

Машиностроение и машиноведение

УДК 004.896

doi: 10.18698/0536-1044-2019-9-7-19

Математическая модель распределенного проектирования прототипов в машиностроении

В.Ф. Белов^{1,3}, С.С. Гаврюшин², Ю.Н. Маркова³¹ МГУ им. Н.П. Огарева² МГТУ им. Н.Э. Баумана³ Центр проектирования инноваций АУ «Технопарк-Мордовия»

A Mathematical Model of Distributed Prototype Design in Mechanical Engineering

V.F. Belov^{1,3}, S.S. Gavryushin², Y.N. Markova³¹ Ogarev Mordovia State University, Director, Design Centre for Innovations — Technopark-Mordovia² Bauman Moscow State Technical University³ Design Centre for Innovations — Technopark-Mordovia

■ Полнофункциональные модели устройства, изготовленные в натуральную величину и максимально приближенные по характеристикам к массовому изделию, широко применяются в машиностроении для подтверждения возможности реализации новой идеи в реальном устройстве. Разработка и изготовление действующих прототипов — дорогостоящий процесс с существенно ограниченными временными и финансовыми ресурсами. Поэтому актуальным является создание эффективных инструментов автоматизации планирования процессов прототипирования на основе полных математических моделей, позволяющих учитывать влияние малых изменений технологических параметров на время и стоимость проектирования. Предложена математическая модель, разработанная на основе методов математического программирования и теории однородных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, учитывающая фактор ограниченности ресурсов и распределенный характер процесса прототипирования. В дальнейшем она также позволит применить теорию автоматов для моделирования и анализа влияния колебаний инновационного рынка на технологический процесс проектирования инноваций. Эти возможности реализуются в комплексе программ IDC Requirements Engineering, в архитектуру которого заложены стандарты открытой платформы PLM и идеи цифровых фабрик.

Ключевые слова: действующий прототип, математическая модель, распределенное проектирование, задача о назначениях, дифференциальные уравнения, оптимальная дорожная карта

■ Fully functional, full-scale models with characteristics close to those of mass-produced devices are widely employed in mechanical engineering to validate the possibility of implementing a new concept in the actual device. Prototype development and manufacturing is a costly process performed both with a limited time and financial constraints. Therefore, there is a need to create efficient automation tools for process planning in functional prototyping, based on full-scale mathematical models that allow

taking into consideration the influence of small variations in technological parameters on the development time and cost. The proposed model employs mathematical programming techniques and ordinary homogeneous differential equations with discontinuous right sides. It takes into account both the limited resources and the distributed nature of the prototyping process. Furthermore, the model potentially allows for application of the automata theory to simulate and analyse the influence of the innovation market fluctuations on the innovation design process. The described modelling capabilities are realized in the software package IDC Requirements Engineering that features both the open PLM platform standards and the concept of digital factories.

Keywords: functioning prototype, mathematical model, distributed design, assignment problem, differential equations, optimal roadmap

Программа «Цифровая экономика Российской Федерации» [1] предусматривает создание в ближайшее время цифровых платформ для организации цифрового взаимодействия субъектов (производителей и потребителей услуг), открытых для присоединения новых субъектов, а также позволяющих субъектам создавать и реализовывать внутри платформ собственные продукты и услуги.

По мнению большинства экспертов, примеров завершенных проектов по созданию цифровых платформ (целостных технологических сред) в машиностроении, где пользователь может конструировать для себя нужное ему дружественное окружение (технологическое, инструментальное, методическое, документальное, партнерское и т. п.), в России пока нет.

Вместе с тем нельзя не заметить уже существующие в стране наработки, в которых технологии промышленного интернета составляют основу производства продуктов и услуг, реализуя методологию «выращивания» недостающих видов обеспечений вокруг существующего технологического ядра.

В качестве примера развития концепции цифровой платформы можно привести рассмотренные в работах [2–5] системы, предназначенные для проектирования прототипов изделий приборо- и машиностроения, конкурирующих на инновационных рынках.

