

УДК 531.134

doi: 10.18698/0536-1044-2019-3-40-50

Об аналитическом подходе к выбору центроид в плоском зубчатом зацеплении

М.Л. Иоффе

США, Нью-Йорк

On the Analytical Approach to the Selection of a Centroid in a Flat Gearing

M.L. Ioffe

USA, New-York

Теория зубчатых зацеплений, в частности кинематика, насчитывает большую историю, в которую вписаны имена таких великих математиков, как Л. Эйлер, Х. Гюйгенс и П.Л. Чебышев. Эта теория достаточно подробно изложена во многих работах. Однако в ней недостаточно внимания уделено просто формулируемому, но сложно решаемому вопросу выбора уравнений кривых, описывающих центроиды в плоском зубчатом зацеплении, при которых движение передается с постоянным отношением угловых скоростей. Методы анализа плоского зубчатого зацепления основаны на положении о существовании центра зацепления — точки, в которой скорости звеньев равны и через которую проходит общая нормаль к центроидам, т. е. на теореме Виллиса. В основу настоящей работы положено утверждение о том, что проекции скоростей общей точки на общую нормаль одинаковы. Представлен вывод уравнений, которым должны удовлетворять уравнения кривых, чтобы выполнялось условие постоянства угловых скоростей. В общем случае необходимо, чтобы три неизвестные функции отвечали четырем ограничениям: обе кривые имеют общую точку (два ограничения), в этой точке нормали к кривым параллельны, проекции скоростей общей точки на нормаль одинаковы и определяются угловыми скоростями звеньев. В качестве примера рассмотрены наиболее распространенные формы кривых: эвольвента, эпи- и гипоциклоиды. Показано, что для эвольвенты все ограничения выполняются, в то время как при использовании эпи- и гипоциклоид передача вращения с постоянным передаточным отношением невозможна. Описан вариант, когда задана форма лишь одной кривой, а форма другой вычисляется исходя из условия постоянства передаточного отношения. Для примера выведены уравнения, где в качестве первой кривой выбраны гипоциклоида и прямая.

Ключевые слова: плоское зубчатое зацепление, центроида, передаточное отношение, эвольвента, эпициклоида, гипоциклоида

The theory of gearing, and kinematics in particular, has a long history, in which the names of great mathematicians such as Euler, Huygens, Chebyshev are inscribed. This theory is described in detail in many works, yet insufficient attention is paid to the simply formulated, but difficult to solve problem of selecting equations of curves describing centroids in a flat gearing, in which motion is transmitted with a constant ratio of angular velocities. The existing methods for analyzing the flat gearing are based on the premise about the existence of a center of engagement, the point at which the velocities of the links are equal, and through which the common normal of the centroid passes, that is, on the Willis theorem. This work is based on the assertion that the projections of the velocities of the common point on the common normal are the same. The paper presents the derivation

of equations that the equations of curves must satisfy in order to fulfil the condition of constancy of the angular velocities. In general, it is necessary that three unknown functions satisfy four constraints: both curves have a common point (two restrictions), the normals to the curves are parallel at this point, the projections of velocities of the common point on the normal are identical and determined by the angular velocities of the links. As an example, the most common forms of curves are considered: the involute, the epicycloid, and the hypocycloid. It is shown that for the involute all the constraints are satisfied, while the transmission of rotation with a constant gear ratio is impossible when using the epicycloid and the hypocycloid. A variant is considered where the form of only one curve is given, and the form of the second curve is calculated proceeding from the condition of constancy of the gear ratio. As an example, equations are derived where the hypocycloid and the straight line are chosen as the first curve.

Keywords: flat gearing, centroid, gear ratio, involute, epicycloid, hypocycloid

Проектированию зубчатых колес (ЗК) и анализу кривых зацепления, обеспечивающих оптимальные с разных точек зрения параметры зубчатых передач, посвящено большое количество работ [1–9]. Однако в них недостаточно внимания уделено вопросу выбора уравнений кривых, описывающих центроиды в плоском зубчатом зацеплении, при которых движение передается с постоянным отношением угловых скоростей [10–12].

Цель работы— анализ вопроса выбора кривых зацепления плоских ЗК, обеспечивающих постоянство передаточного отношения.

Рассмотрим задачу передачи вращения от оси O_1 к параллельной ей оси O_2 (рис. 1).

В точках O_1 и O_2 расположены центры вращения ЗК 1 и ЗК 2. Окружности с центрами в этих точках радиусами R_1 и R_2 являются геометрическими местами мгновенных центров вращения в системах координат первого ЗК и второго ЗК соответственно, точка P —мгновенным центром вращения в относительном движении звеньев. На первом ЗК и втором ЗК имеются кривые M_1 и M_2 . Если эти кривые—эвольвенты, то каждая из них начинается на соответствующей окружности с центрами в точках O_1 и O_2 и радиусами r_1 и r_2 .

В общей точке двух кривых K общая нормаль $n-n$ является общей касательной окружностей эвольвент. С первым ЗК свяжем подвижную декартову систему координат $O_1x_1y_1$, которая расположена так, что ее начало находится в точке O_1 , ось O_1x_1 в начальный момент направлена вдоль прямой O_1O_2 , а ось O_1y_1 —вертикально вверх. Для второго ЗК введем подвижную декартову систему координат $O_2x_2y_2$ с началом в точке O_2 , осью O_2x_2 в начальный момент, направленной вдоль прямой O_1O_2 , и осью O_2y_2 , направленной вертикально вверх.

Вращение между осями передается путем перекатывания кривой M_1 , закрепленной на первом ЗК по кривой M_2 , закрепленной на втором ЗК. Условие передачи вращения состоит в том, что в точке касания кривых проекции скоростей на общую нормаль должны быть равны. В системах координат, связанных с ЗК с началом координат на осях вращения, уравнения кривых имеют вид

$$\mathbf{R}_1 = (x_1(\varphi_1), y_1(\varphi_1));$$

$$\mathbf{R}_2 = (x_2(\varphi_2), y_2(\varphi_2)),$$

где φ_1, φ_2 — параметры, определяющие формы кривых.

В основе теории плоских зацеплений лежит теорема зацепления (теорема Виллиса) [13]. В современной трактовке эта теорема звучит так: общая нормаль к профилям, проведенная в точке их касания, проходит через полюс зацепления. Полюсом зацепления называется точка, лежащая на прямой, соединяющей центры ЗК (точки O_1 и O_2), и делящая отрезок O_1O_2 в отношении, обратно пропорциональном угловым скоростям первого ЗК (см. рис. 1).

