

Машиностроение и машиноведение

УДК 621.3.045.57

DOI: 10.18698/0536-1044-2018-10-4-17

Об обкатке статора ротором со многими степенями свободы вследствие трения^{*}

А.Н. Никифоров

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, 101990, Москва, Российская Федерация, Малый Харитоньевский пер., д. 4

On the Full Annular Rub in the Flexible Rotor — Compliant Stator System due to Friction

A.N. Nikiforov

Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, 101990, Moscow, Russian Federation, Maliy Kharitonievskiy Lane, Bldg. 4



e-mail: n.andre@mail.ru



Смоделирован осесимметричный гибкий ротор, который обкатывает податливый изотропный статор с проскальзыванием между ними. Используются три конечных элемента: вращающийся балочный, жесткий диск и линеаризованная опора. Трение в системе рассмотрено как совокупность трех компонентов — контактной, гистерезисной и вязкой. Статор принят жестко- или упругозакрепленным. Матричными методами определены угловая скорость и амплитуда роторной прецессии. Показано, что угловая скорость обкатки зависит от коэффициентов конструкционного и контактного трения и всегда несколько ниже той или иной собственной частоты ротора, опирающегося на статор. Предложенная математическая модель соответствует многим реальным роторным машинам, в частности турбированным и скважинным (нефтяным) насосным агрегатам.

Ключевые слова: система ротор — статор, контактная роторная динамика, обратная прецессия, частота и амплитуда колебаний



This paper describes a model of axisymmetric flexible rotor that slip-rolls a compliant isotropic stator. Three finite elements are used: rotating beam, rigid disk, and linear bearing. Friction in the system is considered as an aggregate of three components: contact friction, hysteretic and viscous damping. The stator is assumed to be fixed or mounted on elastic supports. Angular velocity and amplitude of rotor precession are determined by the matrix methods. It is shown that the angular velocity of the slip-roll depends on the coefficients of structural and contact friction. It is always lower than any given eigen frequency of the rotor leaning on the stator. The developed mathematical model corresponds to a large number of real rotor machines, for instance turbo- and oil-well pumps.

Keywords: rotor-stator system, contact rotor dynamics, backward precession, frequency and amplitude of vibration

* Работа выполнена в рамках проекта РФФИ №18-08-00171_a.

Большая часть проблем, вызванных вибрацией вала или ротора, связана с разрушительным влиянием на систему статора.

Цель и оригинальность работы — определение возникающих при контакте сил нормального давления и сухого/полусухого трения через гармонические перемещения, скорости и ускорения, т. е. через уравнения нормальных колебаний, системы гибкий ротор — податливый статор.

Рассмотрена как система гибкий ротор — упругие подшипники — фундамент (далее роторная система), так и система гибкий ротор — упругие подшипники — жесткий статор — упругие опоры — фундамент (далее роторно-статорная система). Причем если в системе есть непосредственный контакт между гибким ротором и податливым статором, представляемый в виде дополнительной линейно-упругой связи (пружины) жесткостью k_k , то такая система называется контактной, в противном случае — бесконтактной.

Традиционно исследователи определяли контактные силы либо динамикой податливого ротора, опертого на жесткий статор [1–5], либо жесткостью и демпфированием податливого статора [6–13], нормальная реакция которого в месте контакта имеет линейную [6–8], нелинейную [9–11] или обобщенную (в виде гистерезисной петли) характеристику. В последнем случае учитываются деформация статора и ее направление [12, 13], а также пластический эффект [13] на пути нагрузка — разгрузка. В некоторых работах [9–12] под статорной податливостью понимается в том числе и перемещение статора на упругодемпферных опорах.

Существующие модели с жестким статором не позволяют исследовать влияние на систему

его перемещений как упругого и твердого тела, а также виброударные движения системы на основе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Недостатками моделей с заданной упруго-диссипативной характеристикой статора $N = N(\epsilon, \dot{\epsilon})$ (N — контактная сила нормального давления; ϵ и $\dot{\epsilon}$ — деформация и ее скорость), являются эмпирические или теоретические коэффициенты. Например, в широко применяемой модифицированной модели Герца с вязкой компонентой, устраненным «прилипанием» и коэффициентом восстановления, не зависящим от скорости сближения тел, $N = k_k \epsilon^\nu + d_k \epsilon^w \dot{\epsilon}$, где $\nu = 3/2$; d_k — константа, определяющая значение ньютоновского коэффициента восстановления, контактная жесткость k_k зависит от материалов тел и формы их поверхностей в области контакта.

В подобных моделях возникает проблема достоверного получения контактно-динамических характеристик системы, в частности максимальных ускорений ротора. Поэтому следует уделять отдельное внимание анализу корректности задания упругой компоненты характеристики статора и добиваться приемлемой точности принятой модели с помощью подбора параметров вязкой компоненты. Некорректный выбор параметров компонент может привести к физически неверным результатам, например, к ньютоновскому коэффициенту восстановления больше единицы.

Моделирование системы гибкий ротор — податливый статор. Для исследования динамики ротора, контактирующего со статором, необходимо построить колебательную модель, имеющую две степени свободы или больше, т. е.

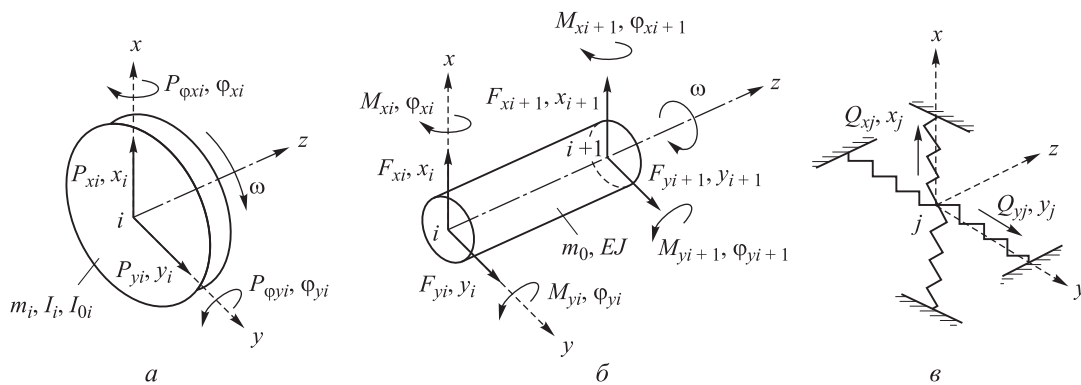


Рис. 1. Конечные элементы ротора: а — жесткий диск; б — балочный элемент; в — линеаризованная короткая опора

содержащую несколько инерционных, упругих и демпфирующих элементов.

Роторная система или ситуация жесткозакрепленного статора. Любую осесимметричную роторную систему выгодно (поскольку просто, в том числе с точки зрения выполнения достаточно точных расчетов) представлять в виде комбинации следующих трех конечных элементов (рис. 1).

1. Жесткий диск с сосредоточенными массой m_i , поперечным I_i и полярным I_{0i} моментами инерции. Уравнение двумерного движения такого диска, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω , в неподвижной системе отсчета и матричной форме [14] имеет вид

$$\begin{bmatrix} [m_d] & [0] \\ [0] & [m_d] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{x}\} \\ \{\ddot{y}\} \end{Bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} [0] & [g_d] \\ -[g_d] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{x}\} \\ \{\dot{y}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_x\} \\ \{f_y\} \end{Bmatrix},$$

где

$$[m_d] = \begin{bmatrix} m_i & 0 \\ 0 & I_i \end{bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{y\} \end{Bmatrix} = \{x_i \quad \varphi_{yi} \quad y_i \quad \varphi_{xi}\}^T,$$

x_i , y_i и φ_{yi} , φ_{xi} — поступательные и угловые перемещения узла i ;

$$[g_d] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{0i} \end{bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \{f_x\} \\ \{f_y\} \end{Bmatrix} = \{P_{xi} \quad P_{\varphi yi} \quad P_{yi} \quad P_{\varphi xi}\}^T,$$

P_{xi} , P_{yi} и $P_{\varphi yi}$, $P_{\varphi xi}$ — обобщенные силы в узле i .

2. Вращающийся балочный элемент длиной l , радиусом r , с погонной массой m_0 , изгибной жесткостью EJ и внутренним трением гистерезисного типа. Уравнение движения такого балочного элемента в матричной форме [15, 16]:

$$\begin{bmatrix} [m] & [0] \\ [0] & [m] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{x}\} \\ \{\ddot{y}\} \end{Bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} [0] & [g] \\ -[g] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{x}\} \\ \{\dot{y}\} \end{Bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} [k] & [0] \\ [0] & [k] \end{bmatrix} + \frac{\eta_h}{\sqrt{1+\eta_h^2}} \begin{bmatrix} [0] & [k] \\ -[k] & [0] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{y\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_x\} \\ \{f_y\} \end{Bmatrix}.$$

В этом уравнении:

$$[m] = [m_t] + [m_r];$$

$$\begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{y\} \end{Bmatrix} = \{x_i \quad \varphi_{yi} \quad x_{i+1} \quad \varphi_{yi+1} \quad y_i \quad \varphi_{xi} \quad y_{i+1} \quad \varphi_{xi+1}\}^T;$$

* Поперечные колебания роторов совершаются в форме круговой или эллиптической прецессии, поэтому необходимо учитывать обобщенные силы и перемещения роторных элементов в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

$$[g] = 2[m_r]; \quad [k] = \frac{EJ}{l^3(1+s)} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & c_{10} & -6l & c_{11} \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & c_{11} & -6l & c_{10} \end{bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} \{f_x\} \\ \{f_y\} \end{Bmatrix} = \{F_{xi} \quad M_{yi} \quad F_{xi+1} \quad M_{yi+1} \quad F_{yi} \quad M_{xi} \quad F_{yi+1} \quad M_{xi+1}\}^T,$$

