УДК 517.947.44 DOI: 10.18698/0536-1044-2018-9-82-90

Оценка влияния случайного разброса параметров на динамику конструкций с использованием интерполяционного метода*

О.Н. Тушев[1], Е.В. Юнак[2], А.В. Беляев[1]

[1] МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1
[2] АО «ВПК «НПО Машиностроения», 143966, Реутов, Московская обл., Российская Федерация, ул. Гагарина, д. 33

An Assessment of the Influence of Random Deviation of Parameters on the Dynamic Characteristics Using the Interpolation Method

O.N. Tushev[1], E.V. Yunak[2], A.V. Belyaev[1]

[1] BMSTU, 105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1
[2] Military and Industrial Corporation AO NPO Mashinostroyeniya, 143966, Reutov, Moscow region, Russian Federation, Gagarin St., Bldg. 33

e-mail: kafsm2@bmstu.ru, yunak.ev@gmail.com, beliaev@bmstu.ru

Разработка методики для стохастического анализа динамических характеристик ракетной и космической техники и ее реакций на внешние случайные воздействия является актуальной инженерной задачей. Колебания упругой конструкции описываются векторным нелинейным уравнением в форме Коши. На характер нелинейностей не накладываются условия дифференцируемости. Функциональность системы зависит от выполнения ограничений на значения перемещений, скоростей и ускорений отдельных точек конструкции. Для решения многопараметрической задачи использован интерполяционный метод. Корни ортогональных полиномов Лагранжа являются узлами интерполяции. При этом обеспечивается минимальная среднеквадратическая ошибка аппроксимации вероятностных характеристик. Функциональность системы связана с оценками попадания элементов случайного вектора в соответствующую одномерную область. Метод разработан для вероятностного анализа нелинейных систем, имеющих большое количество случайных параметров. Результаты проиллюстрированы примером.

Ключевые слова: параметры качества, интерполяционный метод, ортогональные полиномы, функция плотности вероятности, оценки вероятности

The development of methods for stochastic analysis of the dynamic characteristics of rocket and space systems and their response to external random forces is an important engineering task. Vibrations of the elastic structure are described by a vector nonlinear equation in the normal Cauchy form. The differentiability of nonlinear dependencies is not required. Limitations on the magnitude of the displacements, velocities, and accelerations of individual elements formalize the conditions for the functioning of the system. The interpolation method is used to solve the multiparametric problem. The roots of orthogonal Lagrangian polynomials serve as interpolation nodes. Under this condition, the mean quadruple approximation error of probabilistic characteristics assumes a

* Работа поддержана грантом РФФИ №17-08-014 68а.

minimum value. The functionality of the system is associated with the probability estimates of the random vector elements distribution in the corresponding one-dimensional domain. The method is designed for the probabilistic analysis of nonlinear systems with a large number of random parameters. The results are illustrated by an example.

Keywords: quality characteristics, interpolation method, orthogonal polynomials, probability density function, probability estimates

Параметрический анализ в той или иной форме обязательно сопутствует всем стадиям разработки любого инженерного объекта. Случайный разброс параметров внешних воздействий, условий эксплуатации и проектируемой конструкции (что на практике всегда имеет место) может существенно снизить ее функциональность вплоть до полного выхода из строя.

Современный уровень вычислительной техники позволяет использовать сложные нелинейные модели реальных объектов с большим числом степеней свободы, что характерно для конечно-элементных расчетных моделей конструкций летательных аппаратов [1, 2]. Разработка методик и алгоритмов решения задач стохастического многопараметрического анализа является актуальной темой для научных и прикладных исследований в области проектирования ракет и космических аппаратов.

Цель работы — вероятностная оценка выполнения ограничений на значения перемещений, скоростей и ускорений отдельных точек модели конструкции с учетом наличия в ней параметров и внешнего нагружения, имеющих случайный разброс в окрестности номинальных значений.

Широко известным и универсальным подходом, дающим возможность принципиально просто вычислить вероятностные характеристики динамических характеристик для сложных моделей, служит метод Монте-Карло. Сущность метода, способы его применения и обработки результатов рассмотрены в работах [3, 4]. Практически единственным его недостатком является необходимость многократного интегрирования системы уравнений движения. Для систем высокой размерности (для конечно-элементных моделей $10^4…10^6$) этот, казалось бы, технический недостаток приобретает принципиальный характер из-за чрезмерно затянутого процесса вычислений даже при умеренных требованиях к их точности. Ситуация еще более осложняется, если требуется выявить иерархию влияния разбросов отдельных параметров на результат. Следует отметить, что использование многоядерных кластеров в определенной степени снижает этот недостаток.