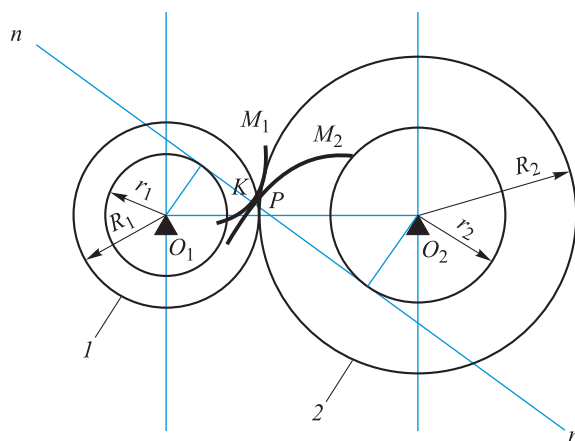


Рис. 1. Передача вращения с помощью центроид

Эта теорема следует из трех утверждений:

1) проекции линейных скоростей общей точки центроид на общую нормаль равны;

2) скорости точек пересечения общей нормали с осью O_1O_2 отличаются от проекций скоростей общей точки на векторы, перпендикулярные общей нормали;

3) так как проекции скоростей точки пересечения на общую нормаль равны между собой, а обе скорости направлены перпендикулярно прямой O_1O_2 , равны и сами скорости, т.е. $\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$, где ω_1 и ω_2 — угловые скорости первого и второго ЗК.

Таким образом, предполагается, что значения угловых скоростей известны, или, что равносильно, известно передаточное отношение. Откажемся от этого предположения.

Рассмотрим случай, когда оба ЗК вращаются с постоянными угловыми скоростями ω_1 и ω_2 , причем первая может принимать произвольное значение, а вторая зависит от геометрии системы и первой угловой скорости. Тогда в неподвижной системе координат уравнения кривых имеют вид

$$\mathbf{R}_1(\varphi_1, t) = (x_1(\varphi_1), y_1(\varphi_1)) \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t & \sin \omega_1 t \\ -\sin \omega_1 t & \cos \omega_1 t \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{R}_2(\varphi_2, t) = (O_1O_2, 0) + (x_2(\varphi_2), y_2(\varphi_2)) \times \begin{pmatrix} \cos \omega_2 t & \sin \omega_2 t \\ -\sin \omega_2 t & \cos \omega_2 t \end{pmatrix},$$

где t — время, отсчитываемое от начала движения.

Единичные векторы нормали к кривым в подвижной и неподвижной системах координат определяются следующими уравнениями:

$$\mathbf{n}_1^r = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{dx_1(\varphi_1)}{d\varphi_1}\right]^2 + \left[\frac{dy_1(\varphi_1)}{d\varphi_1}\right]^2}} \times \begin{pmatrix} -\frac{dy_1(\varphi_1)}{d\varphi_1} & \frac{dx_1(\varphi_1)}{d\varphi_1} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx_1(\varphi_1)}{d\varphi_1}\right)^2 + \left(\frac{dy_1(\varphi_1)}{d\varphi_1}\right)^2}} \times \begin{pmatrix} -\frac{dy_1(\varphi_1)}{d\varphi_1} & \frac{dx_1(\varphi_1)}{d\varphi_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t & \sin \omega_1 t \\ -\sin \omega_1 t & \cos \omega_1 t \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{n}_2^r = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{dx_2(\varphi_2)}{d\varphi_2}\right]^2 + \left[\frac{dy_2(\varphi_2)}{d\varphi_2}\right]^2}} \times \begin{pmatrix} -\frac{dy_2(\varphi_1)}{d\varphi_2} & \frac{dx_2(\varphi_2)}{d\varphi_2} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{dx_2(\varphi_2)}{d\varphi_2}\right]^2 + \left[\frac{dy_2(\varphi_2)}{d\varphi_2}\right]^2}} \times \begin{pmatrix} -\frac{dy_2(\varphi_1)}{d\varphi_2} & \frac{dx_2(\varphi_2)}{d\varphi_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega_2 t & \sin \omega_2 t \\ -\sin \omega_2 t & \cos \omega_2 t \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{n}_1^r, \mathbf{n}_2^r$ — векторы нормали к кривым в подвижных, связанных с ЗК системах координат; $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ — векторы нормали к кривым в неподвижной системе координат.

При вращении ЗК с угловой скоростью ω вектор линейной скорости точки с координатами $x(\varphi), y(\varphi)$ в связанной системе координат имеет вид

$$\mathbf{v} = \omega(-y(\varphi), x(\varphi)),$$

где φ — параметр, определяющий положение точки на кривой.

Проекция скорости на нормаль определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^r &= \frac{\omega}{\sqrt{\left[\frac{dx(\varphi)}{d\varphi}\right]^2 + \left[\frac{dy(\varphi)}{d\varphi}\right]^2}} \times \\ &\times \left[y(\varphi) \frac{dy(\varphi)}{d\varphi} + x(\varphi) \frac{dx(\varphi)}{d\varphi} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\omega}{\sqrt{\left[\frac{dx(\varphi)}{d\varphi}\right]^2 + \left[\frac{dy(\varphi)}{d\varphi}\right]^2}} \frac{d}{d\varphi} (x(\varphi)^2 + y(\varphi)^2), \end{aligned}$$

или

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^r = \frac{1}{2} \omega F(\varphi),$$

где

$$F(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{dx(\varphi)}{d\varphi}\right]^2 + \left[\frac{dy(\varphi)}{d\varphi}\right]^2}} \frac{d}{d\varphi} (x(\varphi)^2 + y(\varphi)^2).$$

Таким образом, проекции скорости на нормаль для первого и второго ЗК имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1^r &= \frac{1}{2} \frac{\omega_1}{\sqrt{\left[\frac{dx_1(\varphi_1)}{d\varphi_1}\right]^2 + \left[\frac{dy_1(\varphi_1)}{d\varphi_1}\right]^2}} \times \\ &\times \frac{d}{d\varphi_1} (x_1(\varphi_1)^2 + y_1(\varphi_1)^2) = \frac{1}{2} \omega_1 F(\varphi_1); \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_2^r &= \frac{1}{2} \frac{\omega_2}{\sqrt{\left[\frac{dx_2(\varphi_2)}{d\varphi_2}\right]^2 + \left[\frac{dy_2(\varphi_2)}{d\varphi_2}\right]^2}} \times \\ &\times \frac{d}{d\varphi_2} (x_2(\varphi_2)^2 + y_2(\varphi_2)^2) = \frac{1}{2} \omega_2 F(\varphi_2). \end{aligned}$$

При обкатке ЗК, когда кривая M_1 движется, обкатывая кривую M_2 , должны выполняться следующие равенства:

$$\mathbf{R}_1(\varphi_1, t) = \mathbf{R}_2(\varphi_2, t);$$

$$\mathbf{n}_1(\varphi_1, t) = \mathbf{n}_2(\varphi_2, t);$$

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_2,$$

т. е.