Одной из многочисленных программных систем, обеспечивающих платформенный подход к проектированию прототипов, может быть комплекс программ IDC Requirements Engineering, поддерживающий задачи управления ресурсами параллельно выполняемых проектов и их работ, начиная с анализа требований [3]. Необходимость в таком инструменте связана с особенностями технологии прототипирования изделий приборо- и машиностроения.

Действующий прототип устройства — это полнофункциональная модель устройства, изготовленная в натуральную величину, максимально приближенная по характеристикам к массовому изделию и предназначенная для подтверждения возможности реализации новой идеи в реальном устройстве.

В машино- и приборостроении прототип создают для тестирования функций и встроенного программного обеспечения продукта, окончательного выбора материалов и комплектующих, анализа электромагнитной совместимости, испытаний на механическую прочность и воздействие климата.

Разработка и изготовление прототипов — дорогостоящий процесс с существенно ограниченными временными, финансовыми ресурсами и, как правило, рассредоточенными компетенциями. Он аналогичен физическим процессам, происходящим в системах ограниченной мощности, когда небольшие колебания параметров могут вызвать значительные изменения фазовых переменных. Из этого вытекают требования к адекватности математических моделей для управления прототипированием.

Цель работы — исследование возможностей практического применения математической модели управления временными и финансовыми характеристиками процесса распределенного проектирования действующего прототипа, полученной на основе дифференциальных уравнений динамического баланса с разрывными правыми частями и методов математического программирования.

В качестве фазовых переменных нелинейного процесса разработки и реализации нового продукта удобно использовать финансовые характеристики в виде оборотных средств и объемов производства. Это исключает рассмотрение физических процессов преобразования идеи в продукт, считая, что процесс создания

продукта эквивалентен освоению планируемых на это средств.

Потеря скорости и увеличение стоимости прототипирования связаны прежде всего с нарушениями стабильности финансирования работ. В настоящее время для анализа этой проблемы применяют программные продукты, поддерживающие классические схемы управления проектами. Их функционал в основном настроен на календарное планирование ресурсов, в том числе при групповой реализации проектов.

Среди большого многообразия таких систем выделяются Microsoft Project, Spider Project, Primavera и Open Plan [4], причем Spider Project является российской разработкой [6]. В них использованы дискретные (табличные) модели для представления процессов и можно применять расчетные формулы, однако этого недостаточно для анализа быстро изменяющихся процессов. Эту проблему призван решить комплекс программ IDC Requirements Engineering, разрабатываемый на основе современных математических методов моделирования и оптимизации, в архитектуру которого заложены стандарты открытой платформы PLM [7], а также идеи виртуальных (цифровых) фабрик [8].

Структура процесса распределенного прототипирования. Необходимость быстрой проработки новой базовой функциональности, как правило, требует привлечения уникальных человеческих и технологических ресурсов, соответствующих масштабу и содержанию проекта. Свойством масштабирования обладают модели

прототипирования, основанные на распределении проектных и производственных задач на заданных множествах компетенций и технологий. В настоящее время такие модели становятся базой для создания комплексных решений в машино- и приборостроении [9–11].

На рис. 1 показана диаграмма модели распределенного проектирования прототипа, где ТЗ — техническое задание.

Фаза «Проектирование» включает в себя три стадии — разработку цифрового двойника, изготовление и испытание прототипа.

В общем случае ведущая проектная организация (интегратор) не располагает всеми необходимыми компетенциями и ресурсами (техническими, финансовыми, организационными) для покрытия множества работ по проекту. Поэтому она проводит разбивку требований на частные технические задания (ЧТЗ_{*i*}), их распределение по проектным организациям (ОРГ_{*i*}), включая собственные подразделения, интеграцию частей проекта в цифровой макет прототипа. Под цифровым макетом будем понимать совокупность электронных документов, описывающих прототип и сгенерированных в стандартизированной среде разработки PLM.

Далее следует спецификация (СП_{*i*}) интегрированного решения, подбор предприятий (ПР_{*i*}) для изготовления и поставки узлов и комплектующих, контрактация и отверточное производство прототипа.

