

Расчет и конструирование машин

УДК 621.941.1


DOI: 10.18698/0536-1044-2018-4-3-9

Нелинейная оптимизация режимных параметров точения методом штрафной функции

С.В. Грубый

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1

Nonlinear Optimization of Operating Parameters of Turning by the Penalty Function Method

S.V. GrubyiBMSTU, 105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1 e-mail: grusv@yandex.ru

i Точение относится к механической лезвийной обработке резанием, а технологический режим является основной характеристикой операции и определяет совокупность параметров технологического процесса в определенном интервале времени. Рассмотрена параметрическая нелинейная оптимизация режимных параметров точения с использованием внутренней штрафной функции, минимум которой вычисляется методами Ньютона и градиентного спуска. В качестве целевой функции выбрана переменная часть себестоимости обработки с ограничениями по числу деталей, шероховатости поверхности и мощности резания. Проведены алгоритмизация и сравнительный анализ этих методов. Результаты анализа показали, что оптимальные значения режимных параметров соответствуют точке пересечения линий уровня ограничений.

Ключевые слова: параметрическая оптимизация, штрафная функция, метод Ньютона, метод градиентного спуска, шероховатость поверхности, мощность резания

i Turning belongs to mechanical processing by cutting where the processing schedule is the main characteristic of the operation. It determines the aggregate parameters of the technological process in a certain period of time. This article examines parametric nonlinear optimization of operating parameters of turning using the internal penalty function, the minimum of which is calculated by Newton method and the gradient descent method. The variable part of the production cost with constraints by the number of parts, surface roughness and cutting power is selected as the objective function. Algorithms are constructed, and a comparative analysis of these methods is performed. Based on the results obtained, it is shown that the optimal values of the operating parameters correspond to the intersection point of the constraint level lines.

Keywords: parametric optimization, penalty function, Newton's method, gradient descent method, surface roughness, cutting power

Назначение режимных параметров механической обработки можно рассматривать как многостадийный процесс, включающий в себя сле-

дующие этапы: их выбор по справочной литературе и рекомендациям производственных и инструментальных фирм; расчет скорости ре-

зания, сил, мощности и температуры по методикам, изложенным, например, в учебном пособии [1]; оптимизацию как выбор лучшего варианта из совокупности возможных по различным методам [2].

В общем виде методы оптимизации достаточно полно рассмотрены в специальной научной и учебной литературе. Эти методы постоянно развиваются вследствие усложнения задач управления процессом механической обработки. Так, изложены основные понятия, теоремы и методы решения задач многокритериальной оптимизации [3]. Исходя из результатов многокритериального анализа выбирают допустимые варианты технологии и режимных параметров. Рассматривают различные методы многокритериальной оптимизации [4]. Методы оптимизации применяют в совокупности с методами компьютерного моделирования и программирования, используя различные программные продукты CAD/CAM/CAE/PDM-систем [5, 6] и др.

Вместе с тем по-прежнему остаются актуальными задачи однокритериальной многопараметрической оптимизации режимных параметров разных операций механической обработки. Здесь широко применяют методы линейного программирования [7], а также набор различных методов нелинейной оптимизации [8–10]. Среди последних можно выделить методы так называемых штрафных функций, которые показали свою эффективность при решении технических оптимизационных задач с нелинейными технологическими ограничениями [8, 11].

Цель работы — анализ методов минимизации штрафной функции и разработка инженерного метода параметрической оптимизации режимных параметров на операциях механической обработки.

Техническая оптимизационная задача, как правило, является экономико-математической, содержит количественные критерии оптимальности и ограничения, выраженные математическими уравнениями в той или иной форме. Для решения таких задач широко используют методы вычислительной математики, численные методы, эффективно реализуемые на современных ПЭВМ. Результатом решения задачи параметрической оптимизации являются оптимальные значения режимных параметров, обеспечивающие повышение показателей эффективности операции обработки резанием:

минимальную себестоимость, максимальную производительность и заданные параметры качества. Применяя системный подход и математическое моделирование как методологию, расчетным путем определяют оптимальные значения режимных параметров, реализуемые через систему управления станком, и таким образом обеспечивают выбранный количественный критерий оптимальности.