При параметрическом анализе часто применяют теорию чувствительности [5]. Результаты, полученные для различных инженерных приложений, в том числе в области динамики конструкций, опубликованы в трудах [6–8]. Сущность метода заключается в представлении динамических характеристик в форме усеченного до линейного или квадратического приближения степенного ряда в окрестности математического ожидания. Коэффициенты ряда названы функциями чувствительности, способы определения которых хорошо разработаны. По значениям и знакам функций чувствительности легко найти иерархию влияния разбросов параметров.

Метод весьма нагляден, но имеет существенный недостаток: нелинейные характеристики расчетных моделей часто содержат функции, в целом не дифференцируемые, так как характеризуются особенностями типа разрывов или изломов. В окрестности соответствующих точек переключения функции чувствительности определить нельзя, поэтому разложения в степенные ряды теряют смысл. Кроме того, дифференциальные уравнения относительно функций чувствительности во много раз увеличивают порядок системы уравнений, которую необходимо интегрировать. В работе [9] предложен способ, в некоторой степени ослабляющий этот недостаток.

Интерполяционный метод В.И. Чернецкого [10–12] не уступает методу Монте-Карло по универсальности, простоте алгоритма и строгости теоретического обоснования. При численной реализации интерполяционного метода нет необходимости ни в определении, ни даже в существовании производных от нелинейных функций. Основной недостаток метода В.И. Чернецкого заключается в том, что с увеличением числа параметров и точности проводимых расчетов его трудоемкость быстро приближается к таковой для метода Монте-Карло или даже превосходит ее.

В настоящей работе показано, что в параметрическом анализе можно использовать ограниченную (неполную) информацию, получаемую интерполяционным методом, что требует на порядки меньших машинных ресурсов. При этом оценочный результат во многих случаях удовлетворяет потребностям практики; иерархия влияния каждого разброса в отдельности определяется попутно, как промежуточный результат.

Постановка задачи. Считается, что динамика конструкции описывается следующим уравнением:

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{\Psi}(\mathbf{Y}, \mathbf{A}, t) + \mathbf{G}(\mathbf{A}, t); \quad \mathbf{Y}(\mathbf{A}, t_0) = \mathbf{Y}_0(\mathbf{A}), \tag{1}$$

где $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, ..., y_n)^{\mathrm{T}}$ — вектор фазовых координат, точкой обозначено дифференцирование по времени t; $\mathbf{\Psi}(\mathbf{Y}, \mathbf{A}, t) = [\psi_1(\mathbf{Y}, \mathbf{A}, t), \psi_2(\mathbf{Y}, \mathbf{A}, t), ..., \psi_n(\mathbf{Y}, \mathbf{A}, t)]^{\mathrm{T}}$ — нелинейная вектор-функция без ограничений на характер нелинейностей; $\mathbf{A} = (a_1, a_2, ..., a_m)^{\mathrm{T}}$ — вектор случайных параметров с заданными вероятностными характеристиками; $\mathbf{G}$ — вектор внешних воздействий; $\mathbf{Y}_0$ — вектор фазовых координат в начальный момент времени t_0.

Введем вектор параметров качества системы

$$\mathbf{V}(\mathbf{Y}(\mathbf{A}, t)) = = (v_1(\mathbf{Y}(\mathbf{A}, t), v_2(\mathbf{Y}(\mathbf{A}, t), ..., v_l(\mathbf{Y}(\mathbf{A}, t)))^{\mathrm{T}},$$

элементы которого представляют собой совокупность динамических (например, ускорения, скорости, перемещения отдельных точек конструкции) или других существенных характеристик системы. Для нормального функционирования системы эти элементы должны находиться в заданных границах

$$v_{1i} \le v_i \le v_{2i} \quad \text{или} \quad |v_i| \le v_{0i}, \ \forall i, i = 1, l,$$

где v_{1i}, v_{2i} — нижняя и верхняя границы интервала разброса параметра качества; v_{0i} — максимальное абсолютное значение параметра качества; l — количество таких параметров.

Таким образом, в интервале времени T вероятность

$$P(|v_i(\mathbf{A}, t)| \le v_{0i}), \quad t \in [0, T], \ \forall i, i = 1, l \tag{2}$$

должна быть достаточно высокой, так как определяет надежность функционирования системы. Представляет самостоятельный практический интерес вычисление подобных вероятностей в заданные дискретные моменты времени t_s:

$$P(|v_i(\mathbf{A}, t_s)| \le v_{0i}), \ \forall i, s, \ i = 1, l. \tag{3}$$

Кроме того, их можно применять для оценки вероятностей (2) и надежности механической системы в формулировке В.В. Болотина [13]. Если условно для упрощения записи исключить в выражении (3) несущественные для дальнейших выкладок индекс i и время t_s, то становится ясно, что целью является нахождение вероятностей $P(|v|(\mathbf{A}) \le v_0)$ или $P(v_1 \le v(\mathbf{A}) \le v_2)$. Это несложно выполнить, если известна интегральная функция распределения $F(v)$, которую следует определить в первую очередь.