где

$$[m_t] = \frac{m_0 l}{420(1+s)^2} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_2 & c_5 & -c_4 & c_6 \\ c_3 & -c_4 & c_1 & -c_2 \\ c_4 & c_6 & -c_2 & c_5 \end{bmatrix};$$

$$[m_r] = \frac{m_0 r^2}{120l(1+s)^2} \begin{bmatrix} 36 & c_7 & -36 & c_7 \\ c_7 & c_8 & -c_7 & c_9 \\ -36 & -c_7 & 36 & -c_7 \\ c_7 & c_9 & -c_7 & c_8 \end{bmatrix};$$

$$c_1 = 156 + 294s + 140s^2 \quad \left(s = \frac{12EJ}{0,9G\pi r^2 l^2}, G \approx 0,4E \right);$$

$$c_2 = (22 + 38,5s + 17,5s^2)l; \quad c_3 = 54 + 126s + 70s^2;$$

$$c_4 = -(13 + 31,5s + 17,5s^2)l; \quad c_5 = (4 + 7s + 3,5s^2)l^2;$$

$$c_6 = -(3 + 7s + 3,5s^2)l^2; \quad c_7 = (3 - 15s)l;$$

$$c_8 = (4 + 5s + 10s^2)l^2; \quad c_9 = -(1 + 5s - 5s^2)l^2;$$

$$c_{10} = (4 + s)l^2; \quad c_{11} = (2 - s)l^2;$$

x_i , y_i и φ_{yi} , φ_{xi} — поступательные и угловые перемещения i -го узла; x_{i+1} , y_{i+1} и φ_{yi+1} , φ_{xi+1} — поступательные и угловые перемещения $(i+1)$ -го узла; F_{xi} , F_{yi} и M_{yi} , M_{xi} — обобщенные силы и моменты в i -м узле; F_{xi+1} , F_{yi+1} и M_{yi+1} , M_{xi+1} — обобщенные силы и моменты в $(i+1)$ -м узле; η_h — коэффициент гистерезисных потерь в материале балки.

Любой из элементов матриц этого уравнения является обобщенной силой в узле i , возникающей от единичного(ой) ускорения (скорости) или перемещения в этом или $(i+1)$ -м узле.

В данном общем случае вращающийся элемент представляет собой балку Тимошенко, т. е. наряду с классическими процессами упругости (подматрица $[k]$) и инерции прецессии, включающими в себя поступательные перемещения (подматрица $[m_t]$) и гироскопическое действие (подматрица $[g]$), учитываются инерция вращения (подматрица $[m_r]$, добавляемая к $[m_t]$) и деформация сдвига (s -члены). Если отношение длины элемента к его диаметру $l/(2r)$ больше единицы и меньше трех, то допустимо (с точки зрения сохранения высокой точности расчетов)

пренебречь влиянием деформации сдвига (использовать балку Релея). Если $l/(2r) > 3$, то можно рассматривать элемент без инерции вращения (т. е. балку Бернулли — Эйлера).

Принято, что балочный элемент обладает диссипацией, не зависящей от частоты. Напряжение опережает соответствующую деформацию на угол ϕ , определяемый материалом. Петля гистерезиса в плоскости напряжения — деформация повторяет эллипс, площадь которого, пропорциональная $\sin \phi$ характеризует значение рассеянной энергии, так что $\sin \phi = \eta_h / \sqrt{1 + \eta_h^2}$.

3. Линеаризованная короткая опора с изотропной поперечной жесткостью k_b и нулевой угловой жесткостью, а также с вязким демпфированием, выраженным коэффициентом η_v , и гистерезисными потерями в материале(ах) подшипника, определяемыми коэффициентом η_{hb} . Уравнение движения такой опоры имеет вид

$$\begin{bmatrix} \eta_v k_b & 0 \\ 0 & \eta_v k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_j \\ \dot{y}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_b & \eta_{hb} k_b \\ -\eta_{hb} k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{xj} \\ Q_{yj} \end{Bmatrix},$$

где x_j, y_j и Q_{xj}, Q_{yj} — перемещения узла j и обобщенные силы в нем.

В общем виде подшипник, препятствуя также угловым перемещениям ротора, определяется 16 коэффициентами жесткости и 16 коэффициентами неупругого сопротивления, пропорционального скоростям поперечно-угловых деформаций. Угловые коэффициенты оказываются существенными для жесткого ротора, а также для гибкого ротора при высших формах колебаний. Однако в таких случаях так называемые длинные подшипники часто заменяют парой близкорасположенных коротких подшипников.

Как правило, заметную роль играют только радиальные коэффициенты:

$$\begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_j \\ \dot{y}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{xj} \\ Q_{yj} \end{Bmatrix},$$

где c_{xx}, c_{yy} и c_{xy}, c_{yx} — главные и побочные коэффициенты вязкого демпфирования; k_{xx}, k_{yy} и k_{xy}, k_{yx} — главные и побочные коэффициенты жесткости.

Но даже в такой классической модели подшипника используются не все радиальные ко-

эффициенты. Существенные значения побочных коэффициентов жесткости k_{xy}, k_{yx} (относительно главных k_{xx}, k_{yy}) и вязкого демпфирования c_{xy}, c_{yx} (относительно c_{xx}, c_{yy}) характерны для подшипника жидкостного трения.

Вместе с тем следует учитывать, что обычно такой подшипник весьма не консервативен, т. е. его матрица жесткости значительно асимметрична [17, 18]. Разность побочных коэффициентов жесткости $\Delta k_{ij} = k_{xy} - k_{yx}$ определяет направление действия циркуляционной результирующей на ротор, что в случае немалости Δk_{ij} по сравнению с главными коэффициентами жесткости приводит к циркуляции (прецессии) ротора: обратной (при $k_{xy} < k_{yx}$) или прямой (при $k_{xy} > k_{yx}$). Последнее непосредственно связано с возникновением явления динамической неустойчивости ротора на подшипниках жидкостного трения (в виде его значительной прямой асинхронной прецессии).

Подшипник с равными главными коэффициентами жесткости ($k_{xx} = k_{yy}$) и малыми по сравнению с ними побочными коэффициентами жесткости ($k_{xy} \approx k_{yx} \approx 0$) называют изотропным; подшипник с равными главными, а также с немалыми и почти одинаковыми побочными коэффициентами жесткости ($k_{xy} \approx k_{yx} \neq 0$) — ортотропным, подшипник с неравными главными ($k_{xx} \neq k_{yy}$) и близкими побочными ($k_{xy} \approx k_{yx}$) коэффициентами жесткости — анизотропным, а подшипник с неравными побочными коэффициентами ($k_{xy} \neq k_{yx}$) — неконсервативным.

Следует отметить, что место непосредственного контакта ротора со статором формально аналогично короткой опоре, лишенной вязкого трения:

$$\begin{bmatrix} k_k & \eta_{hk} k_k \\ -\eta_{hk} k_k & k_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_k \\ y_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{xk} \\ Q_{yk} \end{Bmatrix},$$

где η_{hk} — коэффициент гистерезисных потерь в материалах контактных поверхностей ротора и статора.

Так как сцепление роторных элементов выполняется в осевом направлении, переход от местных координат элементов к общим координатам роторной системы тривиален. Он не содержит геометрических преобразований и сводится к простому последовательному нумерованию обобщенных перемещений/сил. Правило составления роторной системы таково, что если два элемента связаны, то перемещения смежных концов должны быть равны, а

соответствующие обобщенные силы должны суммироваться. Эта методика, называемая сборкой элементов, так или иначе приведена в любом пособии по матричному структурному анализу.

Конечным результатом является система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$[M]_{2n \times 2n} \{\ddot{q}\}_{2n \times 1} + [C]_{2n \times 2n} \{\dot{q}\}_{2n \times 1} + [K]_{2n \times 2n} \{q\}_{2n \times 1} = \{F\}_{2n \times 1}, \quad (1)$$

где

$$[M]_{2n \times 2n} = \begin{bmatrix} [M] + [M_d] & [0] \\ [0] & [M] + [M_d] \end{bmatrix},$$

$[M_d]$ — подматрица инерции дисков;

$$[C]_{2n \times 2n} = \begin{bmatrix} \eta_v [K_b] & \omega [G] + \omega [G_d] \\ -\omega [G] - \omega [G_d] & \eta_v [K_b] \end{bmatrix},$$

$[K_b]$, $[G]$ и $[G_d]$ — подматрицы соответственно жесткости подшипников, гироскопических моментов балочных элементов и дисков;

$$[K]_{2n \times 2n} = \begin{bmatrix} [K] + [K_b] & \eta_h [K] + \eta_{hb} [K_b] \\ -\eta_h [K] - \eta_{hb} [K_b] & [K] + [K_b] \end{bmatrix},$$

$[K]$ — подматрица жесткости балочных элементов;

$$\{q\}_{2n \times 1} = \begin{Bmatrix} \{q_x\} \\ \{q_y\} \end{Bmatrix},$$

$\{q_x\}$, $\{q_y\}$ — векторы обобщенных координат;

$$\{F\}_{2n \times 1} = \begin{Bmatrix} \{F_x\} \\ \{F_y\} \end{Bmatrix},$$

$\{F_x\}$, $\{F_y\}$ — векторы обобщенных сил.

Число степеней свободы в плоскости n равно $2p$, где p — число узлов, а $(p - 1)$ — число балочных элементов. Векторы порядка $n \times 1$ образуются из совершаемых в плоскости поступательных и угловых перемещений узлов или из действующих в плоскости на отдельные узлы компонентов внешних сил, среди которых

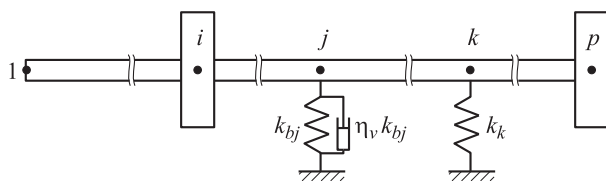


Рис. 2. Произвольная роторная система и ее p узлов

могут быть и контактные. Подматрицы размером $n \times n$ означают сборку из подматриц или из констант конечных элементов.