На следующем этапе выделяют виды исследовательских испытаний прототипа и разрабатывают их методики (МЕТ_{*i*}). Далее распределя-

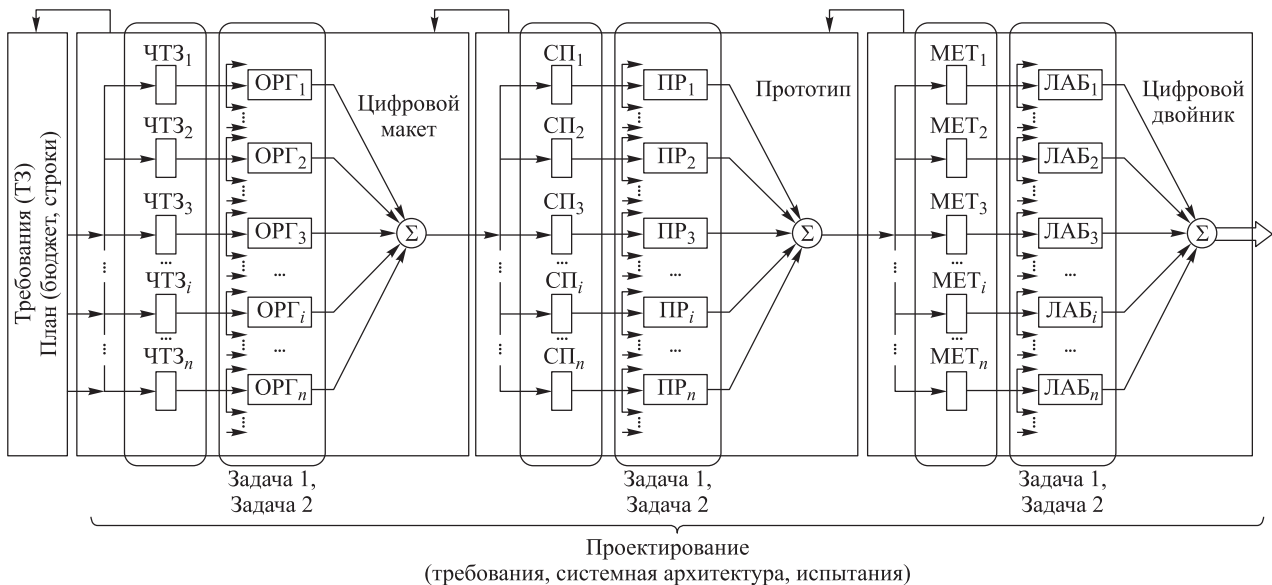


Рис. 1. Диаграмма модели распределенного проектирования

ют работы по профильным испытательным лабораториям (ЛАБ).

Для проектирующей организации процесс прототипирования заканчивается реализацией на инновационном рынке цифрового двойника продукта и его сопровождением. Под цифровым двойником (близнецом) будем понимать программный аналог прототипа, моделирующий внутренние процессы, технические характеристики и поведение реального объекта в условиях воздействий помех и окружающей среды, а также отражающий историю его разработки, процедуры испытания и сопровождения [12, 13].

Для цифровой реализации модели, приведенной на рис. 1, необходимо сформулировать и осуществить постановку задач назначения исполнителей работ (задача 1) и анализа динамики процессов проектирования (задача 2) при заданных критериях и ограничениях. Рассмотрим каждую из этих задач в отдельности.

Назначение исполнителей работ. Сформулируем задачу распределения работ как задачу о назначениях с дополнительными ограничениями [14]. Для данного случая общая характеристика качества распределения работ по исполнителям может быть сформулирована следующим образом:

минимизировать

$$V(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m sk_{ij} u_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

при ограничениях

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} = m; \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1; \\ c_{ij} \leq c_j^{\max}; \quad e_{ij} \geq e_j^{\min}; \\ t_{ij} \leq t_j^{\max}; \quad r_{ij} \leq r_j^{\max}; \\ x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при назначении } i\text{-го исполнителя} \\ & \text{на выполнение } j\text{-й работы;} \\ 0 & \text{при невозможности назначения} \\ & i\text{-го исполнителя на выполнение } j\text{-й работы;} \end{cases} \\ i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}, \end{array} \right. \quad (2)$$