Метод решения. Для решения уравнения (1) можно использовать один из известных алгоритмов решения задачи Коши. Функциональную зависимость между случайными параметрами и параметрами качества выявим, применяя интерполяционный метод В.И. Чернецкого. Как уже отмечалось, никакие ограничения на характер нелинейностей не накладываются, так как аппроксимация проводится по значениям параметров качества, вычисленным в узлах интерполяции. Допускается, что $a_j, \forall j = 1, m$ — независимые случайные величины с заданными функциями плотности вероятности $f_j(a_j)$, $\forall j = 1, m.$ Как правило, это условие выполняется для большинства практических задач. Тогда

$$f(\mathbf{A}) = \prod_{j=1}^{m} f_j(a_j). \tag{4}$$

Интерполяция осуществляется на основе полиномов Лагранжа, в качестве которых выбираются ортогональные полиномы с весовыми коэффициентами $f_j(a_j)$, а узлами назначаются корни этих полиномов. Таким образом, есть полная определенность в выборе самих полиномов и их узлов. Доказывается [12], что при этом выполняются два важных условия:

- при увеличении количества узлов точность аппроксимации и вычисления вероятностных характеристик возрастает, т. е. они определяются с любой наперед заданной точностью;
- при каждом фиксированном количестве узлов q достигается минимальная средняя квадратическая ошибка аппроксимации в классе возможных m-мерных полиномов степени q.

Интерполяционный полином представляется в виде

$$\tilde{v}(\mathbf{A}) = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_m = 1}^{q_1, q_2, \ldots, q_m} v\left(a_{1k_1}, a_{2k_2}, \ldots, a_{mk_m}\right) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{m} \frac{H_{q_j}\left(a_j\right)}{H'_{q_j}\left(a_{jk_j}\right)\left(a_j - a_{jk_j}\right)}, \qquad (5)$$

где $H_{q_j}(a_j)$ — ортогональный полином порядка q_j,

$$H_{q_j}(a_j) = \prod_{k_j=1}^{q_j}\left(a_j - a_{jk_j}\right)$$

(a_{jk_j} — корни ортогональных полиномов);

$$H'_{q_j}\left(a_{jk_j}\right) = \left.\frac{dH_{q_j}\left(a_j\right)}{da_j}\right|_{a_j = a_{jk_j}}.$$

Суммирование в выражении (5) осуществляется по всем возможным комбинациям индексов $k_1, k_2, \ldots, k_m$. В этом случае полином $\tilde{v}(\mathbf{A})$ проходит через все узлы интерполяции.

Осреднение выражения (5) с учетом формулы (4) дает математическое ожидание параметра качества

$$m_v \cong \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_m = 1}^{q_1, q_2, \ldots, q_m} v(a_{1k_1}, a_{2k_2}, \ldots, a_{mk_m}) \prod_{j=1}^{m} \rho_{k_j},$$

где ρ_{k_j} — математические ожидания полиномов, построенных на каждой из m координат вектора $\mathbf{A}$ и называемых числами Кристоффеля,

$$\rho_{k_j} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_{q_j}\left(a_j\right) f_j\left(a_j\right) da_j}{H'_{q_j}\left(a_{jk_j}\right)\left(a_j - a_{jk_j}\right)}.$$

Числа Кристоффеля зависят от узлов интерполяции и для наиболее распространенных законов распределения вычислены и затабулированы вместе с узлами соответствующих ортогональных полиномов [10, 12].

Аналогично можно определить любую моментную характеристику и интегральный закон распределения $F(v) = P(V < v)$. Рассмотрим характеристическую функцию

$$\chi = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{V - v}{|V - v|}\right]. \qquad (6)$$

Из формулы (6) следует, что

$$\chi = \begin{cases} 1 & \text{при } V \le v; \\ 0 & \text{при } V > v. \end{cases}$$

Поэтому математическое ожидание

$$M[\chi] = 1 \cdot P(V \le v) + 0 \cdot P(V > v) = P(V \le v).$$

Следовательно, $M[\chi] = F(v)$.