Подматрицы инерции $[M]$, гироскопических моментов $[G]$ и жесткости $[K]$ балочных элементов являются ленточными:

$$[C]_{n \times n} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} + c_{11} & c_{34} + c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} + c_{21} & c_{44} + c_{22} & c_{23} & c_{24} & \dots \\ 0 & 0 & c_{31} & c_{32} & c_{33} + c_{11} & c_{34} + c_{12} \\ 0 & 0 & c_{41} & c_{42} & c_{43} + c_{21} & c_{44} + c_{22} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

где под каждым двузначным индексом понимается номер строки и номер столбца матриц $[m]$, $[g]$ и $[k]$.

Инерционная $[M_d]$ и гироскопическая $[G_d]$ подматрицы дисков, а также подматрица жесткости подшипников $[K_b]$ имеют диагональный вид $[\cdot]_{n \times n}$, поэтому их объединение с подматрицами балочных элементов можно выразить как

$$[C]_{n \times n} + [\cdot]_{n \times n} = \begin{bmatrix} \dots & & & & & & \\ \dots & c_{2i-1 2i-1} + C_i & & & & & \\ & & c_{2i 2i} + C_{i+1} & & & & \\ & & & \dots & & & \\ & & & & c_{2j-1 2j-1} + C_j & & \\ & & & & & \dots & \\ & & & & & & c_{2k-1 2k-1} + C_k \\ & & & & & & \dots \end{bmatrix},$$

где каждому двузначному индексу соответствуют номера строки и столбца объединенных матриц, которые определяются тем или иным номером узла; C_i — константа, равная m_i ; C_{i+1} — константа, равная I_i или I_{0i} ; C_j — константа, равная k_{bj} ; C_k — константа, равная k_k .

Константа C_k добавляется в матрицу жесткости роторной системы $[K]_{n \times n} = [K] + [K_b]$, когда k -е или/и другое сечение гибкого ротора контактирует с упругой поверхностью неподвижного статора (рис. 2). Получаемая матрица жесткости контактной роторной системы далее обособляется тильдой $[\tilde{K}]_{n \times n} = [K] + [K_b] + [K_k]$, где $[K_k]$ — k -заполненная диагональная матрица, k — количество мест контакта.

Так как система осесимметричная, допустимо использование более компактной формы выражения (1) за счет объединения матричных уравнений:

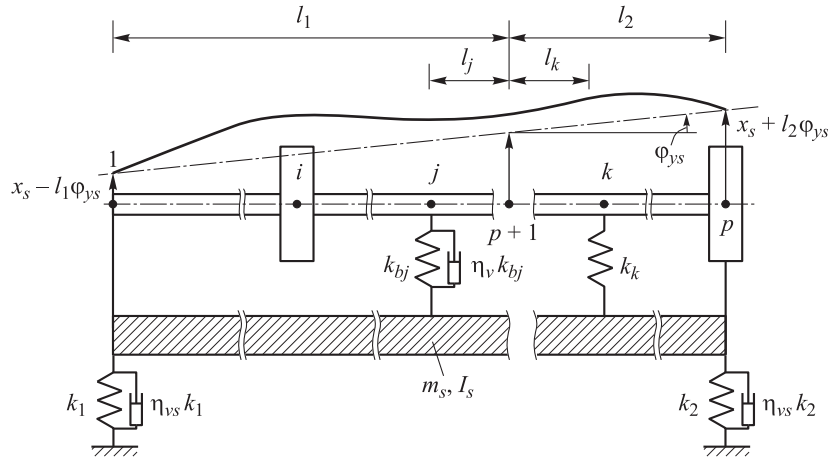


Рис. 3. Произвольная роторно-статорная система и ее $p + 1$ узлов

$$\begin{aligned}
 & [M]_{n \times n} \{\dot{q}_x\} + \eta_v [K_b] \{\dot{q}_x\} + \omega [G] \{\dot{q}_y\} + \\
 & + [K]_{n \times n} \{q_x\} + (\eta_h [K] + \eta_{hb} [K_b]) \{q_y\} = \{F_x\}; \\
 & i[M]_{n \times n} \{\dot{q}_y\} + i\eta_v [K_b] \{\dot{q}_y\} - i\omega [G] \{\dot{q}_x\} + \\
 & + i[K]_{n \times n} \{q_y\} - i(\eta_h [K] + \eta_{hb} [K_b]) \{q_x\} = i\{F_y\},
 \end{aligned}$$

где $[M]_{n \times n} = [M] + [M_d]$; $[G] = [G] + [G_d]$; i — мнимая единица.

В результате, определяя перемещения в плоскости xz действительными величинами, а перемещения в плоскости yz мнимыми, т. е. рассматривая векторы комплексных обобщенных координат $\{q\}_{n \times 1} = \{q_x\} + i\{q_y\}$ и сил $\{F\}_{n \times 1} = \{F_x\} + i\{F_y\}$, получим

$$\begin{aligned}
 & [M]_{n \times n} \{\dot{q}\}_{n \times 1} + (\eta_v [K_b] - i\omega [G]) \{\dot{q}\}_{n \times 1} + \\
 & + \langle [K]_{n \times n} - i(\eta_h [K] + \eta_{hb} [K_b]) \rangle \{q\}_{n \times 1} = \{F\}_{n \times 1}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

В приведенных уравнениях перемещения элементов считаются малыми (гироскопические моменты и позиционные силы линеаризованы). Хотя теория ограничивается малыми амплитудами (колебаний элементов), она дает удивительно хорошие результаты для больших амплитуд (колебаний ротора в целом). При этом основное правило простое — число используемых балочных элементов должно на единицу превышать номер наивысшей интересующей частоты и формы собственных колебаний ротора. Достаточность малого числа степеней свободы для точного моделирования объясняется слабой зависимостью динамической реакции ротора от его высших форм колебаний.

Роторно-статорная система или ситуация упругозакрепленного статора. При моделировании практически применяемой осесимметричной статорной подсистемы, т. е. состоящей

из сравнительно жесткого* и в то же время равножесткого корпуса, а также из нежестких и вместе с тем равножестких элементов крепления к фундаменту, достаточно выбрать ее дискретное представление в виде сосредоточенных в $(p + 1)$ -м узле массы m_s и момента инерции относительно поперечных осей I_s с линейными связями, в том числе с упругодемпферными опорами суммарной в плоскости жесткостью $k_s = k_1 + k_2$ и общим для той же плоскости коэффициентом вязкого демпфирования $\eta_{vs} k_s = \eta_{vs} k_1 + \eta_{vs} k_2$ (рис. 3).

Пусть координатами центра инерции статора являются $x_s, y_s, \phi_{ys}, \phi_{xs}$ и его поступательные/угловые колебания как отдельного твердого тела на податливых опорах малы. Тогда уравнения его движения в поперечных направлениях и вокруг центра инерции (точки $p + 1$) примут вид:

$$\begin{aligned}
 & m_s \ddot{x}_s + \eta_{vs} k_1 (\dot{x}_s - l_1 \dot{\phi}_{ys}) + \eta_{vs} k_2 (\dot{x}_s + l_2 \dot{\phi}_{ys}) + \\
 & + k_1 (x_s - l_1 \phi_{ys}) + k_2 (x_s + l_2 \phi_{ys}) = 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & m_s \ddot{y}_s + \eta_{vs} k_1 (\dot{y}_s - l_1 \dot{\phi}_{xs}) + \eta_{vs} k_2 (\dot{y}_s + l_2 \dot{\phi}_{xs}) + \\
 & + k_1 (y_s - l_1 \phi_{xs}) + k_2 (y_s + l_2 \phi_{xs}) = 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & I_s \ddot{\phi}_{ys} - \eta_{vs} k_1 (\dot{x}_s - l_1 \dot{\phi}_{ys}) l_1 + \eta_{vs} k_2 (\dot{x}_s + l_2 \dot{\phi}_{ys}) l_2 - \\
 & - k_1 (x_s - l_1 \phi_{ys}) l_1 + k_2 (x_s + l_2 \phi_{ys}) l_2 = 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & I_s \ddot{\phi}_{xs} - \eta_{vs} k_1 (\dot{y}_s - l_1 \dot{\phi}_{xs}) l_1 + \eta_{vs} k_2 (\dot{y}_s + l_2 \dot{\phi}_{xs}) l_2 - \\
 & - k_1 (y_s - l_1 \phi_{xs}) l_1 + k_2 (y_s + l_2 \phi_{xs}) l_2 = 0.
 \end{aligned}$$

* Обычно в роторных машинах жесткость статора на отклонение его поперечных сечений от плоскостей, перпендикулярных оси вращения недеформированного ротора, превышает по меньшей мере в 2 раза жесткость ротора на изгиб.