$$\begin{aligned} (x_1(\varphi_1), y_1(\varphi_1)) \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t & \sin \omega_1 t \\ -\sin \omega_1 t & \cos \omega_1 t \end{pmatrix} &= \\ = (O_1 O_2, 0) + (x_2(\varphi_2), y_2(\varphi_2)) \begin{pmatrix} \cos \omega_2 t & \sin \omega_2 t \\ -\sin \omega_2 t & \cos \omega_2 t \end{pmatrix}; & \\ \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{dx_1(\varphi_1)}{d\varphi_1}\right]^2 + \left[\frac{dy_1(\varphi_1)}{d\varphi_1}\right]^2}} \times & \\ \times \begin{pmatrix} -\frac{dy_1(\varphi_1)}{d\varphi_1} & \frac{dx_1(\varphi_1)}{d\varphi_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t & \sin \omega_1 t \\ -\sin \omega_1 t & \cos \omega_1 t \end{pmatrix} = & \\ = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{dx_2(\varphi_2)}{d\varphi_2}\right]^2 + \left[\frac{dy_2(\varphi_2)}{d\varphi_2}\right]^2}} \times & \\ \times \begin{pmatrix} -\frac{dy_2(\varphi_2)}{d\varphi_2} & \frac{dx_2(\varphi_2)}{d\varphi_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega_2 t & \sin \omega_2 t \\ -\sin \omega_2 t & \cos \omega_2 t \end{pmatrix}; & (1) \\ \frac{\omega_1}{\sqrt{\left[\frac{dx_1(\varphi_1)}{d\varphi_1}\right]^2 + \left[\frac{dy_1(\varphi_1)}{d\varphi_1}\right]^2}} \times & \\ \times \frac{d}{d\varphi_1} (x_1(\varphi_1)^2 + y_1(\varphi_1)^2) = & \\ = \frac{\omega_2}{\sqrt{\left[\frac{dx_2(\varphi_2)}{d\varphi_2}\right]^2 + \left[\frac{dy_2(\varphi_2)}{d\varphi_2}\right]^2}} \times & \\ \times \frac{d}{d\varphi_2} (x_2(\varphi_2)^2 + y_2(\varphi_2)^2). & \end{aligned}$$

Второе уравнение системы (1), отражающее равенство единичных касательных векторов кривых, очевидно, можно представить в эквивалентном виде

$$\begin{aligned} &\left[\frac{dx_1(\varphi_1)}{d\varphi_1} \cos \omega_1 t - \frac{dy_1(\varphi_1)}{d\varphi_1} \sin \omega_1 t \right] \times \\ &\times \left[\frac{dx_2(\varphi_2)}{d\varphi_2} \sin \omega_2 t + \frac{dy_2(\varphi_2)}{d\varphi_2} \cos \omega_2 t \right] = \\ &= \left[\frac{dx_1(\varphi_1)}{d\varphi_1} \sin \omega_1 t + \frac{dy_1(\varphi_1)}{d\varphi_1} \cos \omega_1 t \right] \times \\ &\times \left[\frac{dx_2(\varphi_2)}{d\varphi_2} \cos \omega_2 t - \frac{dy_2(\varphi_2)}{d\varphi_2} \sin \omega_2 t \right]. \end{aligned}$$

При заданных уравнениях кривых M_1 и M_2 и постоянных угловых скоростях ЗК должны существовать две функции времени $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ и постоянный параметр ω_2 , при которых четыре уравнения (1) справедливы для любого t .

В общем случае такая задача неразрешима. Исследуем, как можно применить эти уравнения для двух самых распространенных на практике кривых—эвольвенты и циклоиды.

Рассмотрим случай эвольвенты для построения сопрягаемых кривых на ЗК. Уравнения эвольвент имеют вид [14]

$$\begin{aligned} x_1 &= R_1 [\cos(\varphi_1 + \alpha_1) + \varphi_1 \sin(\varphi_1 + \alpha_1)]; \\ y_1 &= R_1 [\sin(\varphi_1 + \alpha_1) - \varphi_1 \cos(\varphi_1 + \alpha_1)]; \\ x_2 &= R_2 [\cos(\varphi_2 + \alpha_2) + \varphi_2 \sin(\varphi_2 + \alpha_2)]; \\ y_2 &= R_2 [\sin(\varphi_2 + \alpha_2) - \varphi_2 \cos(\varphi_2 + \alpha_2)], \end{aligned}$$

где R_1, R_2 — параметры, определяющие соответствующие радиусы окружностей, разверткой которых получают эвольвенты; α_1, α_2 — параметры положения начальных точек эвольвент на этих окружностях.

Для эвольвент уравнения (1) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} &(R_1 [\cos(\varphi_1 + \alpha_1) + \varphi_1 \sin(\varphi_1 + \alpha_1)], R_1 \times \\ &\times [\sin(\varphi_1 + \alpha_1) - \varphi_1 \cos(\varphi_1 + \alpha_1)]) \times \\ &\times \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t & \sin \omega_1 t \\ -\sin \omega_1 t & \cos \omega_1 t \end{pmatrix} = (O_1 O_2, 0) + \\ &+ (R_2 [\cos(\varphi_2 + \alpha_2) + \varphi_2 \sin(\varphi_2 + \alpha_2)], R_2 \times \\ &\times [\sin(\varphi_2 + \alpha_2) - \varphi_2 \cos(\varphi_2 + \alpha_2)]) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \begin{pmatrix} \cos \omega_2 t & \sin \omega_2 t \\ -\sin \omega_2 t & \cos \omega_2 t \end{pmatrix}; \\
& \frac{1}{R_1 \varphi_1} (-R_1 \varphi_1 \sin(\varphi_1 + \alpha_1), R_1 \varphi_1 \cos(\varphi_1 + \alpha_1)) \times \\
& \times \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t & \sin \omega_1 t \\ -\sin \omega_1 t & \cos \omega_1 t \end{pmatrix} = \frac{1}{R_2 \varphi_2} \times \\
& \times (-R_2 \varphi_2 \sin(\varphi_2 + \alpha_2), R_2 \varphi_2 \cos(\varphi_2 + \alpha_2)) \times \\
& \times \begin{pmatrix} \cos \omega_2 t & \sin \omega_2 t \\ -\sin \omega_2 t & \cos \omega_2 t \end{pmatrix}; \\
& \frac{\omega_1}{R_1 \varphi_1} \frac{d}{d\varphi_1} (R_1^2 [1 + \varphi_1^2]) = \frac{\omega_2}{R_2 \varphi_2} \frac{d}{d\varphi_2} (R_2^2 [1 + \varphi_2^2]).
\end{aligned}$$

Упрощая, получаем

$$\begin{aligned}
& (R_1 [\cos(\varphi_1 + \alpha_1) + \varphi_1 \sin(\varphi_1 + \alpha_1)], R_1 \times \\
& \times [\sin(\varphi_1 + \alpha_1) - \varphi_1 \cos(\varphi_1 + \alpha_1)]) \times \\
& \times \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t & \sin \omega_1 t \\ -\sin \omega_1 t & \cos \omega_1 t \end{pmatrix} = (O_1 O_2, 0) + \\
& + (R_2 [\cos(\varphi_2 + \alpha_2) + \varphi_2 \sin(\varphi_2 + \alpha_2)], R_2 \times \\
& \times [\sin(\varphi_2 + \alpha_2) - \varphi_2 \cos(\varphi_2 + \alpha_2)]) \times \\
& \times \begin{pmatrix} \cos \omega_2 t & \sin \omega_2 t \\ -\sin \omega_2 t & \cos \omega_2 t \end{pmatrix}; \\
& (-\sin(\varphi_1 + \alpha_1 + \omega_1 t), \cos(\varphi_1 + \alpha_1 + \omega_1 t)) = \\
& = (-\sin(\varphi_2 + \alpha_2 + \omega_2 t), \cos(\varphi_2 + \alpha_2 + \omega_2 t)); \\
& R_1 \omega_1 = -R_2 \omega_2.
\end{aligned} \tag{2}$$

