{-7} \\ -1,1259 \cdot 10^{-6} \\ 9,5208 \cdot 10^{-7} \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

Из выражений (10) и (11) следует, что относительная погрешность определения перемещений

$$\begin{Bmatrix} \delta_{u_{x1}} \\ \delta_{u_{y1}} \\ \delta_{u_{z1}} \\ \delta_{\vartheta_{1x}} \\ \delta_{\vartheta_{1y}} \\ \delta_{\vartheta_{1z}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,030 \% \\ 0,062 \% \\ 0,207 \% \\ 0,070 \% \\ 0,062 \% \\ 0,028 \% \end{Bmatrix}.$$



а



б

Рис. 4. Результаты решения тестовой задачи № 1 в программном комплексе ANSYS: а — поле перемещений, м; б — перемещения жесткого сечения

Тестовая задача № 2 по определению собственных частот осевых, крутильных и изгибных колебаний конической оболочки с линейно изменяющейся толщиной от h_1 до h_2 (рис. 5) решена при следующих исходных данных: $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па; $\mu = 0,3$; $r_1 = 0,2$ м; $r_2 = 0,4$ м; $h_1 = 0,008$ м, $h_2 = 0,012$ м (толщина при $Z = 0$ и $Z = L$ соответственно); $L = 2r_2$. Оболочка состояла из 20 кольцевых элементов.

Результаты сравнения собственных частот f_i , полученных в программных пакетах WM и ANSYS, для оболочки вращения, изображенной на рис. 5, приведены в табл. 1, где i — номер собственной частоты, δ — погрешность.

Тестовая задача № 3 по определению собственных частот оболочки вращения с криволинейной образующей, защемленной по краям (рис. 6) также была решена в среде WM и КЭ пакете ANSYS. Полученные результаты приведены в табл. 2.

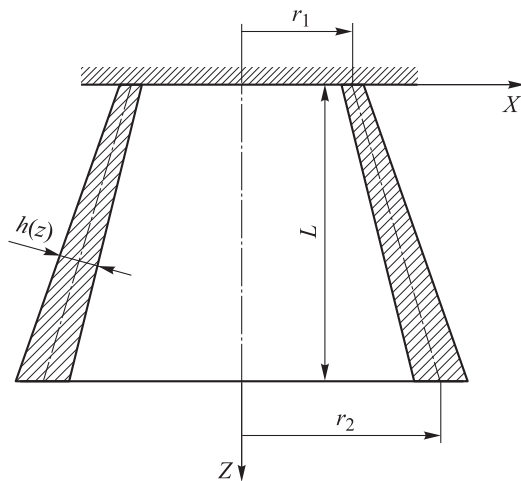


Рис. 5. Схема конической оболочки вращения для тестовой задачи № 2

Таблица 1

Результаты сравнения собственных частот для тестовой задачи № 2

Вид колебаний	i	f_i , Гц		δ , %
		WM	ANSYS	
Изгибные	1	291,78	291,20	0,199
	2	1 271,27	1 269,20	0,163
	3	2 059,49	2 056,39	0,151
Крутильные	1	550,74	550,80	0,011
	2	2 296,36	2 284,18	0,533
Осевые	1	1 167,89	1 168,95	0,091
	2	2 317,78	2 302,40	0,668

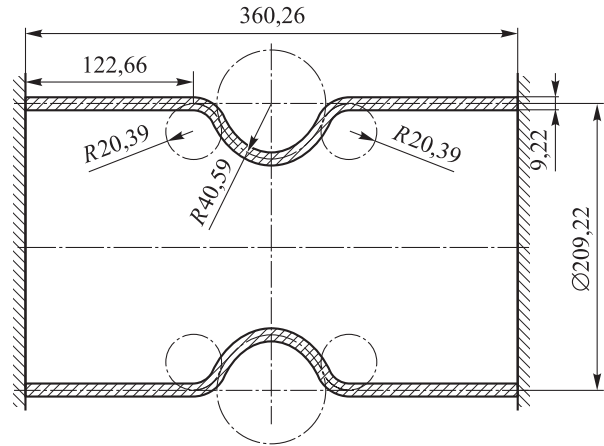


Рис. 6. Схема оболочки вращения с криволинейной образующей для тестовой задачи № 3