Очевидно, такой подход обеспечивает наименьшее число необходимых степеней свободы роторно-статорной системы, и системные векторы и матрицы будут следующими:

$$\begin{aligned} \{q_x\}_{n+2 \times 1} &= \begin{Bmatrix} \{q_x\} \\ x_s \\ \varphi_{ys} \end{Bmatrix}; \quad \{q_y\}_{n+2 \times 1} = \begin{Bmatrix} \{q_y\} \\ y_s \\ \varphi_{xs} \end{Bmatrix}; \\ \{F_x\}_{n+2 \times 1} &= \begin{Bmatrix} \{F_x\} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \{F_y\}_{n+2 \times 1} = \begin{Bmatrix} \{F_y\} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \\ [M]_{n+2 \times n+2} &= \begin{bmatrix} [M]_{n \times n} & & \\ & m_s & \\ & & I_s \end{bmatrix}; \\ \omega[G]_{n+2 \times n+2} &= \omega \begin{bmatrix} [G] & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}; \\ \eta_h[K]_{n+2 \times n+2} &= \eta_h \begin{bmatrix} [K] & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}; \\ \eta_{hb}[K_b]_{n+2 \times n+2} &= \eta_{hb} \begin{bmatrix} [K_b] & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}; \\ \eta_v[K_b]_{n+2 \times n+2} &= \\ = \eta_v \begin{bmatrix} [K_b] & \dots & & \\ \dots & k_{2(p+1)-1 2(p+1)-1} & k_{2(p+1)-1 2(p+1)} & \\ & k_{2(p+1) 2(p+1)-1} & k_{2(p+1) 2(p+1)} & \\ \dots & & & \dots \end{bmatrix} = \\ = \eta_v \begin{bmatrix} \dots & & & \\ k_{bj} & & -k_{bj} & \\ \dots & & & \\ -k_{bj} & k_{2(p+1)-1 2(p+1)-1} & k_{2(p+1)-1 2(p+1)} & \\ & k_{2(p+1) 2(p+1)-1} & k_{2(p+1) 2(p+1)} & \end{bmatrix}; \quad (3a) \\ [\tilde{K}]_{n+2 \times n+2} &= \\ = \begin{bmatrix} [\tilde{K}] & \dots & & \\ \dots & k_{2(p+1)-1 2(p+1)-1} & k_{2(p+1)-1 2(p+1)} & \\ & k_{2(p+1) 2(p+1)-1} & k_{2(p+1) 2(p+1)} & \\ \dots & & & \dots \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \dots & & & \\ k_{2j-1 2j-1} + k_{bj} & & & -k_{bj} \\ \dots & & & \\ & k_{2k-1 2k-1} + k_k & & -k_k \\ \dots & & & \\ -k_{bj} & -k_k & k_{2(p+1)-1 2(p+1)-1} & k_{2(p+1)-1 2(p+1)} \\ & & k_{2(p+1) 2(p+1)-1} & k_{2(p+1) 2(p+1)} \end{bmatrix}, \quad (36) \end{aligned}$$

где матрица $[K]_{n+2 \times n+2}$ отличается от матрицы $[\tilde{K}]_{n+2 \times n+2}$ тем, что в первой $k_k = 0$.

В матрице (3а):

$$k_{2(p+1)-1 2(p+1)-1} = \frac{\eta_{vs}}{\eta_v} k_1 + \frac{\eta_{vs}}{\eta_v} k_2 + k_{bj} + \dots;$$

$$k_{2(p+1)-1 2(p+1)} = k_{2(p+1) 2(p+1)-1} =$$

$$= \frac{\eta_{vs}}{\eta_v} k_2 l_2 - \frac{\eta_{vs}}{\eta_v} k_1 l_1 - k_{bj} l_j + \dots;$$

$$k_{2(p+1) 2(p+1)} = \frac{\eta_{vs}}{\eta_v} k_1 l_1^2 + \frac{\eta_{vs}}{\eta_v} k_2 l_2^2 + k_{bj} l_j^2 + \dots.$$

В матрице (3б):

$$k_{2(p+1)-1 2(p+1)-1} = k_1 + k_2 + k_{bj} + k_k + \dots;$$

$$k_{2(p+1)-1 2(p+1)} = k_{2(p+1) 2(p+1)-1} =$$

$$= k_2 l_2 - k_1 l_1 + k_k l_k - k_{bj} l_j + \dots;$$

$$k_{2(p+1) 2(p+1)} = k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 + k_{bj} l_j^2 + k_k l_k^2 + \dots.$$

Реакция осесимметричной системы гибкий ротор — податливый статор на контакт.

Уравнения (1) и (2) можно использовать для определения реакции прецессирующего ротора на контактные силы. Пусть правую часть (1) или (2) образуют только компоненты контактных сил, приложенные к k -й точке бесконтактной системы (рис. 4) и провоцирующие обратную прецессию:

$$F_{xk} = -N \cos \psi + T \sin \psi;$$

$$F_{yk} = -N \sin \psi - T \cos \psi;$$

$$F_{xk} + i F_{yk} = -(N + iT) e^{i\psi},$$

$$F_{xi \neq k} = F_{yi \neq k} = 0.$$

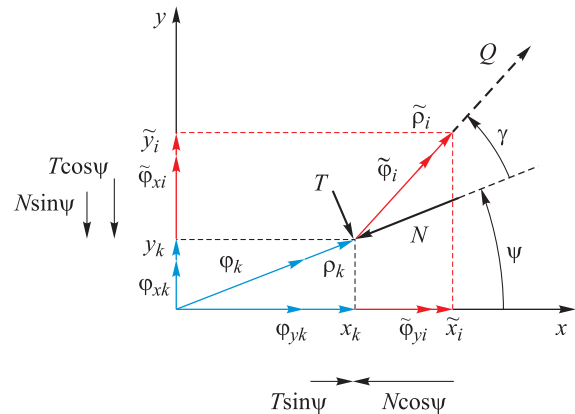


Рис. 4. Перемещения k -го узла бесконтактной (—) и i -го узла контактной (—) системы гибкий ротор — податливый статор:

N и $T = \mu N$ — контактные силы нормального давления и сухого трения ($\mu = \operatorname{tg} \gamma$), а также проекции этих сил, нагружающие бесконтактную систему;

Q — результирующая контактных сил, нагружающая контактную систему

Математические преобразования будут компактнее, если исходить из уравнения движения бесконтактной системы (2):

$$\begin{aligned}
 & [M]\{\dot{q}\} + (\eta_v[K_b] - i\omega[G])\{\dot{q}\} + \\
 & \langle [K] - i(\eta_h[K] + \eta_{hb}[K_b]) \rangle \{q\} = \\
 & = -(\{f_N\} + i\{f_T\})e^{i\psi}, \quad (4a)
 \end{aligned}$$

где $\{f_N\} = \{N\}^T$; $\{f_T\} = \{T\}^T$.

Правая часть уравнения движения контактной системы содержит те же силы, но противоположного знака (здесь по-прежнему тильда указывает на перемещения и жесткость контактной системы):

$$\begin{aligned}
 & [M]\{\ddot{\tilde{q}}\} + (\eta_v[K_b] - i\omega[G])\{\dot{\tilde{q}}\} + \\
 & + \langle [\tilde{K}] - i(\eta_h[K] + \eta_{hb}[K_b] + \eta_{hk}[K_k]) \rangle \{\tilde{q}\} = \\
 & = (\{f_N\} + i\{f_T\})e^{i\psi}. \quad (4б)
 \end{aligned}$$

Движение предполагается установившимся, обратным и круговым, $\psi = -\Omega t$ (Ω — угловая частота обкатки ротором статора, t — время), поэтому решения имеют вид

$$\{q\} = \{A\}e^{-i\Omega t}; \quad \{\tilde{q}\} = \{\tilde{A}\}e^{i(\gamma - \Omega t)},$$

где $\{A\}$ и $\{\tilde{A}\}$ — действительные, положительные и постоянные амплитуды; $A_i = \rho_i$ ($A_{i+1} = \varphi_i$) — прогиб (поворот) i -го сечения бесконтактной системы (см. рис. 4), $\tilde{A}_i = \tilde{\rho}_i$ ($\tilde{A}_{i+1} = \tilde{\varphi}_i$) — прогиб (поворот) i -го сечения контактной системы.

После подстановки этих соотношений в уравнения (4) можно получить

$$\begin{aligned}
 & \langle \Omega^2[M] + \Omega\omega[G] - [K] + i\Omega\eta_v[K_b] + \\
 & + i(\eta_h[K] + \eta_{hb}[K_b]) \rangle \{A\} = \{f_N\} + i\{f_T\}; \\
 & \langle [\tilde{K}] - \Omega^2[M] - \Omega\omega[G] - i\Omega\eta_v[K_b] - \\
 & - i(\eta_h[K] + \eta_{hb}[K_b] + \eta_{hk}[K_k]) \rangle \{\tilde{A}\}e^{i\gamma} = \\
 & = \{f_N\} + i\{f_T\}. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Если пренебречь гироскопическим влиянием и трением, то

$$\begin{aligned}
 & (\Omega^2[M] - [K])\{A\} = \{f_N\}; \\
 & ([\tilde{K}] - \Omega^2[M])\{\tilde{A}\} = \{f_N\}. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Отсюда следует фундаментальное уравнение безотрывного скольжения ротора по статору (важно обратить внимание, что движение не обязательно обратное вследствие квадрата Ω):

$$(\Omega^2[M] - [K])\{A\} = ([\tilde{K}] - \Omega^2[M])\{\tilde{A}\}. \quad (7a)$$

Это уравнение линейное, поэтому $\{A\}$ и $\{\tilde{A}\}$ могут быть умножены на любой масштабный коэффициент и заменены на некоторые известные $\{A\}_i$ и $\{\tilde{A}\}_j$ соответственно:

$$(\Omega^2[M] - [K])\{A\}_i = ([\tilde{K}] - \Omega^2[M])\{\tilde{A}\}_j. \quad (7б)$$

По сути, выражение (7а), как и (7б), определяет радиусы орбит кругового движения сечений ротора относительно радиального зазора $\delta = R - r$ (r и R — радиусы поверхностей ротора и статора в месте их контакта).