где $V(\mathbf{X})$ — безразмерная величина ($\mathbf{X} = (x_{ij})$ — матрица назначений размером $n \times m$); x_{ij} — параметр, отражающий факт назначения или невозможности назначения i -го исполнителя на выполнение j -й работы; n — списочное количество исполнителей работ в базе данных пред-

приятия-интегратора; m — списочное количество работ; sk_{ij} — элементы матрицы \mathbf{SK} размером $n \times m$, представляющие собой интегральные коэффициенты, обобщающие характеристики c_{ij} , e_{ij} , t_{ij} , r_{ij} ; c_{ij} — элементы матрицы \mathbf{C} размером $n \times m$, отображающей стоимость выполнения j -й работы i -м исполнителем; c_j^{\max} — максимальная стоимость выполнения j -й работы; e_{ij} — элементы матрицы \mathbf{E} размером $n \times m$, отображающей компетенции i -го исполнителя по выполнению j -й работы; e_j^{\min} — минимальная компетенция, необходимая для выполнения j -й работы; t_{ij} — элементы матрицы \mathbf{T} размером $n \times m$, отображающей время выполнения j -й работы i -м исполнителем; t_j^{\max} — максимальное время, необходимое для выполнения j -й работы; r_{ij} — элементы матрицы \mathbf{R} размером $n \times m$, отображающей оценку риска невыполнения j -й работы i -м исполнителем; r_j^{\max} — максимально допустимое значение оценки риска невыполнения j -й работы; u_{ij} — элементы матрицы \mathbf{U} размером $n \times m$, отображающей соответствие характеристик i -го исполнителя заданным ограничениям (2),

$$u_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при соответствии характеристики} \\ & i\text{-го исполнителя ограничениям (2);} \\ \infty & \text{при несоответствии характеристики} \\ & i\text{-го исполнителя ограничениям (2).} \end{cases}$$

Решением задачи (1) при ограничениях (2) является оптимальная матрица назначений $\mathbf{X}^* = (x_{ij}^*)$ размером $n \times m$. Она представляет собой или схему распределенного проектирования на заданном множестве организаций-исполнителей, или схему распределенного изготовления прототипа на заданном множестве предприятий-изготовителей и поставщиков, или схему распределения испытаний на заданном множестве испытательных лабораторий.

К исходным данным задачи 1 относятся:

- матрица характеристик исполнителей $\mathbf{B} = (b_{kji})$ размером $4 \times m \times n$; строки этого массива соответственно отображают стоимость, компетенции, время выполнения и оценку риска невыполнения i -м предприятием j -й работы;
- матрица характеристик работ $\mathbf{Z} = (z_{ij})$ размером $4 \times m \times n$;
- весовые коэффициенты v_c, v_e, v_t, v_r , такие, что $v_c + v_e + v_t + v_r = 1$.

Для определения матрицы $\mathbf{C} = (c_{ij})$ необходимо из матрицы характеристик исполнителей $\mathbf{B} = (b_{kji})$ выбрать элементы, отражающие стои-

мость выполнения работ, и занести их в матрицу $C = (c_{ij})$ так, чтобы $c_{ij} = b_{1ji}$. Аналогично формируются матрицы $E (e_{ij} = b_{2ji})$, $T (t_{ij} = b_{3ji})$ и $R (r_{ij} = b_{4ji})$.

Для создания матрицы $U = (u_{ij})$ размером $n \times m$ необходимо определить исполнителей, характеристики которых соответствуют ограничениям (2), а именно: $c_{ij} \leq c_j^{\max}$; $e_{ij} \geq e_j^{\min}$; $t_{ij} \leq t_j^{\max}$; $r_{ij} \leq r_j^{\max}$.

Если характеристики i -го исполнителя соответствуют ограничениям (2), то элемент $u_{ij} = 1$, а если не соответствуют, то $u_{ij} = \infty$. Таким образом определяется список исполнителей работ, характеристики которых удовлетворяют требованиям.

Если все элементы столбца матрицы $U = (u_{ij})$ равны бесконечности, то необходимо пересмотреть характеристики, при которых работа считается успешно выполненной (столбец матрицы $Z = (z_{ij})$), или расширить базу данных потенциальных исполнителей.