Метод внутренней штрафной функции принадлежит к числу методов параметрической оптимизации. Его относят к методам поиска условного экстремума, когда решение задачи с ограничениями находится как последовательность решений вспомогательной задачи безусловной минимизации составленной определенным образом функции.

Общая схема построения расчетного алгоритма заключается в том, что минимизация целевой функции $f_0(\mathbf{X}) \rightarrow \min, \mathbf{X} \in \Omega$ (\mathbf{X} — вектор переменных; Ω — область допустимых значений) эквивалентна задаче безусловной минимизации суммы

$$f_0(\mathbf{X}) + \delta(\mathbf{X}) \rightarrow \min, \quad (1)$$

где $\delta(\mathbf{X})$ — так называемая *индикаторная функция*,

$$\delta(\mathbf{X}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathbf{X} \in \Omega; \\ +\infty, & \text{если } \mathbf{X} \notin \Omega. \end{cases}$$

Если множество допустимых значений по области Ω задано с помощью непрерывных функций $\varphi_i(\mathbf{X}) > 0, i = 1, 2, \dots, m$, то можно построить последовательность штрафов, сходящихся к индикаторной функции по области Ω и неограниченно возрастающих при приближении к границе Ω . В этом случае поиск минимума штрафной функции (1) нужно начинать с внутренней точки области Ω , т. е. когда ограничения выполнены как строгие неравенства. Тогда траектория минимизации штрафной функции не покинет области допустимых значений, отсюда и название — *метод внутренней штрафной функции*.

Индикаторная функция имеет вид

$$\delta_k(\mathbf{X}) = r_k \sum_{i=1}^m \frac{1}{\varphi_i(\mathbf{X})},$$

где r_k — параметр штрафа; k — номер итерации.

Тогда общая задача нелинейного программирования эквивалентна задаче безусловной минимизации штрафной функции

$$L(\mathbf{X}, r_k) = f_0(\mathbf{X}) + r_k \sum_{i=1}^m \frac{1}{\varphi_i(\mathbf{X})} \rightarrow \min, \quad (2)$$

$$\varphi_i(\mathbf{X}) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где r_k — монотонно убывающая сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел.

Рассмотрена оптимизация режимных параметров точения (скорости резания v и подачи s при постоянной глубине резания $t = 2,5$ мм и износе инструмента $h_z = 0,2$ мм) заготовки диаметром $d = 150$ мм и длиной $l = 100$ мм из коррозионностойкой стали марки 12Х18Н10Т резцом со сменной многогранной пластиной из твердого сплава марки ВК6М. В качестве целевой функции выбрана переменная часть себестоимости $C(v, s)$ обработки заготовки на операции, а технологическими ограничениями являются заданные значения числа обработанных деталей за период стойкости инструмента K_{Tz} , шероховатости поверхности Rz_z и мощности шпинделя N_z , предельные значения скорости резания и подачи. Для выбранных условий оптимизационной задачи уравнение (2) примет вид

$$L(v, s, r_k) = C(v, s) + r_k \left[\frac{1}{K_T(v, s) - K_{Tz}} + \frac{1}{Rz_z - Rz(v, s)} + \frac{1}{N_z - N(v, s)} + \dots + \frac{1}{v_{\max} - v} + \frac{1}{s_{\max} - s} + \frac{1}{s - s_{\min}} \right] \rightarrow \min, \quad (3)$$

где $K_T(v, s)$, $Rz(v, s)$ и $N(v, s)$ — соответственно число обработанных деталей, шероховатость поверхности и мощность резания как функции от скорости резания и подачи; $K_{Tz} = 40$ шт.; $Rz_z = 40$ мкм; $N_z = 7,5$ кВт; v_{\max} — максимальная скорость резания; s_{\max} и s_{\min} — максимальная и минимальная подача.