Пусть $\{A\}_i = \{A_{(1)} \dots A_{(2k-1)} \dots\}_i^T$ — вектор известных узловых перемещений, соответствующих i -й собственной форме бесконтактной системы $\{u\}_i = \{u_{(1)} \dots u_{(2k-1)} \dots\}_i^T$ и касанию k -го сечения ротора с поверхностью статора. Тогда, с одной стороны, будет выполнено условие бесконтактной системы $N = 0$, а с другой — станет возможным определение амплитуды i -й моды a_i при касании ротором статора по зазору δ в k -м месте:

$$\begin{aligned}
 a_i u_{(1)i} &= A_{(1)i}; \\
 & \dots \\
 a_i u_{(2k-1)i} &= A_{(2k-1)i} = \delta; \\
 & \dots
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$a_i = \frac{\delta}{u_{(2k-1)i}}.$$

То, что формулы (7а) и (7б) альтернативны друг другу, можно показать следующим образом. Из исходного уравнения (7а) очевидно, что реакция (действительные перемещения узлов) системы на контактную нагрузку представляет собой суперпозицию (наложение друг на друга) форм собственных колебаний бесконтактной и контактной систем:

$$\{A\} = \sum_{v=1}^h \{u\}_v a_v; \quad \{\tilde{A}\} = \sum_{w=1}^h \{\tilde{u}\}_w \tilde{a}_w, \quad (8)$$

где $\{u\}_v$ и a_v — вектор безразмерных (относительных) узловых перемещений и определяющее амплитуду (главное) перемещение узлов для v -й собственной частоты/формы бесконтактной системы; $\{\tilde{u}\}_w$ и \tilde{a}_w — модальные перемещения узлов для w -й собственной частоты/формы контактной системы; h — число рассматриваемых мод.

При этом $\{A\} + \{\tilde{A}\}$ — полные перемещения узлов контактной системы.

После подстановки выражений (8) в матричные уравнения (6), преобразования каждого из них к приведенному виду, т. е. умножения слева на $[M]^{-1}$, а также после левого умножения их на «резонирующую» и характерную форму колебаний $\{u\}_i^T$ или $\{\tilde{u}\}_j^T$ (что представляет собой частотно-избирательный отклик колебательной системы на периодическое внешнее воздействие, который проявляется ростом амплитуды характерных для данной системы колебаний при приближении частоты внешнего воздействия к одной из собственных частот) получаем

$$\begin{aligned} \{u\}_i^T (\Omega^2 \mathbf{E} - \mathbf{D}) \sum_{v=1}^h \{u\}_v a_v &= \{u\}_i^T [M]^{-1} \{f_N\}; \\ \{\tilde{u}\}_j^T (\tilde{\mathbf{D}} - \Omega^2 \mathbf{E}) \sum_{w=1}^h \{\tilde{u}\}_w \tilde{a}_w &= \{\tilde{u}\}_j^T [M]^{-1} \{f_N\}, \end{aligned}$$

где \mathbf{E} — единичная матрица; $\mathbf{D} = [M]^{-1}[K]$; $\tilde{\mathbf{D}} = [M]^{-1}[\tilde{K}]$.

Из условия ортогональности собственных форм колебаний (которое можно объяснить как равенство нулю сил инерции i -й формы колебаний на перемещениях v -й формы колебаний) следует, что

$$\begin{aligned} \{u\}_i^T \mathbf{E} \{u\}_v &= 0; \quad \{u\}_i^T \mathbf{D} \{u\}_v = 0; \\ \{\tilde{u}\}_j^T \mathbf{E} \{\tilde{u}\}_w &= 0; \quad \{\tilde{u}\}_j^T \tilde{\mathbf{D}} \{\tilde{u}\}_w = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Поэтому остаются лишь члены при $i = v$ и $j = w$:

$$\begin{aligned} \{u\}_i^T (\Omega^2 \mathbf{E} - \mathbf{D}) \{u\}_i a_i &= \{u\}_i^T [M]^{-1} \{f_N\}; \\ \{\tilde{u}\}_j^T (\tilde{\mathbf{D}} - \Omega^2 \mathbf{E}) \{\tilde{u}\}_j \tilde{a}_j &= \{\tilde{u}\}_j^T [M]^{-1} \{f_N\}. \end{aligned}$$

Использование соотношений $\{u\}_i a_i = \{A\}_i$ и $\{\tilde{u}\}_j \tilde{a}_j = \{\tilde{A}\}_j$ позволяет вернуться к альтернативной записи (7б) фундаментального уравнения (7а).

Нормирование по матрице масс (приведение к единичной инерционной матрице) дает

$$\begin{aligned} \{u\}_i^T \mathbf{E} \{u\}_i &= 1; \quad \{u\}_i^T \mathbf{D} \{u\}_i = \lambda_i^2; \\ \{\tilde{u}\}_j^T \mathbf{E} \{\tilde{u}\}_j &= 1; \quad \{\tilde{u}\}_j^T \tilde{\mathbf{D}} \{\tilde{u}\}_j = \tilde{\lambda}_j^2, \end{aligned} \quad (10)$$

где λ_i и $\tilde{\lambda}_j$ — i -я и j -я круговые собственные частоты бесконтактной и контактной систем (здесь по определению невращающихся).

В результате имеют место соотношения

$$\frac{\{u\}_i^T [M]^{-1} \{f_N\}}{(\Omega^2 - \lambda_i^2) a_i} = 1; \quad \frac{\{\tilde{u}\}_j^T [M]^{-1} \{f_N\}}{(\tilde{\lambda}_j^2 - \Omega^2) \tilde{a}_j} = 1.$$

Приравняем их:

$$(\Omega^2 - \lambda_i^2) a_i \{u\}_i^T = (\tilde{\lambda}_j^2 - \Omega^2) \tilde{a}_j \{\tilde{u}\}_j^T.$$

Умножив справа на $\{u\}_i$, сведем это равенство к отношению

$$\tilde{a}_j = \frac{\Omega^2 - \lambda_i^2}{\tilde{\lambda}_j^2 - \Omega^2} \Delta_{ji} a_i, \quad (11)$$

где $\Delta_{ji} = \{\tilde{u}\}_j^T \{u\}_i$ — коэффициент суперпозиции мод (наложения j -й характерной формы опирания на i -ю характерную форму касания без взаимного влияния друг на друга).

Так как $\{f_N\} > 0$, на основании выражений (6) должно быть

$$\begin{aligned} \Omega^2 [M] \{A\} &> [K] \{A\}; \\ [\tilde{K}] \{\tilde{A}\} &> \Omega^2 [M] \{\tilde{A}\}. \end{aligned}$$

Подставляя в эти неравенства соотношения (8), умножая слева на $[M]^{-1}$, а также на $\{u\}_i^T$ и $\{\tilde{u}\}_j^T$ с учетом соотношений (9), получаем

$$\begin{aligned} \Omega^2 \{u\}_i^T \mathbf{E} \{u\}_i &> \{u\}_i^T \mathbf{D} \{u\}_i; \\ \{\tilde{u}\}_j^T \tilde{\mathbf{D}} \{\tilde{u}\}_j &> \Omega^2 \{\tilde{u}\}_j^T \mathbf{E} \{\tilde{u}\}_j. \end{aligned}$$

В результате использования соотношений (10) и объединения неравенств имеем

$$\lambda_i < |\Omega| < \tilde{\lambda}_j. \quad (12)$$

Отношение (11) описывает реакцию невращающейся недемпфированной системы гибкий ротор — податливый статор на установившийся контакт, что возможно при выполнении условия существования или устойчивости безотрывного движения (скольжения) ротора по статору (12).

В случае зависимости частот и форм собственных колебаний $\lambda_{\omega i}$, $\{u_{\omega}\}_i$ и $\tilde{\lambda}_{\omega j}$, $\{\tilde{u}_{\omega}\}_j$ от скорости вращения (когда учитываются эффекты вращения: гироскопическое действие, внутреннее, внешнее и контактное трение) «гироскопический вклад» и «вклад трения» могут быть проанализированы по отдельности. Это допустимо ввиду пренебрежимо слабого влияния трения на собственные частоты и формы колебаний.

Влияние трения на обкатывание ротором статора. Возвращаясь к уравнениям обратного безотрывного движения ротора по статору (5) без учета гироскопических моментов и разделяя вещественные и мнимые части, получаем

$$\begin{aligned}
 &(\Omega^2[M] - [K])\{A\} = \{f_N\}; \\
 &(\eta_h[K] + \eta_{hb}[K_b] + \Omega\eta_v[K_b])\{A\} = \{f_T\}; \\
 &([\tilde{K}] - \Omega^2[M])\{\tilde{A}\} \cos \gamma + (\eta_h[K] + \eta_{hb}[K_b] + \\
 &+ \eta_{hk}[K_k] + \Omega\eta_v[K_b])\{\tilde{A}\} \sin \gamma = \{f_N\}; \\
 &-(\eta_h[K] + \eta_{hb}[K_b] + \eta_{hk}[K_k] + \Omega\eta_v[K_b]) \times \\
 &\times \{\tilde{A}\} \cos \gamma + ([\tilde{K}] - \Omega^2[M])\{\tilde{A}\} \sin \gamma = \{f_T\}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Очевидным и ожидаемым фактом является то, что сила нормального давления $\{f_N\}$ содействует силам упругости $[K]\{A\}$ ротора, который условно не опирается на статор, а силы трения $(\eta_h[K] + \eta_{hb}[K_b] + \Omega\eta_v[K_b])\{A\}$ противодействуют силе (уравновешивают ее) контактного трения $\{f_T\}$. Однако результирующая контактных сил

$$\{f_Q\} = \frac{1}{\cos \gamma} \{f_N\} \frac{Q}{N} \{f_N\} - \frac{1}{\sin \gamma} \{f_T\} = \frac{Q}{T} \{f_T\}$$

противоположна восстанавливающим силам $[\tilde{K}]\{\tilde{A}\}$ опирающегося ротора, т. е. сила Q по отношению к нему является возмущающей.