Таблица 2

Результаты сравнения собственных частот для тестовой задачи № 3

Вид колебаний	i	f_i , Гц		δ , %
		WM	ANSYS	
Изгибные	1	93,45	91,52	2,11
	2	294,20	293,86	0,12
	3	448,70	446,11	0,58
	4	815,65	816,37	0,09
	5	1 029,85	1 019,75	0,99
Крутильные	1	486,33	482,40	0,81
	2	866,74	890,06	2,62
	3	1 449,97	1 447,16	0,19
Осевые	1	777,60	769,30	1,08
	2	1 159,90	1 188,00	2,36

Выводы

1. Создан и апробирован алгоритм получения матриц жесткости и масс двухузлового КЭ осесимметричной оболочки при несимметричном деформировании с опцией жесткого торца.

2. Решение тестовых задач показало, что реализованный элемент с опцией жесткого сечения работает корректно (см. табл. 1, 2, соотношения (10), (11)) и может успешно применяться для моделирования оболочечных конструкций, заключенных между поперечными фланцами. В отличие от аналогов возможность создания жесткого торца реализована как опция элемента путем редуцирования матриц жесткости и

масс элемента без жесткого торца. Это позволяет избежать использования множителей Лагранжа (которые всегда увеличивают размерность системы уравнений и ухудшают ее свой-

ства) и экономить вычислительные ресурсы благодаря отсутствию необходимости прибегать к специальным средствам для моделирования жестких сечений.

Литература

- [1] Бережной Д.В., Сагдатуллин М.К. Трехмерный конечный элемент для расчета оболочек средней толщины. *Вестник Казанского технологического университета*, 2013, т. 16, № 9, с. 256–261.
- [2] Якупов С.Н., Киямов И.Х. Анализ НДС сферических оболочек трехмерными элементами. *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*, 2014, № 2, с. 76–80.
- [3] Горохова М.В. Исследование напряженно-деформированного состояния прямоугольной мембраны, находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки. *Научный альманах*, 2015, № 10, с. 80–85.
- [4] Усюкин В.И. *Строительная механика конструкций космической техники*. Москва, Машиностроение, 1988. 392 с.
- [5] Oñate E. *Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics: Volume 2: Beams, Plates and Shells*. Springer, Science & Business Media, 2013. 894 p.
- [6] Бидерман В.Л. *Механика тонкостенных конструкций: статика*. Москва, URSS, 2017. 496 с.
- [7] Бате К., Вилсон Е. *Численные методы анализа и метод конечных элементов*. Москва, Стройиздат, 1982. 448 с.
- [8] Hamrit F., Necib B., Driss Z. Analysis of Mechanical Structures Using Beam Finite Element Method. *International Journal of Mechanics and Applications*, 2015, vol. 5, no. 1, pp. 23–30.
- [9] Hetherington J., Askes H. A mass matrix formulation for cohesive surface elements. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2014, vol. 69, pp. 110–117.
- [10] Rao S.S. *The Finite Element Method in Engineering*. Pergamon, Elsevier, 2013. 652 p.