Согласно третьему уравнению системы (2), угловая скорость второго ЗК при постоянной угловой скорости первого ЗК также будет неизменной, а их отношение обратно пропорционально параметрам эвольвент R_1, R_2 . Из второго уравнения системы (2) следует, что

$$\varphi_2 + \alpha_2 + \omega_2 t = \varphi_1 + \alpha_1 + \omega_1 t. \tag{3}$$

Первое векторное уравнение системы (2) преобразуем к виду

$$\begin{aligned}
& R_1 \cos(\varphi_1 + \alpha_1 + \omega_1 t) + R_1 \varphi_1 \sin(\varphi_1 + \alpha_1 + \omega_1 t) = \\
& = O_1 O_2 + R_2 \cos(\varphi_2 + \alpha_2 + \omega_2 t) + \\
& + R_2 \varphi_2 \sin(\varphi_2 + \alpha_2 + \omega_2 t); \\
& R_1 \sin(\varphi_1 + \alpha_1 + \omega_1 t) - R_1 \varphi_1 \cos(\varphi_1 + \alpha_1 + \omega_1 t) = \\
& = R_2 \sin(\varphi_2 + \alpha_2 + \omega_2 t) - R_2 \varphi_2 \cos(\varphi_2 + \alpha_2 + \omega_2 t).
\end{aligned}$$

Из этого уравнения с учетом выражения (3) получаем

$$\begin{aligned}
& (R_1 - R_2) \cos(\varphi_1 + \alpha_1 + \omega_1 t) + \\
& + (R_1 \varphi_1 - R_2 \varphi_2) \sin(\varphi_1 + \alpha_1 + \omega_1 t) = O_1 O_2; \\
& (R_1 - R_2) \sin(\varphi_1 + \alpha_1 + \omega_1 t) - \\
& - (R_1 \varphi_1 - R_2 \varphi_2) \cos(\varphi_1 + \alpha_1 + \omega_1 t) = 0; \\
& R_1 - R_2 = O_1 O_2 \cos(\varphi_1 + \alpha_1 + \omega_1 t); \\
& (R_1 \varphi_1 - R_2 \varphi_2) = O_1 O_2 \sin(\varphi_1 + \alpha_1 + \omega_1 t);
\end{aligned}$$

$$\varphi_1(t) = \arccos \frac{R_1 - R_2}{O_1 O_2} - \alpha_1 - \omega_1 t;$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2(t) &= \frac{1}{R_2} \left[R_1 \varphi_1 - O_1 O_2 \sqrt{1 - \left(\frac{R_1 - R_2}{O_1 O_2} \right)^2} \right] = \\
&= \frac{R_1}{R_2} \varphi_1 - \frac{O_1 O_2}{R_2} \sqrt{1 - \left(\frac{R_1 - R_2}{O_1 O_2} \right)^2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, наряду с определением угловой скорости $\omega_2 = -(R_1/R_2)\omega_1$ получены неизвестные функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$. Тем самым для эвольвент задача решена полностью.

Рассмотрим случай использования гипо- и эпициклоид для построения сопрягаемых кривых на ЗК [14]. На рис. 2 показаны две неподвижные точки O_1, O_2 , в которых расположены оси вращения ЗК 1 и ЗК 2.

В этих точках проведены окружности радиусами R_1 и R_2 . Расстояние между центрами окружностей равно сумме радиусов, т.е. окружности касаются друг друга. Система координат $O_1 X Y$ расположена так, что ее начало находится в точке O_1 , ось $O_1 X$ направлена вдоль прямой $O_1 O_2$, ось $O_1 Y$ направлена вверх. Внутри первой окружности находится окружность радиусом r , центр которой расположен на прямой $O_1 O_2$, и которая касается двух больших

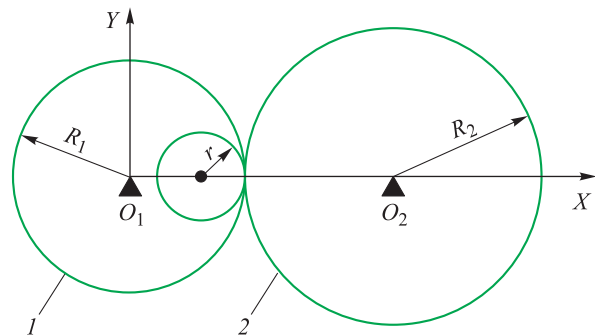


Рис. 2. Использование гипо- и эпициклоид для построения центроид

окружностей. Первая из сопрягаемых кривых— гипоциклоида образуется при качении этой окружности вдоль первой окружности радиусом R_1 , вторая— эпициклоида—при ее качении вдоль второй окружности радиусом R_2 .

Уравнения гипоциклоиды и соответствующие величины в системе координат O_1XY имеют следующий вид [14]:

$$\begin{aligned}
 x_g(\varphi) &= (R_1 - r) \cos \frac{r}{R_1 - r} \varphi_1 + r \cos \varphi_1; \\
 y_g(\varphi) &= (R_1 - r) \sin \frac{r}{R_1 - r} \varphi_1 - r \sin \varphi_1; \\
 (x_g(\varphi), y_g(\varphi)) &= (R_1 - r, r) \times \\
 &\times \begin{pmatrix} \cos \frac{r}{R_1 - r} \varphi_1 & \sin \frac{r}{R_1 - r} \varphi_1 \\ \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \end{pmatrix}; \\
 x_g(\varphi)^2 + y_g(\varphi)^2 &= (R_1 - r)^2 + r^2 + \\
 &+ 2(R_1 - r)r \cos \frac{R_1}{R_1 - r} \varphi_1; \\
 \frac{d}{d\varphi} (x_g(\varphi)^2 + y_g(\varphi)^2) &= -2R_1 r \sin \frac{R_1}{R_1 - r} \varphi_1; \\
 \frac{dx_g(\varphi)}{d\varphi} &= -r \left(\sin \frac{r}{R_1 - r} \varphi_1 + \sin \varphi_1 \right); \\
 \frac{dy_g(\varphi)}{d\varphi} &= r \left(\cos \frac{r}{R_1 - r} \varphi_1 - \cos \varphi_1 \right); \\
 \left(\frac{dx_g(\varphi)}{d\varphi} \right)^2 + \left(\frac{dy_g(\varphi)}{d\varphi} \right)^2 &= 2r^2 \left(1 - \cos \frac{R_1}{R_1 - r} \varphi_1 \right); \\
 F(\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{dx(\varphi)}{d\varphi} \right]^2 + \left[\frac{dy(\varphi)}{d\varphi} \right]^2}} \times \\
 &\times \frac{d}{d\varphi} (x(\varphi)^2 + y(\varphi)^2); \\
 F(\varphi_1) &= -\frac{2R_1 \sin \frac{R_1}{R_1 - r} \varphi_1}{\sqrt{2 \left(1 - \cos \frac{R_1}{R_1 - r} \varphi_1 \right)}} = -R_1 \sin \frac{0,5R_1}{R_1 - r} \varphi_1.
 \end{aligned}$$