Если разложить бесконтактные $\{A\}$ и контактные $\{\tilde{A}\}$ решения по собственным формам и перейти к модальным перемещениям, т. е. если подставить равенства (8) в матричные уравнения (13), а затем умножить полученные уравнения слева на $[M]^{-1}$, а также на характерные формы $\{u\}_i^T$ и $\{\tilde{u}\}_j^T$, то получим:

$$\begin{aligned}
 &\{u\}_i^T (\Omega^2 \mathbf{E} - \mathbf{D}) \sum_{v=1}^h \{u\}_v a_v = \{u\}_i^T [M]^{-1} \{f_N\}; \\
 &\{u\}_i^T (\eta_h \mathbf{S} + \eta_{hb} \mathbf{S}_b + \Omega \eta_v \mathbf{S}_b^*) \sum_{v=1}^h \{u\}_v a_v = \\
 &= \{u\}_i^T [M]^{-1} \{f_T\}; \\
 &\{\tilde{u}\}_j^T (\tilde{\mathbf{D}} - \Omega^2 \mathbf{E}) \sum_{w=1}^h \{\tilde{u}\}_w \tilde{a}_w \cos \gamma + \\
 &+ \{\tilde{u}\}_j^T (\eta_h \mathbf{S} + \eta_{hb} \mathbf{S}_b + \eta_{hk} \mathbf{S}_k + \Omega \eta_v \mathbf{S}_b^*) \times \\
 &\times \sum_{w=1}^h \{\tilde{u}\}_w \tilde{a}_w \sin \gamma = \{\tilde{u}\}_j^T [M]^{-1} \{f_N\}; \\
 &-\{\tilde{u}\}_j^T (\eta_h \mathbf{S} + \eta_{hb} \mathbf{S}_b + \eta_{hk} \mathbf{S}_k + \Omega \eta_v \mathbf{S}_b^*) \times \\
 &\times \sum_{w=1}^h \{\tilde{u}\}_w \tilde{a}_w \cos \gamma + \{\tilde{u}\}_j^T (\tilde{\mathbf{D}} - \Omega^2 \mathbf{E}) \times \\
 &\times \sum_{w=1}^h \{\tilde{u}\}_w \tilde{a}_w \sin \gamma = \{\tilde{u}\}_j^T [M]^{-1} \{f_T\},
 \end{aligned}$$

где $\mathbf{S} = [M]^{-1}[K]$; $\mathbf{S}_b = \mathbf{S}_b^* = [M]^{-1}[K_b]$; при колебаниях статора как твердого тела $\mathbf{S}_b^* \neq \mathbf{S}_b$, так

как соответствующая матрица вязкого сопротивления (3а) изменяется; $\mathbf{S}_k = [M]^{-1}[K_k]$.

Собственные векторы динамических матриц ортогональны, поэтому выполняются равенства (9), (10) и следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 &\{\tilde{u}\}_j^T \mathbf{S} \{\tilde{u}\}_w = 0, \quad \{\tilde{u}\}_j^T \mathbf{S}_b \{\tilde{u}\}_w = 0, \quad \{\tilde{u}\}_j^T \mathbf{S}_k \{\tilde{u}\}_w = 0, \\
 &\{\tilde{u}\}_j^T \mathbf{S} \{\tilde{u}\}_j = \tilde{s}_j; \quad \{\tilde{u}\}_j^T \mathbf{S}_b \{\tilde{u}\}_j = \tilde{s}_{bj}; \quad \{\tilde{u}\}_j^T \mathbf{S}_k \{\tilde{u}\}_j = \tilde{s}_{kj}; \\
 &\{u\}_i^T \mathbf{S} \{u\}_v = 0, \quad \{u\}_i^T \mathbf{S}_b \{u\}_v = 0, \\
 &\{u\}_i^T \mathbf{S} \{u\}_i = s_i; \quad \{u\}_i^T \mathbf{S}_b \{u\}_i = s_{bi},
 \end{aligned}$$

где $\tilde{s}_j, \tilde{s}_{bj}$ (или $\tilde{s}_{bj}^* = \{\tilde{u}\}_j^T \mathbf{S}_b^* \{\tilde{u}\}_j$) и \tilde{s}_{kj} — собственное число вращающихся роторных деталей, подшипников (или опор, в том числе статорных) и контакта для j -й формы колебаний контактной системы; s_i и s_{bi} (или $s_{bi}^* = \{u\}_i^T \mathbf{S}_b^* \{u\}_i$) — собственное число вращающихся роторных деталей и подшипников (или опор, в том числе статорных) для i -й формы колебаний бесконтактной системы.

Как следствие, система уравнений обкатывания упрощается:

$$\begin{aligned}
 &\frac{\{u\}_i^T [M]^{-1} \{f_N\}}{(\Omega^2 - \lambda_i^2) a_i} = 1; \\
 &\frac{\{\tilde{u}\}_j^T [M]^{-1} \{f_N\}}{(\tilde{\lambda}_j^2 - \Omega^2) \tilde{a}_j \cos \gamma + \tilde{\epsilon}_\eta \tilde{a}_j \sin \gamma} = 1; \\
 &\frac{\{u\}_i^T [M]^{-1} \{f_T\}}{\epsilon_\eta a_i} = 1; \\
 &\frac{\{\tilde{u}\}_j^T [M]^{-1} \{f_T\}}{-\tilde{\epsilon}_\eta \tilde{a}_j \cos \gamma + (\tilde{\lambda}_j^2 - \Omega^2) \tilde{a}_j \sin \gamma} = 1,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \epsilon_\eta &= \eta_h s_i + \eta_{hb} s_{bi} + \eta_v s_{bi}^* \Omega; \\
 \tilde{\epsilon}_\eta &= \eta_h \tilde{s}_j + \eta_{hb} \tilde{s}_{bj} + \eta_{hk} \tilde{s}_{kj} + \tilde{\eta}_v \tilde{s}_{bj}^* \Omega.
 \end{aligned}$$

Исключив $\{f_N\}$ и $\{f_T\}$ из этих отношений, получаем

$$\begin{aligned}
 &(\tilde{\lambda}_j^2 - \Omega^2) \tilde{a}_j \{u\}_i^T \cos \gamma + \tilde{\epsilon}_\eta \tilde{a}_j \{u\}_i^T \sin \gamma = \\
 &= (\Omega^2 - \lambda_i^2) a_i \{\tilde{u}\}_j^T; \\
 &-\tilde{\epsilon}_\eta \tilde{a}_j \{u\}_i^T \cos \gamma + (\tilde{\lambda}_j^2 - \Omega^2) \tilde{a}_j \{u\}_i^T \sin \gamma = \epsilon_\eta a_i \{\tilde{u}\}_j^T.
 \end{aligned}$$

После умножения справа на $\{u\}_i$ имеем

$$\begin{aligned}
 &(\tilde{\lambda}_j^2 - \Omega^2) \tilde{a}_j \cos \gamma + \tilde{\epsilon}_\eta \tilde{a}_j \sin \gamma = (\Omega^2 - \lambda_i^2) \Delta_{ji} a_i; \\
 &-\tilde{\epsilon}_\eta \tilde{a}_j \cos \gamma + (\tilde{\lambda}_j^2 - \Omega^2) \tilde{a}_j \sin \gamma = \epsilon_\eta \Delta_{ji} a_i.
 \end{aligned}$$

Неизвестные амплитудные множители $\tilde{a}_j \cos \gamma$ и $\tilde{a}_j \sin \gamma$ найдем из отношений

$$\tilde{a}_j \cos \gamma = \Delta_{ji} a_i \frac{\begin{vmatrix} \Omega^2 - \lambda_i^2 & \tilde{\varepsilon}_\eta \\ \varepsilon_\eta & \tilde{\lambda}_j^2 - \Omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \tilde{\lambda}_j^2 - \Omega^2 & \tilde{\varepsilon}_\eta \\ -\tilde{\varepsilon}_\eta & \tilde{\lambda}_j^2 - \Omega^2 \end{vmatrix}};$$

$$\tilde{a}_j \sin \gamma = \Delta_{ji} a_i \frac{\begin{vmatrix} \tilde{\lambda}_j^2 - \Omega^2 & \Omega^2 - \lambda_i^2 \\ -\tilde{\varepsilon}_\eta & \varepsilon_\eta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \tilde{\lambda}_j^2 - \Omega^2 & \tilde{\varepsilon}_\eta \\ -\tilde{\varepsilon}_\eta & \tilde{\lambda}_j^2 - \Omega^2 \end{vmatrix}}.$$

Отсюда вследствие малости произведения $\varepsilon_\eta \times \tilde{\varepsilon}_\eta$ и квадратов ε_η^2 и $\tilde{\varepsilon}_\eta^2$:

$$\tilde{a}_j \approx \frac{\Omega^2 - \lambda_i^2}{\tilde{\lambda}_j^2 - \Omega^2} \Delta_{ji} a_i;$$

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \frac{\begin{vmatrix} \tilde{\lambda}_j^2 - \Omega^2 & \Omega^2 - \lambda_i^2 \\ -\tilde{\varepsilon}_\eta & \varepsilon_\eta \end{vmatrix}}{(\Omega^2 - \lambda_i^2)(\tilde{\lambda}_j^2 - \Omega^2)}.$$

То есть неизвестная Ω определяется уравнением четвертой степени

$$\Omega^4 + \frac{\tilde{\varepsilon}_v - \varepsilon_v}{\mu} \Omega^3 - \left(\lambda_i^2 + \tilde{\lambda}_j^2 - \frac{\tilde{\varepsilon}_h - \varepsilon_h}{\mu} \right) \Omega^2 + \frac{\varepsilon_v \tilde{\lambda}_j^2 - \tilde{\varepsilon}_v \lambda_i^2}{\mu} \Omega + \lambda_i^2 \tilde{\lambda}_j^2 + \frac{\varepsilon_h \tilde{\lambda}_j^2 - \tilde{\varepsilon}_h \lambda_i^2}{\mu} = 0,$$

где $\tilde{\varepsilon}_v = \eta_v \tilde{s}_{bj}^*$; $\varepsilon_v = \eta_v s_{bi}^*$; $\tilde{\varepsilon}_h = \eta_h \tilde{s}_j + \eta_{hb} \tilde{s}_{bj} + \eta_{hk} \tilde{s}_{kj}$; $\varepsilon_h = \eta_h s_i + \eta_{hb} s_{bi}$ (в случае неподвижного статора $s_{bi} = s_{bi}^*$ и $\tilde{s}_{bj} = \tilde{s}_{bj}^*$).