References

- [1] Berezhnoi D.V., Sagdatullin M.K. Trekhmernyi konechnyi element dlia rascheta obolochek srednei tolshchiny [Three-dimensional finite element for analysis of shells of medium thickness]. *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta* [Herald of Kazan Technological University]. 2013, vol. 16, no. 9, pp. 256–261.
- [2] Iakupov S.N., Kiiamov I.Kh. Analiz NDS sfericheskikh obolochek trekhmernymi elementami [Analysis of the stress-strain state of spherical shells with the help of three-dimensional elements]. *Stroitel'naia mekhanika inzhenernykh konstrukttsii i sooruzhenii* [Structural mechanics of engineering constructions and buildings]. 2014, no. 2, pp. 76–80.
- [3] Gorokhova M.V. Issledovanie napriazhenno-deformirovannogo sostoiianiia priamougol'noi membrany, nakhodiashcheisia pod deistviem ravnomerno raspredelennoi nagruzki [Research of the voltage deformed condition of the rectangular membrane loaded by evenly distributed loading]. *Nauchnyi al'manakh* [Science Almanac]. 2015, no. 10, pp. 80–85.
- [4] Usiukin V.I. *Stroitel'naia mekhanika konstrukttsii kosmicheskoi tekhniki* [Structural mechanics of space structures]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1988. 392 p.
- [5] Oñate E. *Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics: Volume 2: Beams, Plates and Shells*. Springer, Science & Business Media, 2013. 894 p.
- [6] Biderman V.L. *Mekhanika tonkostennykh konstrukttsii: statika* [Mechanics of thin-walled structures: statics]. Moscow, URSS publ., 2017. 496 p.
- [7] Bate K., Vilson E. *Chislennyye metody analiza i metod konechnykh elementov* [Numerical analysis method and finite element method]. Moscow, Stroiizdat publ., 1982. 448 p.
- [8] Hamrit F., Necib B., Driss Z. Analysis of Mechanical Structures Using Beam Finite Element Method. *International Journal of Mechanics and Applications*, 2015, vol. 5, no. 1, pp. 23–30.

- [9] Hetherington J., Askes H. A mass matrix formulation for cohesive surface elements. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2014, vol. 69, pp. 110–117.
- [10] Rao S.S. *The Finite Element Method in Engineering*. Pergamon, Elsevier, 2013. 652 p.

Статья поступила в редакцию 03.07.2017

Информация об авторах

НИЗАМЕТДИНОВ Фярит Ринатович (Москва) — аспирант кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана; инженер отдела разработки математических алгоритмов и программного обеспечения. ИКЦ ООО «Альфа-транзит» (141400, Московская область, Химки, Ленинградская ул., д. 1, e-mail: frnizametdinov@list.ru).

СОРОКИН Федор Дмитриевич (Москва) — доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: sorokin_fd@mail.ru).

Information about the authors

NIZAMETDINOV Fyarit Rinatovich (Moscow) — Post-graduate, Department of Applied Mechanics. Bauman Moscow State Technical University; Engineer, Department of Mathematical Algorithms and Software Development, Engineering Consulting Centre — ООО Alfa-Tranzit (141400, Moscow region, Khimky, Leningradskaya St. 1, e-mail: frnizametdinov@list.ru).

SOROKIN Fedor Dmitrievich (Moscow) — Professor, Department of Applied Mechanics. Bauman Moscow State Technical University. (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: sorokin_fd@mail.ru).

А.В. Туманов, В.В. Зеленцов, Г.А. Щеглов
Основы компоновки бортового оборудования космических аппаратов



В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана
вышло в свет 3-е издание учебного пособия
А.В. Туманова, В.В. Зеленцова, Г.А. Щеглова

«Основы компоновки бортового оборудования космических аппаратов»

Рассмотрены этапы проектирования космического аппарата и основные документы, необходимые для выполнения его компоновки. Изложены требования, предъявляемые к компоновке целевого оборудования, а также к аппаратуре системы управления движением и другим системам бортового оборудования. Даны критерии оценки качества выполненной компоновки и обширный иллюстративный материал по обеспечивающим системам бортового оборудования. Описаны элементы бортового оборудования и приведены нормативные документы, регламентирующие его компоновку.

Содержание учебного пособия соответствует курсу лекций, которые авторы читают в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Для студентов, обучающихся по специальности «Космические летательные аппараты и разгонные блоки».

По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;
press@bmstu.ru; www.baumanpress.ru