Уравнения эпициклоиды и соответствующие величины в системе координат O_2XY имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 x_e(\varphi) &= -(R_2 + r) \cos \frac{r}{R_2 + r} \varphi_2 + r \cos \varphi_2; \\
 y_e(\varphi) &= (R_2 + r) \sin \frac{r}{R_2 + r} \varphi_2 - r \sin \varphi_2;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (x_e(\varphi), y_e(\varphi)) &= (R_2 + r, r) \times \\
 &\times \begin{pmatrix} -\cos \frac{r}{R_2 + r} \varphi_2 & \sin \frac{r}{R_2 + r} \varphi_2 \\ \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 \end{pmatrix}; \\
 [x_e(\varphi)]^2 + [y_e(\varphi)]^2 &= (R_2 + r)^2 + r^2 - \\
 &- 2(R_2 + r)r \cos \frac{R_2}{R_2 + r} \varphi_2; \\
 \frac{d}{d\varphi} (x_e(\varphi)^2 + y_e(\varphi)^2) &= 2R_2 r \sin \frac{R_2}{R_2 + r} \varphi_2; \\
 \frac{dx_e(\varphi)}{d\varphi} &= r \left(\sin \frac{r}{R_2 + r} \varphi_2 - \sin \varphi_2 \right); \\
 \frac{dy_e(\varphi)}{d\varphi} &= r \left(\cos \frac{r}{R_2 + r} \varphi_2 - \cos \varphi_2 \right); \\
 \left[\frac{dx_e(\varphi)}{d\varphi} \right]^2 + \left[\frac{dy_e(\varphi)}{d\varphi} \right]^2 &= 2r^2 \left(1 - \cos \frac{R_2}{R_2 + r} \varphi_2 \right); \\
 F(\varphi_2) &= \frac{2R_2 r \sin \frac{R_2}{R_2 + r} \varphi_2}{\sqrt{2r^2 \left(1 - \cos \frac{R_2}{R_2 + r} \varphi_2 \right)}} = \\
 &= R_2 \cos \frac{0,5R_2}{R_2 + r} \varphi_1.
 \end{aligned}$$

Уравнения (1) в случае гипо- и эпициклоид записываются как

$$\begin{aligned}
 (R_1 - r, r) \times \\
 &\times \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{r}{R_1 - r} \varphi_1 + \omega_1 t \right) & \sin \left(\frac{r}{R_1 - r} \varphi_1 + \omega_1 t \right) \\ \cos(\varphi_1 - \omega_1 t) & -\sin(\varphi_1 - \omega_1 t) \end{pmatrix} = \\
 &= (R_1 + R_2, 0) + (R_2 + r, r) \times \\
 &\times \begin{pmatrix} -\cos \left(\frac{r}{R_2 + r} \varphi_2 - \omega_2 t \right) & \sin \left(\frac{r}{R_2 + r} \varphi_2 - \omega_2 t \right) \\ \cos(\varphi_2 - \omega_2 t) & -\sin(\varphi_2 - \omega_2 t) \end{pmatrix}; \\
 &\left(\sin \left(\frac{r}{R_1 - r} \varphi_1 + \omega_1 t \right) + \sin(\varphi_1 - \omega_1 t) \right) \times \\
 &\times \left(\cos \left(\frac{r}{R_2 + r} \varphi_2 - \omega_2 t \right) - \cos(\varphi_2 - \omega_2 t) \right) = \\
 &= -\left(\cos \left(\frac{r}{R_1 - r} \varphi_1 + \omega_1 t \right) - \cos(\varphi_1 - \omega_1 t) \right) \times \\
 &\times \left(\sin \left(\frac{r}{R_2 + r} \varphi_2 - \omega_2 t \right) - \sin(\varphi_2 - \omega_2 t) \right); \\
 -2R_1 \cos \left(\frac{0,5R_1}{R_1 - r} \varphi_1 \right) \omega_1 &= 2R_2 \cos \left(\frac{0,5R_2}{R_2 + r} \varphi_2 \right) \omega_2;
 \end{aligned}$$

Упростим второе уравнение системы (5)

$$\sin \left[\frac{0,5(2r-R_1)}{R_1-r} \varphi_1 + \frac{0,5(2r+R_2)}{R_2+r} \varphi_2 + \omega_1 t - \omega_2 t \right] = 0; \quad (6)$$

Первое уравнение системы (5), в котором приравнены два вектора, можно представить в виде пары скалярных уравнений

$$\begin{aligned} (R_1-r) \cos \left(\frac{r}{R_1-r} \varphi_1 + \omega_1 t \right) + r \cos(\varphi_1 - \omega_1 t) = \\ = R_1 + R_2 - (R_2+r) \cos \left(\frac{r}{R_2+r} \varphi_2 - \omega_2 t \right) + \\ + r \cos(\varphi_2 - \omega_2 t); \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} (R_1-r) \sin \left(\frac{r}{R_1-r} \varphi_1 + \omega_1 t \right) - r \sin(\varphi_1 - \omega_1 t) = \\ = (R_2+r) \sin \left(\frac{r}{R_2+r} \varphi_2 - \omega_2 t \right) - r \sin(\varphi_2 - \omega_2 t). \end{aligned}$$

В начальный момент времени $t = 0$ все углы равны нулю и уравнения (5), которым должны удовлетворять уравнения кривых, указанные в выражениях (1), справедливы при угловой скорости

$$\omega_2 = -\frac{R_1}{R_2} \omega_1. \quad (8)$$

Рассмотрим третье из уравнений системы (5). Очевидно, что оно справедливо для всех значений углов φ_1 и φ_2 при условии выполнения равенства

$$\frac{R_1}{R_1-r} \varphi_1 = -\frac{R_2}{R_2+r} \varphi_2. \quad (9)$$

Из соотношения (9) следует, что

$$\varphi_2 = -\frac{(R_2+r)R_1}{(R_1-r)R_2} \varphi_1. \quad (10)$$

Подставляя выражение (10) в уравнение (6), получаем

$$\sin \left[\frac{r(R_2-R_1)-R_1R_2}{(R_1-r)R_2} \varphi_1 + \frac{R_1+R_2}{R_2} \omega_1 t \right] = 0. \quad (11)$$

Из формулы (11) находим

$$\varphi_1 = -\frac{(R_1-r)(R_1+R_2)}{r(R_2-R_1)-R_1R_2} \omega_1 t. \quad (12)$$

Нетрудно показать, что при выборе функций $\varphi_2(t)$, $\varphi_1(t)$ и параметра ω_2 по формулам (10), (12) и (8) уравнения (7) будут неверными.