Рассмотрена минимизация функции (3) двумя методами. При реализации метода градиентного спуска выполняется итерационный процесс пропорционально антиградиенту функции:

$$v_{k+1} = v_k - \alpha_v \partial L(v_k, s_k, r_k) / \partial v; \quad (4)$$

$$s_{k+1} = s_k - \alpha_s \partial L(v_k, s_k, r_k) / \partial s,$$

где для каждой k -й итерации частные производные рассчитаны численно, параметр штрафа

r_k может оставаться постоянным для ряда итераций, коэффициенты α_v, α_s регулируют шаги по соответствующим переменным.

Метод Ньютона для функции многих переменных основан на итерационном процессе следующего вида:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k - \mathbf{H}_k^{-1}(L) \Delta_k(L), \quad (5)$$

где \mathbf{H}_k^{-1} — обратная матрица Гессе функции (3) на k -й итерации; Δ_k — матрица-столбец на k -й итерации, содержащая соответствующие первые частные производные; \mathbf{X}_k — вектор переменных \mathbf{X} на k -й итерации.

Если представить матрицу Гессе для функции двух переменных как $\mathbf{H} = [a_{11} \ a_{12}; a_{21} \ a_{22}]$, раскрыть операцию обращения, то выражение (5) в координатной форме примет вид

$$\begin{bmatrix} v_{k+1} \\ s_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_k \\ s_k \end{bmatrix} - \frac{1}{\det(\mathbf{H}_k)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \partial L / \partial v \\ \partial L / \partial s \end{bmatrix}_k, \quad (6)$$

где элементы, определитель и частные производные рассчитываются на каждой итерации:

$$a_{11} = \partial^2 L / \partial v^2;$$

$$a_{12} = a_{21} = \partial^2 L / \partial v \partial s;$$

$$a_{22} = \partial^2 L / \partial s^2.$$

Для математического выражения целевой функции и ограничений использованы следующие степенные уравнения скорости резания v , м/мин, и главной составляющей силы P_z , Н:

$$v = \frac{C_v K_v}{T^{m_v} t^{x_v} s^{y_v}}; \quad P_z = C_p t^{x_p} s^{y_p} K_p / v^{n_p}, \quad (7)$$

где C_v, C_p и K_v, K_p — постоянные и поправочные коэффициенты; T — стойкость инструмента, мин; t — глубина резания, мм.

Значения постоянных и показателей степеней в уравнениях (7) для рассматриваемых условий обработки заимствованы из справочника [12] и приведены в табл. 1.

Переменная часть себестоимости, зависящая от режимов резания, определяется выражением

$$C = t_0 E + t_0 C_{es} + t_0 (T_{cm} E + E_u) / T, \text{ руб./шт.}, \quad (8)$$

где t_0 — основное время; E — стоимость 1 мин. работы станка с учетом затрат на эксплуатацию и ремонт; C_{es} — затраты на

Таблица 1

Значения параметров уравнений (7)

s , мм/об	C_v	m_v	x_v	y_v	K_v	C_p	x_p	y_p	K_p	n_p
$\leq 0,2$	240	0,25	0,15	0,15	1	3 400	0,95	0,75	1	0,15
$> 0,2$	150	0,25	0,15	0,45	1					

электроэнергию, приходящиеся на минуту резания; $T_{см}$ — время на смену инструмента после затупления; E_u — расходы на инструмент за период стойкости.

После преобразования относительно рассмотренных переменных уравнение (8) приведено к виду

$$C(v, s) = \frac{A_1}{vs} + \frac{A_2}{v^{n_p} s^{(1-y_p)}} + A_3 v^{(1/m_v-1)} s^{(y_v/m_v-1)}, \quad (9)$$

где A_1, A_2, A_3 — постоянные, не зависящие от режимных параметров.