Очевидно, что формула для расчета Ω будет громоздкой, поэтому разумно отыскать упрощенное решение с помощью проверенного подхода [19].

При отсутствии вязкого и гистерезисного демпфирования

$$\Omega^4 - (\lambda_i^2 + \tilde{\lambda}_j^2) \Omega^2 + \lambda_i^2 \tilde{\lambda}_j^2 = 0,$$

т. е. $|\Omega| = \lambda_i$ или $|\Omega| = \tilde{\lambda}_j$.

При наличии трения

$$|\Omega| = \lambda + \Delta,$$

где λ — та или иная круговая собственная частота бесконтактной или контактной недемпфированной/невращающейся системы; Δ — некоторая поправка для λ от трения.

Представление угловой скорости обкатки в виде $|\Omega| = \lambda (1 + \varepsilon)$ ($\varepsilon = \Delta/\lambda$ — малая поправка) и подстановка этого выражения и приближен-

ных соотношений $\Omega^2 \approx \lambda^2(1 + 2\varepsilon)$, $\Omega^3 \approx \lambda^3(1 + 3\varepsilon)$ и $\Omega^4 \approx \lambda^4(1 + 4\varepsilon)$ в уравнение четвертой степени раскрывают введенную поправку:

$$\varepsilon = -\frac{1}{\mu} \frac{\mathcal{C}}{3},$$

где

$$\mathcal{C} = (\tilde{\varepsilon}_v - \varepsilon_v) \lambda^3 + (\tilde{\varepsilon}_h - \varepsilon_h) \lambda^2 - (\tilde{\varepsilon}_v \lambda_i^2 - \varepsilon_v \tilde{\lambda}_j^2) \lambda - (\tilde{\varepsilon}_h \lambda_i^2 - \varepsilon_h \tilde{\lambda}_j^2);$$

$$3 = 4\lambda^4 + 3 \frac{\tilde{\varepsilon}_v - \varepsilon_v}{\mu} \lambda^3 - 2 \left(\lambda_i^2 + \tilde{\lambda}_j^2 - \frac{\tilde{\varepsilon}_h - \varepsilon_h}{\mu} \right) \lambda^2 - \frac{\tilde{\varepsilon}_v \lambda_i^2 - \varepsilon_v \tilde{\lambda}_j^2}{\mu} \lambda.$$

Как правило, гистерезисные потери в материалах ротора, подшипников и статора незначительно разнятся: $\eta_h \approx \eta_{hb} \approx \eta_{hk} \approx \eta$ (η — коэффициент гистерезисных потерь в материалах системы, причем η равно логарифмическому декременту затухания в ней).

Тогда

$$\varepsilon_h \approx \eta \{u\}_i^T (\mathbf{S} + \mathbf{S}_b) \{u\}_i = \eta \{u\}_i^T [\mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{K}] \{u\}_i = \eta \lambda_i^2;$$

$$\tilde{\varepsilon}_h \approx \eta \{\tilde{u}\}_j^T (\mathbf{S} + \mathbf{S}_b + \mathbf{S}_k) \{\tilde{u}\}_j = \eta \{\tilde{u}\}_j^T [\mathbf{M}]^{-1} [\tilde{\mathbf{K}}] \{\tilde{u}\}_j = \eta \tilde{\lambda}_j^2$$

и, как следствие,

$$\mathcal{C} = \eta_v (\tilde{s}_{bj}^* - s_{bi}^*) \lambda^2 + \eta (\tilde{\lambda}_j^2 - \lambda_i^2) \lambda - \eta_v (\tilde{s}_{bj}^* \lambda_i^2 - s_{bi}^* \tilde{\lambda}_j^2);$$

$$3 = 4\lambda^3 + 3 \frac{\eta_v}{\mu} (\tilde{s}_{bj}^* - s_{bi}^*) \lambda^2 - 2 \left[\lambda_i^2 + \tilde{\lambda}_j^2 - \frac{\eta}{\mu} (\tilde{\lambda}_j^2 - \lambda_i^2) \right] \lambda - \frac{\eta_v}{\mu} (\tilde{s}_{bj}^* \lambda_i^2 - s_{bi}^* \tilde{\lambda}_j^2).$$

Если $\eta_v = 0$, то

$$\varepsilon \approx -\frac{\eta}{2\mu} \frac{\tilde{\lambda}_j^2 - \lambda_i^2}{2\lambda^2 - \lambda_i^2 - \tilde{\lambda}_j^2 + \frac{\eta}{\mu} (\tilde{\lambda}_j^2 - \lambda_i^2)}.$$

Имеющуюся неоднозначность $\lambda = \lambda_i$ или $\lambda = \tilde{\lambda}_j$ можно устранить, если проанализировать аналитические выражения

$$|\Omega| = \lambda_i (1 + \varepsilon_{\lambda=\lambda_i}) = \lambda_i \left(1 + \frac{\eta}{2\mu} \frac{1}{1 - \eta/\mu} \right)$$

и

$$|\Omega| = \tilde{\lambda}_j (1 + \varepsilon_{\lambda=\tilde{\lambda}_j}) = \tilde{\lambda}_j \left(1 - \frac{\eta}{2\mu} \frac{1}{1 + \eta/\mu} \right).$$

С приближением η к μ значения угловой скорости обкатки Ω по модулю в первом случае неограниченно возрастают, во втором — уменьшаются без разрыва. Физически увеличение трения не может повышать эту скорость, а следовательно, λ не может быть равной λ_i .

Таким образом, ε -добавка к $\tilde{\lambda}_j$, определяющая Ω , т. е. угловую скорость обратного безотрывного движения ротора по статору, вследствие трения имеет вид

$$\varepsilon = -\frac{\eta}{2\mu} \frac{1 + \frac{\eta_v \tilde{s}_{bj}^*}{\eta \tilde{\lambda}_j}}{1 + \frac{\eta}{\mu} + \frac{\eta_v (3\tilde{s}_{bj}^* \tilde{\lambda}_j^2 - \tilde{s}_{bj}^* \lambda_i^2 - 2s_{bi}^* \tilde{\lambda}_j^2)}{2\mu \tilde{\lambda}_j (\tilde{\lambda}_j^2 - \lambda_i^2)}}$$

или

$$\varepsilon \approx -\frac{\eta}{2\mu} \frac{1 + \frac{\eta_v \tilde{s}_{bj}^*}{\eta \tilde{\lambda}_j}}{1 + \frac{\eta}{\mu} + \frac{\eta_v \tilde{s}_{bj}^*}{\mu \tilde{\lambda}_j}}. \quad (14a)$$

Поскольку $\tilde{s}_{bj}^* = \{\tilde{u}\}_j^T [M]^{-1} [K_b] \{\tilde{u}\}_j$, члены с множителем η_v будут близкими к нулю как при малом вязком демпфировании, так и при мягких опорах ротора и/или статора:

$$\varepsilon \approx -\frac{\eta}{2\mu} \frac{1}{1 + \eta/\mu}. \quad (14б)$$

Литература

- [1] Begg I.C. Friction Induced Rotor Whirl – A Study in Stability. *ASME Journal of Engineering for Industry*, 1974, vol. 96, no. 2, pp. 450–454.
- [2] Позняк Э.Л. Крутильный удар в валопроводе при внезапной и сильной разбалансировке одного из роторов. *Машиноведение*, 1987, № 5, с. 66–74.
- [3] Ахметишен Н.Х., Нагаев Р.Ф. Динамика неуравновешенного ротора с сухим трением в подшипнике. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 1995, № 5, с. 57–63.
- [4] Shen X., Jia J., Zhao M. Effect of parameters on the rubbing condition of an unbalanced rotor system with initial permanent deflection. *Archive of Applied Mechanics*, 2007, vol. 77, pp. 883–892.
- [5] Никифоров А.Н. Об обкатке с проскальзыванием ротора по статору и влияние на ее частоту трения и гироскопических моментов. *Справочник. Инженерный журнал*, 2018, № 9, с. 21–31.
- [6] Grápis O., Tamužs V., Ohlson N.-G., Anderson J. Overcritical high-speed rotor systems, full annular rub and accident. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, vol. 290, pp. 910–927.
- [7] Yu J.J., Goldman P., Bently D.E., Muszynska A. Rotor/Seal Experimental and Analytical Study on Full Annular Rub. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2002, vol. 124, no. 2, pp. 340–350.
- [8] Куракин А.Д., Нихамкин М.Ш., Семенов С.В. Динамика неуравновешенного гибкого ротора в анизотропных опорах при контакте со статором. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2016, № 4, с. 364–381.

Конструкционное демпфирование (в частности, рассмотренного гистерезисного и вязкого типа) во многом определяется качеством изготовления деталей и сборки механизма или машины. При этом точность оценки трения зависит от экспериментальной конструкции, измерительного оборудования, а также от человеческого фактора. Вкупе это приводит к погрешности, соизмеримой с результатом приближения как по выражению (14а), так и по максимально упрощенной формуле (14б). И, наоборот, формулы (14а) и (14б) удовлетворительно соответствуют действительности.