Теперь, если представить $\chi(\mathbf{A})$ в форме интерполяционного полинома по аналогии с выражением (5) и взять математическое ожидание, то получим

$$F(v) = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_m = 1}^{q_1, q_2, \ldots, q_m} \frac{1}{2}\left[1 - \frac{v(a_{1k_1}, a_{2k_2}, \ldots, a_{mk_m}) - v}{\left|(a_{1k_1}, a_{2k_2}, \ldots, a_{mk_m}) - v\right|}\right] \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{m} \rho_{k_j}. \qquad (7)$$

Как уже отмечалось, необходимо задействовать очень большое количество узлов даже при умеренных требованиях к точности расчета и небольшой размерности вектора $\mathbf{A}$. Общее количество узлов, в которых надо вычислить значение v,

$$\eta = \prod_{j=1}^{m} q_j. \qquad (8)$$

Допустим, что $q_j = 5, \forall j, m = 10$. Тогда потребное количество узлов η, т. е. количество решений уравнения (1), составит приблизительно 10^7.

Решение стохастической задачи. Задача определения вероятности попадания параметров качества в заданные области радикально упрощается, т. е. объем вычислений сокращается на порядки, если ограничиться получением приближенной информации. Во многих практических случаях ее оказывается достаточно для оценки функциональности системы.

Построим верхнюю и нижнюю оценки искомых вероятностей. Для этого необходимо использовать допущение, которое широко применяется в параметрическом анализе, когда вариации параметров (детерминированных и случайных) можно считать достаточно малыми. Допустим, что определенная характеристика (например, параметр качества) является гладкой нелинейной функцией векторного аргумента $v(\mathbf{A})$. Тогда справедливо разложение параметра качества в ряд Тейлора в окрестности математического ожидания. При этом очень часто вследствие достаточной малости вариаций $a_i, \forall i$ относительно номинальных значений ограничиваются линейным приближением

$$\nu(A) \cong \nu(M_A) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i^0,$$

где $\alpha_i, \forall i$ — функции чувствительности первого порядка; a_i^0 — относительный случайный параметр, нормированный по его значению.

Таким образом, влияние случайных разбросов отдельных параметров на общий результат рассматривается изолированно. Если производные не существуют (нелинейные характеристики имеют особенности), а зависимости аппроксимируются интерполяционными полиномами, то такое автономное рассмотрение остается правомерным, поскольку существо задачи не меняется. Это тем более справедливо, так как соотношения, получаемые полиномиальной интерполяцией, являются аналитическими. По этой причине считаем, что влияние достаточно малых вариаций $a_i, \forall i$ на $\nu(\mathbf{A})$ происходит независимо друг от друга.

Воспользуемся этим известным допущением и обозначим: $P(|\nu(\mathbf{A}^0)| \le \nu_0) = P$, P_-, P_+ ($\mathbf{A}^0 = (a_1^0, a_2^0, ..., a_m^0)^{\mathrm{T}}$ — вектор нормированных значений случайных параметров; P_- и P_+ — нижняя и верхняя оценки вероятности P); $P(|\nu(a_j^0)| \le \nu_0) = P_j$, $\forall j$. Допустим, получена выборка $\nu(\mathbf{A}^0)$ величиной r. При этом оказалось, что по каждой переменной a_j^0 число d_j реализаций не попало в допустимую область.

Обозначим множество этих реализаций U_j, $\forall j$. Тогда, если множества не пересекаются, т. е. $U_i \cap U_j = \varnothing, \forall i \ne j$, число реализаций $\nu(\mathbf{A}^0)$, не попавших в допустимую область, будет максимальным, что соответствует минимальной вероятности P.

Следовательно, нижняя оценка вероятности

$$P_- = 1 - \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{m} d_j = 1 - \sum_{j=1}^{m} \overline{P}_j,$$

где $\overline{P}_j$ — вероятность противоположного события.

Тогда

$$P_- = \sum_{j=1}^{m} P_j - m + 1. \qquad (9)$$

Для получения верхней оценки вероятности допустим, что $d_k > d_j$ и $U_j \in U_k, \forall j \ne k$, а значит,

$$\overline{P}_k = \max_j \overline{P}_j \quad \text{и} \quad P_+ = 1 - \lim_{r\to\infty} \frac{d_k}{m} = 1 - \max_j \overline{P}_j.$$

Окончательно имеем

$$P_+ = \min_j P_j. \qquad (10)$$

Зависимости, аналогичные выражениям (9) и (10), получены в работах [14, 15] для оценки вероятности попадания случайного вектора в многомерную область по совокупности вероятностей попадания элементов вектора в свои одномерные области. Оценки использовались для приближенного вычисления надежности. Заметим, что нижняя оценка непосредственно следует из свойства полуаддитивности вероятности. Оценки близки между собой, а следовательно, и к вероятности P при ее достаточной близости к единице. При малых значениях P точность неудовлетворительна.