Таким образом, при использовании в качестве сопрягаемых кривых гипо- и эпициклоид невозможно достигнуть постоянной скорости ведомого ЗК.

Рассмотрим случай, когда известна лишь форма одной кривой

$$\mathbf{R}_1 = (x_1(\varphi_1), y_1(\varphi_1)).$$

Форма одной из кривых может быть произвольной [15], а форма другой определяется формой первой кривой и параметрами $R_1, R_2, \omega_1, \omega_2$.

В неподвижной системе координат при вращении первого и второго ЗК с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 предполагаемая точка первой кривой, вступающая в контакт с точкой второй кривой, описывается уравнением

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1(\varphi_1, t) = (x_1(\varphi_1), y_1(\varphi_1)) \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t & \sin \omega_1 t \\ -\sin \omega_1 t & \cos \omega_1 t \end{pmatrix} = \\ = (X_1, Y_1). \end{aligned}$$

Радиус-вектор точки второй кривой в неподвижной системе координат с центром в точке O_2 можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_2 = (X_1, Y_1) - (O_1O_2, 0) = \\ = (X_1 - O_1O_2, Y_1) = (X_2, Y_2), \end{aligned}$$

где $O_1O_2 = R_1 + R_2$.

Первая точка вращается вокруг оси O_1 с угловой скоростью ω_1 , вторая вокруг оси O_2 с угловой скоростью ω_2 . Их линейные скорости определяются выражениями

$$\mathbf{v}_1 = \omega_1 (-Y_1, X_1);$$

$$\mathbf{v}_2 = \omega_2 (-Y_2, X_2);$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = (\omega_2 Y_2 - \omega_1 Y_1, -\omega_2 X_2 + \omega_1 X_1) = \\ = ((\omega_2 - \omega_1) Y_1, -(\omega_2 - \omega_1) X_1 + \omega_2 O_1O_2). \end{aligned}$$

Пусть $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ является вектором общей нормали к кривым M_1 и M_2 . Тогда проекции скоростей первого и второго ЗК на этот вектор должны быть одинаковыми, т. е.

$$(\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)) = 0.$$

Из этого равенства следует, что

$$\mathbf{n} = \frac{1}{k} ((\omega_2 - \omega_1) X_1 - \omega_2 O_1O_2, (\omega_2 - \omega_1) Y_1);$$

$$k = \sqrt{[(\omega_2 - \omega_1) X_1 - \omega_2 O_1O_2]^2 + [(\omega_2 - \omega_1) Y_1]^2}; \quad (13)$$

$$k\mathbf{n} = (\omega_2 - \omega_1)(X_1, Y_1) - (\omega_2 O_1O_2, 0).$$

Из последнего равенства получаем

$$(X_1, Y_1) - \frac{k}{\omega_2 - \omega_1} \mathbf{n} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} O_1 O_2, 0 \right). \quad (14)$$

Таким образом, прямая, проведенная через общую точку в направлении общей нормали, делит расстояние между осями в отношении, обратно пропорциональном угловым скоростям. Это утверждение представляет содержание основной теоремы зацепления (теорема Виллиса).

Из равенства (14) следует, что расстояние от точки O_1 до точки пересечения общей нормали

$$R_1 = \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} O_1 O_2.$$

Выражения (13) показывают, что в общей точке вектор нормали к первой кривой есть функция координат этой же точки. Если исходить из этого, угол $\varphi_1(t)$, определяющий координаты точки кривой M_1 в подвижной системе координат, в которой получено уравнение кривой M_1 , является решением уравнения, основанного на том, что векторы $k\mathbf{n}$ и $(dx_1(\varphi_1)/d\varphi_1, dy_1(\varphi_1)/d\varphi_1)$ ортогональны.

Вектор $k\mathbf{n}$ в подвижной системе координат описывается уравнениями

$$k\mathbf{n} = (\omega_2 - \omega_1)(x_1(\varphi_1), y_1(\varphi_1)) - (\omega_2 O_1 O_2, 0) \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t & -\sin \omega_1 t \\ \sin \omega_1 t & \cos \omega_1 t \end{pmatrix};$$

$$k\mathbf{n} = ((\omega_2 - \omega_1)x_1(\varphi_1) - \omega_2 O_1 O_2 \cos \omega_1 t, (\omega_2 - \omega_1)y_1(\varphi_1) + \omega_2 O_1 O_2 \sin \omega_1 t).$$

Таким образом, условия ортогональности векторов $k\mathbf{n}$ и $(dx_1(\varphi_1)/d\varphi_1, dy_1(\varphi_1)/d\varphi_1)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \frac{dx_1(\varphi_1)}{d\varphi_1} [(\omega_2 - \omega_1)x_1(\varphi_1) - \omega_2 O_1 O_2 \cos \omega_1 t] + \\ & + \frac{dy_1(\varphi_1)}{d\varphi_1} [(\omega_2 - \omega_1)y_1(\varphi_1) + \omega_2 O_1 O_2 \sin \omega_1 t] = 0; \\ & \frac{d}{d\varphi_1} (x_1(\varphi_1)^2 + y_1(\varphi_1)^2) = \\ & = 2R_1 \left(\frac{dx_1(\varphi_1)}{d\varphi_1} \cos \omega_1 t - \frac{dy_1(\varphi_1)}{d\varphi_1} \sin \omega_1 t \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Если решение уравнения (15) известно, т. е. известна функция $\varphi_1(t)$, то вторая кривая в системе координат, связанной со вторым ЗК, определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1(t) &= (x_1(\varphi_1(t)), y_1(\varphi_1(t))) \times \\ & \times \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t & \sin \omega_1 t \\ -\sin \omega_1 t & \cos \omega_1 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega_2 t & -\sin \omega_2 t \\ \sin \omega_2 t & \cos \omega_2 t \end{pmatrix} - \\ & - (O_1 O_2, 0) \begin{pmatrix} \cos \omega_2 t & -\sin \omega_2 t \\ \sin \omega_2 t & \cos \omega_2 t \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_2(t) &= (x_1(\varphi_1(t)), y_1(\varphi_1(t))) \times \\ & \times \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 - \omega_2)t & \sin(\omega_1 - \omega_2)t \\ -\sin(\omega_1 - \omega_2)t & \cos(\omega_1 - \omega_2)t \end{pmatrix} - \\ & - O_1 O_2 (\cos \omega_2 t, -\sin \omega_2 t). \end{aligned}$$