Таблица 2

Значения параметров уравнения (10) для расчета шероховатости

C_R	y_R	x_R	n_R	K_h
147,5	1,253	0,338	0,25	0,96

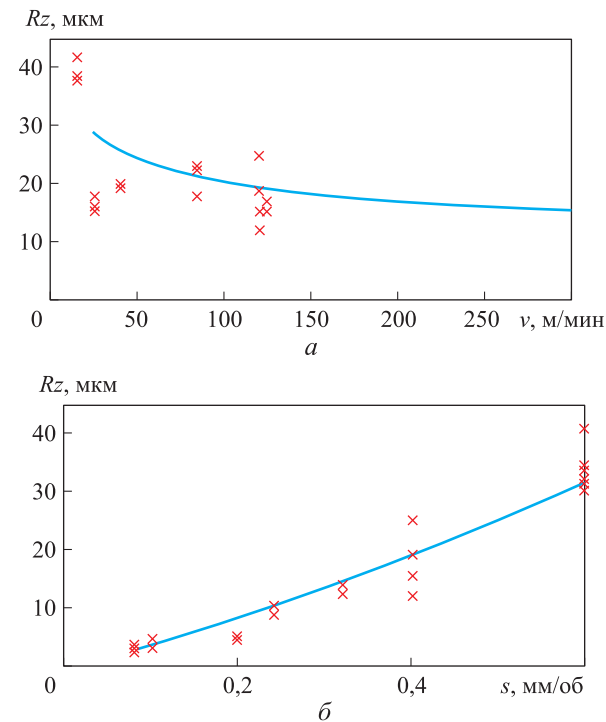


Рис. 1. Зависимости шероховатости обработанной поверхности от скорости резания (а) и подачи (б):
— расчет по степенному уравнению (10);
× — эксперимент

Для расчета шероховатости обработанной поверхности по параметру предложено степенное уравнение

$$Rz = \frac{C_R s^{y_R} v^{x_R}}{v^{n_R}} (1 + K_h h_z), \quad \text{мкм}, \quad (10)$$

где h_z — износ инструмента по задней поверхности, мм.

Значения постоянной и показателей степеней в выражении (10) приведены в табл. 2.

Уравнение (10) получено в результате аппроксимации экспериментальных данных по шероховатости обработанных поверхностей на стальных заготовках твердосплавными резцами. На рис. 1 приведены зависимости шероховатости обработанной поверхности от скорости резания и подачи, полученные при расчете по степенному уравнению (10) и по результатам экспериментов.

Результаты анализа целевой функции (9) показаны на рис. 2 в виде линий уровня в координатной плоскости режимных переменных скорость резания–подача. Минимум себестоимости находится в области больших подач, технически не реализуемых на практике. Поэтому минимизация функции (9) не имеет смысла без учета технологических ограничений. Рассмотрены следующие технологические ограничения:

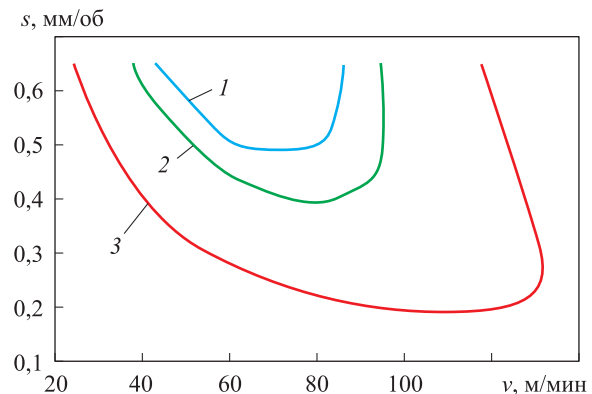


Рис. 2. Линии уровня переменной части себестоимости:
1 — $C = 24$ руб.; 2 — $C = 27$ руб.; 3 — $C = 40$ руб.