Используем формулы (9), (10) для оценок искомых вероятностей $P(|\nu| \le \nu_0)$, $P(\nu_1 \le \nu \le \nu_2)$. Для этого выразим одномерные функции распределения $F^{(j)}(\nu)$ для каждого элемента a_j в отдельности как частный случай формулы (7):

$$F^{(j)}(\nu) = \sum_{k_j=1}^{q_j} \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\nu(a_{k_j}) - \nu}{|\nu(a_{k_j}) - \nu|}\right]\rho_{k_j}. \qquad (11)$$

Из формулы (11) несложно получить плотность вероятности. Тогда искомые вероятности примут вид

$$P^{(j)}\left(|\nu| \le \nu_0\right) = F^{(j)}(\nu_0) - F^{(j)}(-\nu_0). \qquad (12)$$

В результате имеем следующие оценки вероятностей:

$$\begin{cases} P_-\left(|\nu| \le \nu_0\right) = \sum\limits_{j=1}^{m} P^{(j)}\left(|\nu| \le \nu_0\right) - m + 1; \\ P_+\left(|\nu| \le \nu_0\right) = \min\limits_j P^{(j)}\left(|\nu| \le \nu_0\right). \end{cases} \qquad (13)$$

Для нахождения оценок вероятностей (13) требуется вычислить значения ν в количестве узлов

$$\eta = \sum_{j=1}^{m} q_j.$$

Таким образом, при $q_j = 5, \forall j$, $m = 10$ количество узлов будет равно 50. Для ранее рассмотренного примера с использованием общей формулы (8) это количество было 10^7, т. е. значительно больше.

Вероятности попадания параметров качества в допустимые границы для реальных технических объектов должны быть близки к единице. Это очевидное обстоятельство позволяет эффективно использовать полученные оценки. Допустим, что найденное значение верхней оценки оказалось низким (система «плохая»). Тогда не имеет смысла уточнять решение, а следует вносить существенные изменения в саму систему.

Если нижняя оценка достаточно близка к единице, то система гарантированно функциональна. Таким образом, используя оценки, практически всегда можно сделать аргументированное заключение о функциональности системы. Иерархия степени влияния каждого из разбросов параметров выявляется сравнением вероятностей (12).

Пример. В качестве примера рассмотрим динамическую модель системы с двумя степенями свободы (рис. 1). Значения детерминированных параметров: массы $m_1 = 10$ кг и $m_2 = 7$ кг; коэффициент демпфирования $\alpha = 5{,}0 \cdot 10^2$ Н/м; сила, действующая на первую массу при ее движении относительно неподвижного основания, $G = 0{,}001$ Н.

Нелинейная характеристика опоры первой массы сепарабельна и записана в виде

$$\varphi(x_1, \dot{x}_1) = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(\dot{x}_1)\,.$$

Здесь

$$\varphi_1(x_1) = \begin{cases} c_1(x_1 - d) & \text{при } x_1 > d; \\ 0 & \text{при } |x_1| \le d, \\ c_1(x_1 + d) & \text{при } x_1 < -d, \end{cases}$$

$$\varphi_2(\dot{x}_1) = G \operatorname{sign} \dot{x}_1;$$

где c_1 — жесткость первой упругой связи между неподвижной опорой и массой m_1; d — люфт нелинейной характеристики.

Внешнее воздействие $g(t) = h \cdot 1(t-0)$, где h — интенсивность внешнего воздействия; $1(t-0)$ — функция Хевисайда.

Значения жесткостей первой c_1 и второй c_2 упругих связей, люфта нелинейной характеристики d и интенсивности внешнего воздействия h имеют нормальный закон распределения с заданными математическими ожиданиями и средними квадратическими отклонениями (см. таблицу).

Для определения вероятности попадания максимальной амплитуды колебаний первой

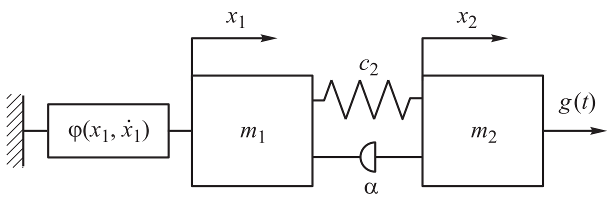

Рис. 1. Модель системы с двумя степенями свободы: x_1 и x_2 — перемещения масс m_1 и m_2

массы $x_{1\max}$ в заданную область использован интерполяционный метод.