Вектор касательной к кривой описывается выражением

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{R}_2(t)}{dt} &= \frac{d\varphi_1(t)}{dt} \begin{pmatrix} \frac{dx_1(\varphi_1(t))}{d\varphi_1} & \frac{dy_1(\varphi_1(t))}{d\varphi_1} \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 - \omega_2)t & \sin(\omega_1 - \omega_2)t \\ -\sin(\omega_1 - \omega_2)t & \cos(\omega_1 - \omega_2)t \end{pmatrix} + \\ & + (\omega_1 - \omega_2)(x_1(\varphi_1(t)), y_1(\varphi_1(t))) \times \\ & \times \begin{pmatrix} -\sin(\omega_1 - \omega_2)t & \cos(\omega_1 - \omega_2)t \\ -\cos(\omega_1 - \omega_2)t & -\sin(\omega_1 - \omega_2)t \end{pmatrix} - \\ & - \omega_2 O_1 O_2 (-\sin \omega_2 t, -\cos \omega_2 t). \end{aligned}$$

В неподвижной системе координат этот вектор определяется выражением

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{R}_2(t)}{dt} &= \frac{d\varphi_1(t)}{dt} \begin{pmatrix} \frac{dx_1(\varphi_1(t))}{d\varphi_1} & \frac{dy_1(\varphi_1(t))}{d\varphi_1} \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t & \sin \omega_1 t \\ -\sin \omega_1 t & \cos \omega_1 t \end{pmatrix} + \\ & + (\omega_1 - \omega_2)(-Y_1, X_1) + \omega_2 O_1 O_2 (0, 1). \end{aligned} \quad (17)$$

В формуле (17) первый член является вектором, пропорциональным вектору, касательному к первой кривой в общей точке, т. е. ортогонален вектору нормали $k\mathbf{n}$. Используя формулу (13), легко проверить, что сумма второго и третьего членов также ортогональна вектору нормали $k\mathbf{n}$. Таким образом, вектор \mathbf{n} является общей нормалью к первой, заданной кривой, и ко второй, построенной в соответствии с выражением (16).

Рассмотрим два примера. В первом примере в качестве первой кривой выберем гипоциклоиду. Согласно формуле (4):

$$\begin{aligned}\frac{dx_g(\varphi)}{d\varphi} &= -r \left(\sin \frac{r}{R_1 - r} \varphi_1 + \sin \varphi_1 \right); \\ \frac{dy_g(\varphi)}{d\varphi} &= r \left(\cos \frac{r}{R_1 - r} \varphi_1 - \cos \varphi_1 \right); \\ \frac{d}{d\varphi} (x_g(\varphi)^2 + y_g(\varphi)^2) &= -2R_1 r \sin \frac{R_1}{R_1 - r} \varphi_1.\end{aligned}$$

Для определения неизвестной функции $\varphi_1(t)$ следует решить уравнение ортогональности (15), которое в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned}\sin \frac{R_1}{R_1 - r} \varphi_1 &= \\ = 2 \sin \left(\frac{0,5R_1}{R_1 - r} \varphi_1 \right) \cos \left(\frac{r - 0,5R_1}{R_1 - r} \varphi_1 + \omega_1 t \right).\end{aligned}$$

Во втором примере в качестве первой кривой используем прямую, заданную уравнением

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - R_1 \operatorname{tg} \alpha,$$

где α — угол наклона прямой к оси абсцисс.

Соответствующие функции имеют вид

$$x(\varphi) = \varphi;$$

$$y(\varphi) = \varphi \operatorname{tg} \alpha - R_1 \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\frac{dx(\varphi)}{d\varphi} = 1;$$

$$\frac{dy(\varphi)}{d\varphi} = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varphi} (x^2(\varphi) + y^2(\varphi)) &= \frac{d}{d\varphi} (\varphi^2 + \varphi^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 2\varphi R_1 \operatorname{tg}^2 \alpha) = \\ = 2 \left(\varphi \frac{1}{\cos^2 \alpha} - R_1 \operatorname{tg}^2 \alpha \right).\end{aligned}$$

Для определения неизвестной функции $\varphi_1(t)$ следует решить уравнение ортогональности (15), которое в этом случае записывается как

$$\varphi \frac{1}{\cos^2 \alpha} - R_1 \operatorname{tg}^2 \alpha = R_1 (\cos \omega_1 t - \operatorname{tg} \alpha \sin \omega_1 t). \quad (18)$$

Решение уравнения (18) имеет вид

$$\varphi_1(t) = R_1 \cos^2 \alpha (\cos \omega_1 t - \operatorname{tg} \alpha \sin \omega_1 t) + R_1 \sin^2 \alpha.$$

В неподвижной системе координат кривая M_1 описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1(t) &= (\varphi_1(t), \operatorname{tg} \alpha \varphi_1(t) - R_1 \operatorname{tg} \alpha) \times \\ &\times \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t & \sin \omega_1 t \\ -\sin \omega_1 t & \cos \omega_1 t \end{pmatrix}; \\ x_1(t) &= R_1 \cos^2(\omega_1 t + \alpha) + \\ &+ R_1 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha \cos(\omega_1 t + \alpha) + R_1 \operatorname{tg} \alpha \sin \omega_1 t; \\ y_1(t) &= R_1 \cos(\omega_1 t + \alpha) \sin(\omega_1 t + \alpha) + \\ &+ R_1 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha \sin(\omega_1 t + \alpha) - R_1 \operatorname{tg} \alpha \cos \omega_1 t.\end{aligned}$$

Если ввести переменную $\varphi_\varphi = \omega_1 t$, то уравнения кривой преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned}x_1(\varphi_\varphi) &= R_1 \cos^2(\varphi_\varphi + \alpha) + \\ &+ R_1 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha \cos(\varphi_\varphi + \alpha) + R_1 \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi_\varphi; \\ y_1(\varphi_\varphi) &= R_1 \cos(\varphi_\varphi + \alpha) \sin(\varphi_\varphi + \alpha) + \\ &+ R_1 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha \sin(\varphi_\varphi + \alpha) - R_1 \operatorname{tg} \alpha \cos \varphi_\varphi.\end{aligned}$$

Вторая кривая в собственной системе координат будет иметь вид

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_2(t) &= (\varphi_1(t), \operatorname{tg} \alpha \varphi_1(t) - R_1 \operatorname{tg} \alpha) \times \\ &\times \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 - \omega_2)t & \sin(\omega_1 - \omega_2)t \\ -\sin(\omega_1 - \omega_2)t & \cos(\omega_1 - \omega_2)t \end{pmatrix} - \\ &- O_1 O_2 (\cos \omega_2 t, -\sin \omega_2 t).\end{aligned}$$

Выводы

1. Получены уравнения, которым должны удовлетворять центроиды, чтобы выполнялось условие постоянства угловых скоростей.

2. Показано, что эвольвента полностью отвечает условиям, необходимым для передачи вращения с постоянным передаточным отношением.

3. Установлено, что при использовании в качестве сопрягаемых кривых гипо- и эпициклоид невозможно достигнуть постоянного передаточного отношения.