Матрица $SK = (sk_{ij})$ представляет собой свертку параметров c_{ij} , e_{ij} , t_{ij} , r_{ij} в обобщенный параметр

$$sk_{ij} = v_c \frac{c_{ij} - \min C}{\max C - \min C} + \left(1 - v_e \frac{e_{ij} - \min E}{\max E - \min E} \right) + \quad (3)$$

$$+ v_t \frac{t_{ij} - \min T}{\max T - \min T} + v_r \frac{r_{ij} - \min R}{\max R - \min R}.$$

При решении задачи 1 необходимо найти такого i -го исполнителя для выполнения j -работы, чтобы произведение $sk_{ij}u_{ij}$ было минимальным. Если характеристики исполнителя не соответствуют ограничениям (2) ($u_{ij} = \infty$), то $sk_{ij}u_{ij} = \infty$ и элементу x_{ij}^* присваивается значение нуль. Как только будет найден исполнитель для выполнения j -й работы с минимальным значением $sk_{ij}u_{ij}$, соответствующий элемент матрицы назначений $x_{ij}^* = 1$. Все остальные $x_{ij}^* = 0$.

В результате получим оптимальную матрицу назначений X^* , которая является решением задачи 1.

Плановый бюджет производства работ вычисляется по формуле

$$C_{пл} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}^*.$$

Анализ динамики процессов параллельного проектирования. Как показано на рис. 1,

к процессам в фазе проектирования относятся инженерия требований (ЧТЗ i , СП i , МЕТ i), инженерия системной архитектуры (разработка элементов цифрового макета в проектных организациях (ОРГ i), изготовление элементов прототипа на предприятиях (ПР i) и инженерия испытаний прототипа в лабораториях (ЛАБ i). Параллельная реализация процессов осуществляется при разработке цифрового макета и изготовлении прототипа. Испытания прототипа проводятся последовательно в выбранных лабораториях.

Определимся с фазовыми переменными в процессах разработки и изготовления прототипа. Эти процессы обладают следующими свойствами:

- каждый i -й процесс ($i = 1, 2, \dots, n$) реализует один продукт в соответствии с дорожной картой ДК $_i$;
- время реализации продукта эквивалентно периоду освоения планируемых на это финансовых средств;
- план финансирования соответствует финансовым возможностям интегратора проекта;
- скорость освоения планируемых финансовых средств определяется значениями внутренних параметров исполнителей проекта (ОРГ $_i$, ПР $_i$, ЛАБ $_i$).

Введем в рассмотрение две фазовые переменные — M_i и V_i . Переменная M_i обозначает объемы денежных средств i -го исполнителя, используемые для реализации ДК $_i$ в момент времени t , а V_i — объемы выполненных работ (в денежном эквиваленте) i -го исполнителя по ДК $_i$ в момент времени t .

Для определения последовательности выполнения работ каждому этапу дорожной карты поставим в соответствие индексы предшествующего ($ind_{ih}^{пред}$) и последующего ($ind_{ih}^{посл}$) этапов.

На основе классического дифференциального уравнения динамического баланса [15]

$$x = Q - R, Q \geq 0, R \geq 0, \quad (4)$$

где $x = x(t)$ — изучаемая величина; $Q = Q(t, x)$ — источник; $R = R(t, x)$ — потери, составим систему дифференциальных уравнений для i -го исполнителя, описывающую процесс движения финансовых средств в соответствии с ДК $_i$.

Переменными $x(t)$ в уравнении (4) являются $M_i = M_i(t)$ и $V_i = V_i(t)$. Таким образом, для i -го исполнителя система дифференциальных уравнений второго порядка имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dM_i}{dt} = Q_{M_i} - R_{M_i}; \\ \frac{dV_i}{dt} = Q_{V_i} - R_{V_i}, \end{cases} \quad (5)$$

где Q_{M_i} — финансовые ресурсы, вкладываемые в процессы проектирования или изготовления (далее — работы) в момент времени t ; R_{M_i} — денежные средства, потраченные на работы в момент времени t ; Q_{V_i} — финансовые ресурсы, потраченные на выполнение этапов ДК; R_{V_i} — потеря денежных средств, предназначенных на выполнение ДК.