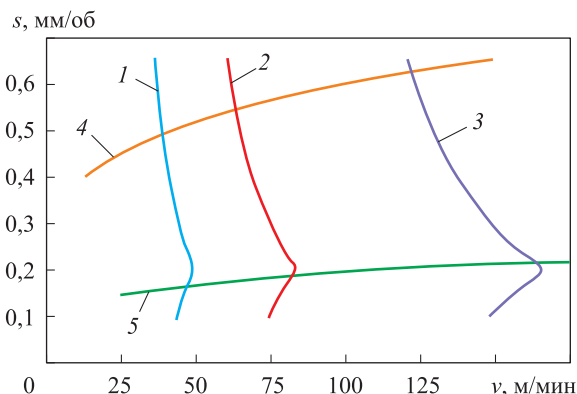


Рис. 3. Линии уровня числа обработанных деталей K_{Tz} и шероховатости поверхности Rz_z : 1 — $K_{Tz} = 200$ шт.; 2 — $K_{Tz} = 40$ шт.; 3 — $K_{Tz} = 5$ шт.; 4 — $Rz_z = 40$ мкм; 5 — $Rz_z = 10$ мкм

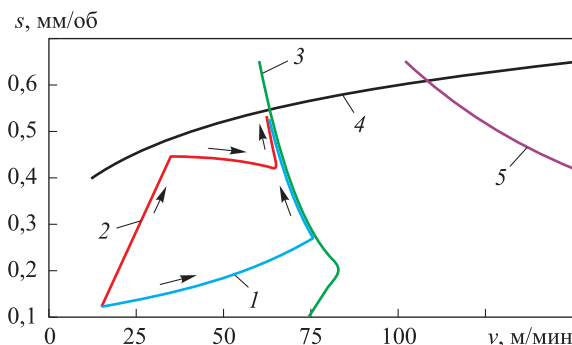


Рис. 4. Траектории метода Ньютона (1), градиентного спуска (2) и линии уровня числа обработанных деталей $K_{Tz} = 40$ шт. (3), шероховатости $Rz_z = 40$ мкм (4) и мощности $N = 5$ кВт (5)

- шероховатость поверхности по уравнению (10);
- по числу обработанных деталей за период стойкости $K_T(v, s) = T / t_0$, где стойкость функционально связана со скоростью резания и подачей по выражению (7);
- мощность, выражаемая через главную составляющую силы и скорость резания.

Линии уровня для числа обработанных деталей и шероховатости поверхности показаны на рис. 3. С увеличением числа деталей линии уровня смещаются в область малых скоростей резания, а с ростом шероховатости — в область больших подач.

Оба метода (4) и (6) проиллюстрированы на рис. 4, где показаны траектории метода Ньютона (кривая 1) и градиентного спуска (кривая 2) и линии уровня технологических ограничений при следующих исходных данных: глубина резания $t = 2,5$ мм, износ резца $h_z = 0,2$ мм.

В качестве начальной выбрана точка с координатами [15; 0,12]. Условием останова расчетного алгоритма принято: $L(v_k, s_k) - L(v_{k+1}, s_{k+1}) \leq \epsilon$, где ϵ — малая величина. Как видно из рис. 4, оба метода имеют разные, но близкие на конечном участке траектории и близкие оптимальные точки. Метод Ньютона характеризуется быстрой сходимостью. Следует подчеркнуть, что начальная точка должна находиться в области допустимых значений, т. е. соответствовать системе технологических ограничений. Для метода градиентного спуска есть опасность выхода за пределы области допустимых значений на первой итерации вследствие большого градиента функции в начальной точке. Параметр штрафа в функции (3) изменялся по итерациям как последовательность положительных чисел: $\eta_k = 5; 3; 1; 0,8; 0,5; 0,3; 0,2; 0,1$.