Предварительно проведен анализ сходимости решения при увеличении числа узлов интерполяции по каждому из случайных параметров. На рис. 2 приведена функция плотности вероятности максимальной амплитуды колебаний первой массы $f_h(x_{1\max})$ по параметру h. Видно, что при количестве узлов $q = 5$ и $q = 7$ зависимости близки; при $q = 13$ результат практически совпадает с полученным при $q = 7$, поэтому на рисунке не показан. По другим параметрам результаты аналогичны.

Целью расчета являлось определение области случайного разброса значений максимальной амплитуды колебаний первой массы в окрестности среднего значения. В первом варианте границы области задавались значением $v_0 = 0{,}018$. Вероятность попадания в область, вычисленная по формуле (7), составила 0,531. Оценка точности формулы (7) при $q_j = 7, \forall j$ выполнена путем сравнения с результатом, полученным методом Монте-Карло с числом реализаций $2 \cdot 10^4$. Ошибка не превысила 2,5 %. Нижняя $P_-(|v| \le 0{,}018) = 0{,}353$ и верхняя $P_+(|v| \le 0{,}018) = 0{,}624$ оценки вероятности, полученные по формуле (13), также указывают на низкую вероятность попадания в область.

Второй вариант расчета проведен для границ со значением $v_0 = 0{,}020$, т. е. для увеличенной примерно на 10 % области случайного разброса значений амплитуды колебаний первой массы. Вероятность, вычисленная по формуле (7), равна 0,989, т. е. близка к единице. Нижняя $P_-(|v| \le 0{,}018) = 0{,}983$ и верхняя

Значения математического ожидания и среднего квадратического отклонения параметров системы

Параметр	Математическое ожидание	Среднее квадратическое отклонение
Жесткость первой c_1 / второй c_2 упругой связи, Н/м	$1{,}5 \cdot 10^4 / 1{,}0 \cdot 10^4$	1000/300
Люфт нелинейной характеристики d, м	$3{,}0 \cdot 10^{-3}$	$2{,}0 \cdot 10^{-4}$
Интенсивность внешнего воздействия h, Н	100	7

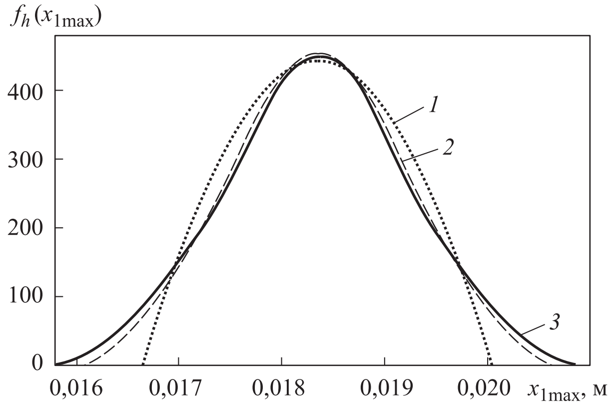

Рис. 2. Функция плотности вероятности максимальной амплитуды колебаний первой массы $f_h(x_{1\max})$ при количестве узлов q = 3 (*1*), 5 (*2*) и 7 (*3*)

$P_+(|\nu| \le 0{,}018) = 0{,}992$ оценки вероятности, полученные по формуле (13), также близки к единице.

Это свидетельствует о том, что значение $\nu_0 = 0{,}020$ можно рассматривать в качестве допустимых границ области случайного разброса значений амплитуды колебаний первой массы. Для модели количество реализаций, вычисленных по формуле (8), составило 2401. Применение оценок дало возможность ограничиться значительно меньшим числом реализаций, равным 28. Очевидно, что переход к более сложным динамическим моделям будет сопровождаться увеличением трудоемкости каждой реализации. При этом эффективность предложенной методики должна возрастать.

Выводы

1. Разработанные методика и алгоритм позволяют на порядки снизить трудоемкость стохастического анализа динамических моделей конструкций летательных аппаратов.

2. Расчетная методика применима для решения нелинейных задач динамики конструкций, математические модели которых могут содержать не дифференцируемые функции вследствие наличия особенностей типа разрывов или изломов.

3. Алгоритм параметрического анализа позволяет выявить иерархию влияния случайного разброса каждого параметра на динамические характеристики конструкции и имеет простую численную реализацию.

Литература

[1] Безмозгий И.М., Бобылев С.С., Софинский А.Н., Чернягин А.Г. Нагружение и прочность конструкций транспортного космического корабля при воздействии отсечки тяги двигателя третьей ступени ракеты-носителя. *Космическая техника и технологии*, 2017, № 2(17), с. 63–79.