Вычислим производную dM_i/dt ($i=1, 2, \dots, n$), описывающую скорость изменения (движения) денежных средств i -го исполнителя, используемых для реализации ДК.

Введем в рассмотрение матрицу $C^{\text{опл}} = (c_{ij}^{\text{опл}})$, элементы которой показывают количество оплаченных исполнителем работ в момент времени $t_j^{\text{опл}}$, а также смещенную единичную импульсную функцию

$$\delta(t - t_j^{\text{опл}}) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = t_j^{\text{опл}}; \\ 0 & \text{при } t \neq t_j^{\text{опл}}. \end{cases}$$

Тогда в уравнении (5) математическая модель источника Q_{M_i} будет иметь вид

$$Q_{M_i} = \sum_{j=1}^w \delta(t - t_j^{\text{опл}}) c_{ij}^{\text{опл}}. \quad (6)$$

Затраты организации-интегратора в момент времени t можно представить как сумму затрат по текущим этапам дорожной карты:

$$R_{M_i} = \sum_{h=1}^G \delta(t - t') \alpha_{ih} \frac{M_i}{\tau_i}.$$

Здесь G — максимальное количество этапов ДК, отражающее отношение затрат на выполнение h -го этапа ДК к общей сумме затрат на выполнение ДК; $h = 1, \dots, G$; α_{ih} — элемент матрицы A размером $n \times G$; τ_i — элемент вектора $\tau = (\tau_i)$ размером n , отражающий критический путь выполнения ДК;

$$\delta(t - t') = \begin{cases} \infty & \text{при } t = t'; \\ 0 & \text{при } t \neq t'; \end{cases}$$

$$t' = \begin{cases} t & \text{при } t_{ih}^{\text{нач}} \leq t \leq t_{ih}^{\text{кон}}; \\ -1 & \text{при } t_{ih}^{\text{нач}} > t, t > t_{ih}^{\text{кон}}, \end{cases}$$

где $t_{ih}^{\text{нач}}$ и $t_{ih}^{\text{кон}}$ — элементы матрицы $T^{\text{нач}}$ размером $n \times G$, отражающие время начала и завершения выполнения h -го этапа ДК.

Если исполнитель использует в проекте собственные средства K_i , то

$$R_{M_i} = \sum_{h=1}^G \delta(t - t') \alpha_{ih} \frac{M_i}{\tau_i} + K_i. \quad (7)$$

После подстановки в первое уравнение системы (5) выражений (6) и (7) получим

$$\frac{dM_i}{dt} = - \sum_{h=1}^G \delta(t - t') \alpha_{ih} \frac{M_i}{\tau_i} + \sum_{j=1}^w \delta(t - t_j^{\text{опл}}) c_{ij}^{\text{опл}} - K_i. \quad (8)$$

Вычислим производную dV_i/dt , $i = 1, 2, \dots, n$. Источником Q_{V_i} являются финансовые ресурсы, потраченные на выполнение этапов ДК, т. е. в системе уравнений (5)

$$Q_{V_i} = \beta_i \sum_{h=1}^G \delta(t - t') \alpha_{ih} \frac{M_i}{\tau_i}, \quad (9)$$

где β_i — коэффициент рентабельности i -го исполнителя.

При $R_{V_i} \neq 0$ происходит потеря денежных средств, потраченных на выполнение ДК. Исходя из допущения, что процесс создания продукта эквивалентен освоению запланированных на это средств, считаем, что при $R_{V_i} \neq 0$ продукт не соответствует техническому заданию. Поэтому рассматриваем случай $R_{V_i} = 0$.