Результаты сравнительного анализа методов оптимизации приведены в табл. 3. Там же

Таблица 3

Результаты сравнительного анализа методов оптимизации

Условия	Число итераций	v , м/мин	s , мм/об	L	C , руб.	K_T , шт.	Rz , мкм
Начальная точка	—	15,0	0,12	395,6	352,2	5 155	8,5
Метод Ньютона	80	62,7	0,53	25,9	24,4	42	38,3
Метод градиентного спуска	435	61,9	0,53	25,8	24,3	43	38,9
Точка пересечения линий уровня $K_{Tz} = 40$ шт., $Rz_z = 40$ мкм	—	63,1	0,55	—	23,8	40	40
Точка пересечения линий уровня $K_{Tz} = 40$ шт., $Rz_z = 10$ мкм	—	80,6	0,19	—	46,9	40	10
Точка пересечения линий уровня $K_{Tz} = 5$ шт., $Rz_z = 10$ мкм	—	161,0	0,22	—	59,8	5	10

указана точка пересечения линий уровня технологических ограничений по заданному числу обработанных деталей и шероховатости поверхности.

Из табл. 3, а также из анализа решений аналогичных задач нелинейной оптимизации режимных параметров на различных операциях механической обработки следует, что оптимальные точки находятся в непосредственной близости от точек пересечения линий уровня соответствующих ограничений. Отсюда вытекает метод инженерного анализа: алгебраическими преобразованиями получаем линии уровня ограничений; определяем область допустимых значений режимных параметров; находим точки пересечения соответствующих линий уровня; проверяем значения целевой функции в этих точках и вычисляем оптимальную точку минимума целевой функции.

Например, для ограничений по числу деталей $K_{Tz} = 40$ шт. и шероховатости $Rz_z = 10$ мкм или $K_{Tz} = 5$ шт. и $Rz_z = 10$ мкм, линии уровня которых приведены на рис. 3, простым алгебраическим решением двух соответствующих нелинейных уравнений определены точки пересечения, являющиеся оптимальными для каждого варианта ограничений. Результаты расчетов показаны в двух последних строках табл. 3. Из полученных результатов также следует, что с повышением уровня ограничений увеличивается

значение целевой функции — себестоимости обработки.

Выводы

1. Эффективность операций механической обработки резанием можно повысить, применив результаты решения соответствующих задач параметрической оптимизации.

2. В качестве метода параметрической нелинейной оптимизации предложено использовать метод внутренней штрафной функции, включающей в себя целевую функцию — переменную часть себестоимости обработки на операции — и математически выраженные технологические ограничения по числу обработанных деталей, шероховатости и мощности резания.

3. Показано, что для минимизации штрафной функции можно использовать как метод Ньютона, так и метод градиентного спуска, дающие близкие решения. Оптимальная точка минимума функции находится в непосредственной близости от точки пересечения соответствующих линий уровня технологических ограничений.

4. Предложен инженерный подход к параметрической оптимизации на операциях механической обработки, основанный на построении и анализе точек пересечения линий уровня ограничений.

Литература

- [1] Безъязычный В.Ф., Аверьянов И.Н., Кордюков А.В. *Расчет режимов резания*. Рыбинск, РГАТА, 2009. 185 с.
- [2] Грубый С.В. *Методы оптимизации режимных параметров лезвийной обработки*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 96 с.
- [3] Коротченко А.Г., Кумагина Е.А., Сморякова В.М. *Введение в многокритериальную оптимизацию*. Нижний Новгород, Нижегородский госуниверситет, 2017. 55 с.
- [4] Ногин В.Д. *Принятие решений при многих критериях*. Санкт-Петербург, Изд-во ЮТАС, 2007. 104 с.
- [5] Пестрецов С.И. *Компьютерное моделирование и оптимизация процессов резания*. Тамбов, Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2009. 104 с.
- [6] Пестрецов С.И., Алтунин К.А., Соколов М.В., Однолько В.Г. *Концепция создания системы автоматизированного проектирования процессов резания в технологии машиностроения*. Москва, Издательский дом «Спектр», 2012. 212 с.
- [7] Зарубин В.С., Крищенко А.П., ред. *Исследование операций*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 440 с.
- [8] Зарубин В.С., Крищенко А.П., ред. *Методы оптимизации*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 440 с.
- [9] Moiseev S.N. *Universal derivative-free optimization method with quadratic convergence*. URL: <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1102/1102.1347.pdf>.
- [10] Свирщев В.И., Тарасов С.В., Савлов А.Н., Кузьминок И.М. Параметрическая оптимизация методов механической обработки материалов на основе $T-Q$ характеристик

процесса резания. *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*, 2017, т. 19, № 4, с. 27–32.