Выводы

Трение, препятствуя прямому скольжению, т. е. делая его неустойчивым режимом контактной ненагруженной (прочими силами неконтактного происхождения) изотропной системы ротор — статор, приводит к установлению в ней обратного безотрывного движения. При этом оно слабо влияет на амплитуду прецессии, которой сопровождается обкатка, и задает частоту этой прецессии. Вследствие влияния трения частота обкатки ротором статора при проскальзывании между ними оказывается всегда несколько меньше той или иной собственной частоты контактной системы. Причем без конструкционного демпфирования контактное трение никак не влияет на частоту обкатки.

- [9] Sawicki J.T., Montilla-Bravo A., Gosiewski Z. Thermomechanical Behavior of Rotor with Rubbing. *International Journal of Rotating Machinery*, 2003, vol. 9, no. 1, pp. 41–47, doi: <https://doi.org/10.1155/S1023621X03000058>.
- [10] Zhang G.F., Xu W.N., Xu B., Zhang W. Analytical study of nonlinear synchronous full annular rub motion of flexible rotor-stator system and its dynamic stability. *Nonlinear Dynamics*, 2009, vol. 57, pp. 579–592.
- [11] Lahriri S., Weber H.I., Santos I.F., Hartmann H. Rotor-stator contact dynamics using a non-ideal drive — Theoretical and experimental aspects. *Journal of Sound and Vibration*, 2012, vol. 331, pp. 4518–4536.
- [12] Костюк А.Г., Шатохин В.Ф., Циммерман С.Д. Численное моделирование нестационарных колебаний после внезапной разбалансировки многоопорного ротора с обкатом неуравновешенного ротора по статору. *Авиационно-космическая техника и технология*, 2011, № 8(85), с. 81–93.
- [13] Никифоров А.Н., Шохин А.Е. Упругопластическая вязкая модель ударного и безотрывного взаимодействия ротора со статором. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2016, № 1, с. 67–78.
- [14] Крестниковский К.В., Никифоров А.Н., Шохин А.Е. Частота обкатки ротором статора в зависимости от величины зазоров между ними. *Справочник. Инженерный журнал*, 2018, № 8, с. 24–38.
- [15] Zorzi E.S., Nelson H.D. Finite Element Simulation of Rotor-Bearing Systems with Internal Damping. *ASME Journal of Engineering for Power*, 1977, vol. 99, no. 1, pp. 71–76.
- [16] Nelson H.D. A Finite Rotating Shaft Element Using Timoshenko Beam Theory. *ASME Journal of Mechanical Design*, 1980, vol. 102, no. 4, pp. 793–803.
- [17] Леонтьев М.К., Давыдов А.В., Дегтярев С.А. Динамическая устойчивость ротора турбогенератора. *Газотурбинные технологии*, 2012, № 4(105), с. 36–40.
- [18] Подольский М.Е. Физическая природа и дискуссионные вопросы теории масляных вибраций. *Теория механизмов и машин*, 2009, т. 7, № 13, с. 42–59.
- [19] Никифоров А.Н. Аналитическое определение собственных частот вращающейся системы с трением. *Машиноведение и инновации. Конференция молодых ученых и студентов. Тр. XXIX Междунар. конф.*, Москва, 6–8 декабря 2017, Москва, Изд-во ИМАШ РАН, 2018, с. 219–221.

References

- [1] Begg I.C. Friction Induced Rotor Whirl – A Study in Stability. *ASME Journal of Engineering for Industry*, 1974, vol. 96, no. 2, pp. 450–454.
- [2] Poznyak E.L. Krutil'nyy udar v valoprovode pri vnezapnoy i sil'noy razbalansirovke odnogo iz rotorov [A torsional shock in the shaft line with a sudden and strong imbalance of one of the rotors]. *Mashinovedenie [Engineering science]*. 1987, no. 5, pp. 66–74.
- [3] Ahmetishen N.H., Nagaev R.F. Dinamika neuravnovesennogo rotora s suhim treniem v podshipnike [Dynamics of unbalanced rotor with dry friction in the bearing]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 1995, no. 5, pp. 57–63.
- [4] Shen X., Jia J., Zhao M. Effect of parameters on the rubbing condition of an unbalanced rotor system with initial permanent deflection. *Archive of Applied Mechanics*, 2007, vol. 77, pp. 883–892.
- [5] Nikiforov A.N. Ob obkatke s proskal'zyvaniem rotora po statoru i vliyanie na ee chastotu treniya i giroskopicheskikh momentov [About running-in with rotor slip on the stator and influence on its friction frequency and gyroscopic moments]. *Spravochnik. Inzhenernyy zhurnal [Handbook. An Engineering journal with appendix]*. 2018, no. 9, pp. 21–31.
- [6] Grápis O., Tamužs V., Ohlson N.-G., Anderson J. Overcritical high-speed rotor systems, full annular rub and accident. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, vol. 290, pp. 910–927.
- [7] Yu J.J., Goldman P., Bently D.E., Muszynska A. Rotor/Seal Experimental and Analytical Study on Full Annular Rub. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2002, vol. 124, no. 2, pp. 340–350.
- [8] Kurakin A.D., Nihamkin M.Sh., Semenov S.V. Dinamika neuravnovesennogo gibkogo rotora v anizotropnykh oporah pri kontakte so statorom [Dynamics of unbalanced flexible rotor with anisotropic supports during contact with the stator]. *Vestnik Permskogo natsion-*

- al'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika* [PNRPU Mechanics Bulletin]. 2016, no. 4, pp. 364–381.
- [9] Sawicki J.T., Montilla-Bravo A., Gosiewski Z. Thermomechanical Behavior of Rotor with Rubbing. *International Journal of Rotating Machinery*, 2003, vol. 9, no. 1, pp. 41–47, doi: <https://doi.org/10.1155/S1023621X03000058>.
- [10] Zhang G.F., Xu W.N., Xu B., Zhang W. Analytical study of nonlinear synchronous full annular rub motion of flexible rotor–stator system and its dynamic stability. *Nonlinear Dynamics*, 2009, vol. 57, pp. 579–592.
- [11] Lahriri S., Weber H.I., Santos I.F., Hartmann H. Rotor-stator contact dynamics using a non-ideal drive – Theoretical and experimental aspects. *Journal of Sound and Vibration*, 2012, vol. 331, pp. 4518–4536.
- [12] Kostyuk A.G., Shatohin V.F., Tsimmerman S.D. Chislennoe modelirovanie nestatsionarnykh kolebaniy posle vnezapnoy razbalansirovki mnogoopornogo rotora s obkatom neuravnoveshennogo rotora po statoru [Numerical simulation of unsteady oscillations after a sudden unbalance of a multi-support rotor with an unbalanced rotor roll over the stator]. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya* [Aerospace engineering and technology]. 2011, no. 8(85), pp. 81–93.
- [13] Nikiforov A.N., Shokhin A.E. Elastoplastic viscous model of rotor-stator impact interaction without separation. *Mechanics of Solids*, 2016, vol. 51, no. 1, pp. 54–64.
- [14] Krestnikovskiy K.V., Nikiforov A.N., Shohin A.E. Chastota obkatki rotorom statora v zavisimosti ot velichiny zazorov mezhdu nimi [The frequency of running the rotor of the stator, depending on the size of the gaps between them]. *Spravochnik. Inzhenernyy zhurnal* [Handbook. An Engineering journal with appendix]. 2018, no. 8, pp. 24–38.
- [15] Zorzi E.S., Nelson H.D. Finite Element Simulation of Rotor-Bearing Systems with Internal Damping. *ASME Journal of Engineering for Power*, 1977, vol. 99, no. 1, pp. 71–76.
- [16] Nelson H.D. A Finite Rotating Shaft Element Using Timoshenko Beam Theory. *ASME Journal of Mechanical Design*, 1980, vol. 102, no. 4, pp. 793–803.
- [17] Leont'ev M.K., Davydov A.V., Degtyarev S.A. Dinamicheskaya ustoychivost' rotora turbo-generatora [Dynamic stability of the turbine generator rotor]. *Gazoturbinnye tekhnologii* [Turbine technology]. 2012, no. 4(105), pp. 36–40.
- [18] Podolskiy M.E. Fizicheskaya priroda i diskussionnye voprosy teorii maslyanykh vibratsiy [The influence of oil film inertia forces on the motion of lightly loaded rotors]. *Teoriya mekhanizmov i mashin* [Theory of mechanisms and machines]. 2009, vol. 7, no. 13, pp. 42–59.
- [19] Nikiforov A.N. Analiticheskoe opredelenie sobstvennykh chastot vrashchayushcheyasya sistemy s treniem [Analytical determination of natural frequencies of a rotating system with friction]. *Mashinovedenie i innovatsii. Konferentsiya molodykh uchenykh i studentov. Tr. 29 Mezhdunar. konf.* [Machine science and innovation. Conference of young scientists and students. Proceedings of the 29 International Conference]. Moscow, 6–8 December 2017, Moscow, IMASH RAN publ., 2018, pp. 219–221.

Статья поступила в редакцию 05.06.2018

Информация об авторе

НИКИФОРОВ Андрей Николаевич (Москва) — кандидат технических наук, старший научный сотрудник. Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук (101990, Москва, Российская Федерация, Малый Харитоньевский пер., д. 4, e-mail: n.andre@mail.ru).

Information about the author

NIKIFOROV Andrey Nikolaevich (Moscow) — Candidate of Science (Eng.), Senior Researcher. Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences (101990, Moscow, Russian Federation, Maliy Kharitonievskiy Lane, Bldg. 4, e-mail: n.andre@mail.ru).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Никифоров А.Н. Об обкатке статора ротором со многими степенями свободы вследствие трения. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2018, № 10, с. 4–17, doi: 10.18698/0536-1044-2018-10-4-17.

Please cite this article in English as:

Nikiforov A.N. On the Full Annular Rub in the Flexible Rotor — Compliant Stator System due to Friction. *Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2018, no. 10, pp. 4–17, doi: 10.18698/0536-1044-2018-10-4-17.