4. Для варианта, когда задана лишь форма первой кривой, получены уравнения, определяющие форму второй кривой, обеспечивающей условие постоянства передаточного отношения.

5. Выведены уравнения, где в качестве первой кривой выбраны гипоциклоида и прямая.

Литература

- [1] Litvin F.L., Fuentes A. *Gear Geometry and Applied Theory*. Cambridge, Cambridge University Press, 2004. 800 p.
- [2] Stadtfeld H.J. *Handbook of Bevel and Hypoid Gears. Calculation Manufacturing Optimization*. NY, Rochester Institute of Technology, 1993. 251 p.
- [3] Colbourne J.R. *The Geometry of Involute Gears*. Berlin, Springer-Verlag, 1987. 526 p.
- [4] Panchuk K.L., Lyashkov A.A., Varepo L.G. Mathematical model of forming screw profiles of compressor machines and pumps. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 2017, vol. 87, iss. 8, no. art. 082035, doi: 10.1088/1755-1315/87/8/082035
- [5] Rattan S.S. *Theory of Machines*. Tata McGraw Hill Education Private Limited, 2009.
- [6] Norton R.L. *Design of Machinery*. McGraw Hill Education, 2011. 879 p.
- [7] Buckingham E. *Analytical Mechanics of Gears*. McGraw-Hill Book Co., 1949. 546 p.
- [8] Coy J.J., Townsend D.P., Zaretsky E.V. Gearing. *NASA Scientific and Technical Information Branch, NASA-RP-1152*, 1985, AVSCOM Technical Report 84-C-15, 66 p.
- [9] Sclater N. *Gears: devices, drives and mechanisms. Mechanisms and Mechanical Devices Sourcebook*. New York, McGraw Hill, 2011, pp. 131–178.
- [10] Бабичев Д.Т., Волков А.Э. История развития теории зубчатых передач. *Вестник научно-технического развития*, 2015, № 5(93), с. 25–42.
- [11] Radzevich S.P. *Dudley's Handbook of practical gear design and manufacture*. CRC Press, 2016. 629 p.
- [12] Чебышев П.Л. *Избранные труды*. Москва, Изд-во АН СССР, 1955. 926 с.
- [13] Литвин Ф.Л. *Теория зубчатых зацеплений*. Москва, Наука, 1968. 584 с.
- [14] Савелов А.А. *Плоские кривые. Систематика, свойства, применения (справочное руководство)*. Москва, Физматгиз, 1960. 293 с.
- [15] Кудрявцев В.Н. *Зубчатые передачи*. Москва, Ленинград, Машгиз, 1957. 263 с.

References

- [1] Litvin F.L., Fuentes A. *Gear Geometry and Applied Theory*. Cambridge, Cambridge University Press, 2004. 800 p.
- [2] Stadtfeld H.J. *Handbook of Bevel and Hypoid Gears. Calculation Manufacturing Optimization*. NY, Rochester Institute of Technology, 1993. 251 p.
- [3] Colbourne J.R. *The Geometry of Involute Gears*. Berlin, Springer-Verlag, 1987. 526 p.
- [4] Panchuk K.L., Lyashkov A.A., Varepo L.G. Mathematical model of forming screw profiles of compressor machines and pumps. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 2017, vol. 87, iss. 8, no. art. 082035, doi: 10.1088/1755-1315/87/8/082035
- [5] Rattan S.S. *Theory of Machines*. Tata McGraw Hill Education Private Limited, 2009.
- [6] Norton R.L. *Design of Machinery*. McGraw Hill Education, 2011. 879 p.
- [7] Buckingham E. *Analytical Mechanics of Gears*. McGraw-Hill Book Co., 1949. 546 p.
- [8] Coy J.J., Townsend D.P., Zaretsky E.V. Gearing. *NASA Scientific and Technical Information Branch, NASA-RP-1152*, 1985, AVSCOM Technical Report 84-C-15, 66 p.
- [9] Sclater N. *Gears: devices, drives and mechanisms. Mechanisms and Mechanical Devices Sourcebook*. New York, McGraw Hill, 2011, pp. 131–178.
- [10] Babichev D.T., Volkov A.E. History of the development of the gears theory. *Vestnik nauchno-tehnicheskogo razvitiya*, 2015, no. 5(93), pp. 25–42.
- [11] Radzevich S.P. *Dudley's Handbook of practical gear design and manufacture*. CRC Press, 2016. 629 p.
- [12] Chebyshev P.L. *Izbrannyye trudy* [Selected Works]. Moscow, AN SSSR publ., 1955. 926 p.
- [13] Litvin F.L. *Teoriya zubchatykh zatsepleniy* [Theory of gearing]. Moscow, Nauka publ., 1968. 584 p.
- [14] Savelov A.A. *Ploskiye krivyye. Sistematika, svoystva, primeneniya (spravochnoye rukovodstvo)* [Flat curves. Systematics, properties, applications (reference manual)]. Moscow, Fizmatgiz publ., 1960. 293 p.
- [15] Kudryavtsev V.N. *Zubchatyye peredachi* [Gears]. Moscow, Leningrad, Mashgiz publ., 1957. 263 p.

Статья поступила в редакцию 08.11.2018

Информация об авторе

ИОФФЕ Марк Львович — кандидат технических наук (США, Нью-Йорк, 2-я Авеню, д. 444, e-mail: ioffe.mark@gmail.com).

Information about the author

IOFFE Mark Lvovich — Candidate of Science (USA, New York, 2nd Ave., Bldg. 444, e-mail: ioffe.mark@gmail.com).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Иоффе М.Л. Об аналитическом подходе к выбору центроид в плоском зубчатом зацеплении. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2019, № 3, с. 40–50, doi: 10.18698/0536-1044-2019-3-40-50

Please cite this article in English as:

Ioffe M.L. On the Analytical Approach to the Selection of a Centroid in a Flat Gearing. *Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2019, no. 3, pp. 40–50, doi: 10.18698/0536-1044-2019-3-40-50



В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана
вышло в свет учебное пособие

И.Н. Алиева

«Термодинамика и электродинамика сплошных сред»

Рассмотрены различные аспекты механики поляризованных и проводящих сплошных тел и сред с учетом магнитных, электрических и тепловых эффектов. Изложение ведется в рамках общего подхода, базирующегося на термо- и электромеханическом вариационных принципах, которые позволяют находить условия равновесия, что невозможно с помощью принципов Гиббса и Планка. Полученные результаты применены к теории неравновесных процессов при выводе определяющих соотношений, необходимых для замыкания систем термоэлектромагнитодинамических уравнений. Пособие снабжено большим количеством задач, часть из них дополняет соответствующие главы, а часть является кратким изложением проведенных научных исследований.

Содержание учебного пособия соответствует курсу лекций, которые автор читает в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Для студентов и аспирантов технических университетов и вузов, преподавателей высшей школы, научных сотрудников, занимающихся техникой и физикой сплошных сред.

По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;
press@bmstu.ru; www.baumanpress.ru