- [11] Грубый С.В. *Оптимизация процесса механической обработки и управление режимными параметрами*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 149 с.
- [12] Гуревич Я.Л. *Режимы резания труднообрабатываемых материалов. Справочник*. Москва, Машиностроение, 1986. 240 с.

References

- [1] Bez'iazuchnyi V.F., Aver'ianov I.N., Kordiuikov A.V. *Raschet rezhimov rezaniia* [Calculation of cutting data]. Rybinsk, RSATU publ., 2009. 185 p.
- [2] Grubyi S.V. *Metody optimizatsii rezhimnykh parametrov lezviinoi obrabotki* [Methods to optimize the operating parameters of the blade processing]. Moscow, Bauman Press, 2008. 96 p.
- [3] Korotchenko A.G., Kumagina E.A., Smoriakova V.M. *Vvedenie v mnogokriterial'nuiu optimizatsiiu* [Introduction to multi-criteria optimization]. Nizhnii Novgorod, Nizhegorodskii gosuniversitet publ., 2017. 55 p.
- [4] Nogin V.D. *Priniatie reshenii pri mnogikh kriteriiakh* [Decision-making at many criteria]. Sankt-Petersburg, UTAS publ., 2007. 104 p.
- [5] Pestretsov S.I. *Komp'yuternoe modelirovaniye i optimizatsiia protsessov rezaniia* [Computer simulation and optimization of cutting processes]. Tambov, TSTU publ., 2009. 104 p.
- [6] Pestretsov S.I., Altunin K.A., Sokolov M.V., Odnol'ko V.G. *Kontseptsiia sozdaniia sistemy avtomatizirovannogo proektirovaniia protsessov rezaniia v tekhnologii mashinostroeniia* [The concept of creating of computer-aided design of cutting processes in mechanical engineering technology]. Moscow, Publishing house Spektr, 2012. 212 p.
- [7] *Issledovanie operatsii* [Operation research]. Ed. Zarubin V.S., Krishchenko A.P. Moscow, Bauman Press, 2004. 440 p.
- [8] *Metody optimizatsii* [Optimization method]. Ed. Zarubin V.S., Krishchenko A.P. Moscow, Bauman Press, 2001. 440 p.
- [9] Moiseev S. *Universal derivative-free optimization method with quadratic convergence*. Available at: <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1102/1102.1347.pdf>.
- [10] Svirshchev V.I., Tarasov S.V., Savlov A.N., Kuz'minok I.M. *Parametricheskaiia optimizatsiia metodov mekhanicheskoi obrabotki materialov na osnove T-Q kharakteristik protsesssa rezaniia* [Parametric optimization of methods for machining materials based on T-Q characteristics of the cutting process]. *Izvestiia Samarskogo nauchnogo tsentra Rossiiskoi akademii nauk* [Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences]. 2017, vol. 19, no. 4, pp. 27–32.
- [11] Grubyi S.V. *Optimizatsiia protsesssa mekhanicheskoi obrabotki i upravlenie rezhimnymi parametrami* [Optimization of the machining process and control regime parameters]. Moscow, Bauman Press, 2014. 149 p.
- [12] Gurevich Ia.L. *Rezhimy rezaniia trudnoobrabatyvaemykh materialov. Spravochnik* [Cutting hard materials. Reference]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1986. 240 p.

Статья поступила в редакцию 15.01.2018

Информация об авторах

ГРУБЫЙ Сергей Витальевич (Москва) — доктор технических наук, профессор кафедры «Инструментальная техника и технологии». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: grusv@yandex.ru).

Information about the authors

GRUBYI Sergei Vitalievich (Moscow) — Doctor of Science (Eng.), Professor, Tools and Tooling Technology Department. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: grusv@yandex.ru).