[2] Бармин И.В., Зверев В.А., Украинский А.Ю., Языков А.В. Расчетный анализ процессов отвода конструкций стартовой системы, находящихся под воздействием струй двигателей ракеты-носителя «Союз». *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2011, № 1, с. 31–39.

[3] Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. *Теория вероятностей и ее инженерные приложения*. Москва, Академия, 2003. 464 с.

[4] Михайлов Г.А., Войтишек А.В. *Численное стохастическое моделирование. Метод Монте-Карло*. Москва, Академия, 2006. 368 с.

[5] Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. *Чувствительность систем управления*. Москва, Наука, 1981. 456 с.

[6] Аринчев С.В., Федюшкин А.С. Чувствительность вынужденных колебаний рамы с несбалансированным ротором к вариациям жесткостей раскрепления. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2016, № 4 (673), с. 92–104.

[7] Хог Э., Чой К., Комков В. *Анализ чувствительности при проектировании конструкций*. Москва, Мир, 1988. 428 с.

[8] Тушев О.Н., Березовский А.В. Чувствительность спектральных характеристик конечно-элементных моделей конструкций ракетно-космической техники. *Оборонная техника*, 2007, № 3–4, с. 87–93.

[9] Коростылев А.В., Тушев О.Н. К задаче определения параметрической чувствительности динамических систем. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2005, № 3, с. 34–41.

[10] Чернецкий В.И. *Анализ точности нелинейных систем управления*. Москва, Машиностроение, 1968. 247 с.

[11] Перов С.Н., Скворцов Ю.В. Представление случайных процессов с помощью неканонического разложения. *Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение*, 2008, № 1(14), с. 226–235.

[12] Доступов Б.Г., ред. *Статистические методы в проектировании нелинейных систем автоматического управления*. Москва, Машиностроение, 1970. 405 с.

[13] Болотин В.В., ред. *Вибрации в технике. Справочник. Т. 1: Колебания линейных систем*. Москва, Машиностроение, 1999. 504 с.

[14] Тушев О.Н., Беляев А.В. Оптимизация технических характеристик пневмогидравлических амортизаторов из условия максимума надежности механической системы. *Инженерный вестник. МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2013, № 6. URL: http://engsi.ru/doc/597480.html (дата обращения 10 января 2018).

[15] Tushev O.N., Sichev M.P. Approximate target functionals in problems of parametric optimization of damping systems with presence random factor. *Dynamic Strength and Wear-Resistance of Machines*, 2001, vol. 8, pp. 8–16.

References

[1] Bezmozgii I.M., Bobylev S.S., Sofinskii A.N., Cherniagin A.G. Nagruzhenie i prochnost' konstruktsii transportnogo kosmicheskogo korablia pri vozdeistvii otsechki tiagi dvigatelia tret'ei stupeni rakety-nositelia [The effect of thrust cut-off of the third stage of the launch vehicle on the loading and strength of the transport cargo vehicle structure]. *Kosmicheskaia tekhnika i tekhnologii* [Space technique and technologies]. 2017, no. 2(17), pp. 63–79.

[2] Barmin I.V., Zverev V.A., Ukrainskii A.Iu., Iazykov A.V. Raschetnyi analiz protsessov otvoda konstruktsii startovoi sistemy, nakhodiashchikhsia pod vozdeistviem strui dvigatelei rakety-nositelia «Soiuz» [Design Analysis of Processes of Withdrawal of Launch System Structures Subjected to Action of Rocket Exhaust Jets of Soyuz Launch Vehicle]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Mechanical Engineering]. 2011, no. 1, pp. 31–39.

[3] Venttsel' E.S., Ovcharov L.A. *Teoriia veroiatnostei i ee inzhenernye prilozheniia* [Probability theory and its engineering applications]. Moscow, Akademiia publ., 2003. 464 p.

[4] Mikhailov G.A., Voitishek A.V. *Chislennoe stokhasticheskoe modelirovanie. Metod Monte-Karlo* [Numerical stochastic simulation. Monte Carlo method]. Moscow, Akademiia publ., 2006. 368 p.

[5] Rozenvascer E.N., Iusupov R.M. *Chuvstvitel'nost' sistem upravleniia* [Sensitivity of control systems]. Moscow, Nauka publ., 1981. 456 p.

[6] Arinchev S.V., Fediushkin A.S. Chuvstvitel'nost' vynuzhdennykh kolebanii ramy s nesbalansirovannym rotorom k variatsiiam zhestkostei raskrepleniia [Sensitivity of Forced Vibrations of the Frame with an Unbalanced Rotor to the Variations of Bracing Stiffness]. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Mashinostroenie* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building]. 2016, no. 4 (673), pp. 92–104.

[7] Khog E., Choi K., Komkov V. *Analiz chuvstvitel'nosti pri proektirovanii konstruktsii* [The sensitivity analysis for the design of structures]. Moscow, Mir publ., 1988. 428 p.

[8] Tushev O.N., Berezovskii A.V. Chuvstvitel'nost' spektral'nykh kharakteristik konechnoelementnykh modelei konstruktsii raketno-kosmicheskoi tekhniki [Sensitivity of spectral characteristics of finite-element models of rocket and space technology constructions]. *Oboronnaia tekhnika* [Defence equipment]. 2007, no. 3–4, pp. 87–93.

[9] Tushev O.N., Korostylev A.V. K zadache opredeleniia parametricheskoi chuvstvitel'nosti dinamicheskikh system [Determination of parametric sensitivity of dynamical systems]. *Izvestiia RAN. Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids]. 2005, no. 3, pp. 34–41.

[10] Chernetskii V.I. *Analiz tochnosti nelineinykh sistem upravleniia* [Accuracy analysis of nonlinear control systems]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1968. 247 p.

[11] Perov S.N., Skvortsov Iu.V. Predstavlenie sluchainykh protsessov s pomoshch'iu nekanonicheskogo razlozheniia [Random process presentation by non-canonical decomposition]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Aerokosmicheskaia tekhnika, tekhnologii i mashinostroenie* [Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering]. 2008, no. 1(14), pp. 226–235.

[12] *Statisticheskie metody v proektirovanii nelineinykh sistem avtomaticheskogo upravleniia* [Statistical methods in the design of nonlinear automatic control systems]. Ed. Dostupov B.G. Moscow, Mashinostroenie publ., 1970. 405 p.

[13] *Vibratsii v tekhnike. Spravochnik. vol. 1. Kolebaniia lineinykh system* [Vibrations in technology. Handbook. Vol. 1. Oscillations of linear systems]. Ed. Bolotin V.V. Moscow, Mashinostroenie publ., 1999. 504 p.

[14] Tushev O.N., Beliaev A.V. Optimizatsiia tekhnicheskikh kharakteristik pnevmogidravlicheskikh amortizatorov iz usloviia maksimuma nadezhnosti mekhanicheskoi sistemy. *Inzhenernyi vestnik. MGTU im. N.E. Baumana* [Engineering bulletin. BMSTU]. 2013, no. 6. Available at: http://engsi.ru/doc/597480.html (accessed 10 January 2018).

[15] Tushev O.N., Sychev M.P. Approximate target functionals in problems of parametric optimization of damping systems with presence random factor. *Dynamic Strength and Wear-Resistance of Machines*, 2001, vol. 8, pp. 8–16.

Статья поступила в редакцию 19.04.2018

Информация об авторах

ТУШЕВ Олег Николаевич (Москва) — доктор технических наук, профессор кафедры «Аэрокосмические системы». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: kafsm2@bmstu.ru).

ЮНАК Екатерина Владимировна (Реутов) — инженер. АО «ВПК «НПО Машиностроения» (143966, Реутов, Московская обл., Российская Федерация, ул. Гагарина, д. 33, e-mail: yunak.ev@gmail.com).

БЕЛЯЕВ Александр Владимирович (Москва) — кандидат технических наук, доцент кафедры «Аэрокосмические системы». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: beliaev@bmstu.ru).

Information about the authors

TUSHEV Oleg Nicolaevich (Moscow) — Doctor of Science (Eng.), Professor, Aerospace Systems Department. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: tushev@bmstu.ru).

YUNAK Ekaterina Vladimirovna (Reutov) — Engineer. Military and Industrial Corporation AO NPO Mashinostroyeniya (143966, Reutov, Moscow region, Russian Federation, Gagarin St., Bldg. 33, e-mail: yunak.ev@gmail.com).

BELYAEV Aleksandr Vladimirovich (Moscow) — Candidate of Science (Eng.), Associate Professor, Aerospace Systems Department. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: beliaev@bmstu.ru).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Тушев О.Н., Юнак Е.В., Беляев А.В. Оценка влияния случайного разброса параметров на динамику конструкций с использованием интерполяционного метода. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2018, № 9, с. 82–90, doi: 10.18698/0536-1044-2018-9-82-90.

Please cite this article in English as:

Tushev O.N., Yunak E.V., Belyaev A.V. An Assessment of the Influence of Random Deviation of Parameters on the Dynamic Characteristics Using the Interpolation Method. *Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2018, no. 9, pp. 82–90, doi: 10.18698/0536-1044-2018-9-82-90.