Тогда с учетом выражения (9) второе уравнение системы (5) примет вид

$$\frac{dV_i}{dt} = \beta_i \sum_{h=1}^G \delta(t - t') \alpha_{ih} \frac{M_i}{\tau_i}. \quad (10)$$

Объединяя формулы (8) и (10), получаем n систем линейных однородных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями [16]:

$$\begin{cases} \frac{dM_i}{dt} = - \sum_{h=1}^G \delta(t - t') \alpha_{ih} \frac{M_i}{\tau_i} + \sum_{j=1}^w \delta(t - t_j^{\text{опл}}) c_{ij}^{\text{опл}} - K_i; \\ \frac{dV_i}{dt} = \beta_i \sum_{h=1}^G \delta(t - t') \alpha_{ih} \frac{M_i}{\tau_i}, \quad i=1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (11)$$

Для решения системы уравнений (11) необходимо сформировать матрицу $C^{опл} = (c_{ij}^{опл})$ с учетом следующих ограничений:

$$\sum_{i=1}^n c_{ij}^{опл} \leq c_j^{max};$$

$$\sum_{j=1}^w c_{ij}^{опл} = \sum_{h=1}^G c_{ih}, \tag{12}$$

т. е. для j -го момента времени ($j = 1, \dots, w$) суммарное перечисление средств исполнителям не должно превышать возможности предприятия-интегратора, а для i -го исполнителя ($i = 1, 2, \dots, n$) суммарная оплата всех работ должна равняться суммарной стоимости всех этапов ее выполнения.

Ограничениям (12) соответствует множество решений системы дифференциальных уравнений (11), поэтому необходимо сформулировать критерий отбора варианта решения. Таким критерием для нашей задачи анализа

динамики процессов параллельного проектирования является минимальное время выполнения всех работ.

Исходными данными для решения задачи 2 являются:

- матрица финансовых характеристик исполнителей

$$ИСП = \begin{pmatrix} M_1 & \tau_1 & \beta_1 & K_1 \\ M_2 & \tau_2 & \beta_2 & K_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_n & \tau_n & \beta_n & K_n \end{pmatrix};$$

- матрица дорожных карт работ $ДК = (дк_{khi})$, $k = 1, 2, \dots, 6, h = 1, 2, \dots, G, i = 1, 2, \dots, n$:

$$ДК_i = \begin{pmatrix} ДК_{11i} & ДК_{12i} & \dots & ДК_{1hi} & \dots & ДК_{1Gi} \\ ДК_{21i} & ДК_{22i} & \dots & ДК_{2hi} & \dots & ДК_{2Gi} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ДК_{61i} & ДК_{62i} & \dots & ДК_{6hi} & \dots & ДК_{6Gi} \end{pmatrix}.$$

Таблица 1

Характеристики работ

Характеристика	ЧТЗ ₁	ЧТЗ ₂
Максимальная стоимость c_j^{max} , тыс. руб.	600,0	300,00
Минимальная компетенция e_j^{min}	5,0	3,00
Максимальное время t_j^{max} , месяцы	4,0	2,00
Риск невыполнения r_j^{max}	0,1	0,15

Таблица 2

Характеристики организаций-исполнителей

Характеристика	ЧТЗ ₁	ЧТЗ ₂
ОРГ ₁		
Стоимость выполнения работы c_{1j} , тыс. руб.	500	350,00
Компетенция e_{1j}	5,00	3,00
Время выполнения t_{1j} , месяцы	3,00	1,50
Риск невыполнения r_{1j}	0,05	0,10
ОРГ ₂		
Стоимость выполнения работы c_{2j} , тыс. руб.	550,00	270,00
Компетенция e_{2j}	4,00	3,00
Время выполнения t_{2j} , месяцы	4,00	1,70
Риск невыполнения r_{2j}	0,30	0,15
ОРГ ₃		
Стоимость выполнения работы c_{3j} , тыс. руб.	400,00	300,00
Компетенция e_{3j}	5,00	3,00
Время выполнения t_{3j} , месяцы	4,00	1,80
Риск невыполнения r_{3j}	0,10	0,10

Первый слой трехмерной матрицы ДК отражает стоимость работ h -го этапа i -й дорожной карты, второй — время начала работ по этапу, третий — время окончания работ по этапу. Четвертый слой показывает отношение затрат на выполнение h -го этапа ДК $_i$ к общей сумме затрат на выполнение ДК $_i$, пятый — индекс предшествующего этапа i -й дорожной карты, шестой — индекс последующего этапа i -й дорожной карты.

• матрица финансовых возможностей предприятия-интегратора ИНТ = (инт $_{lj}$), $l = 1, 2, j = 1, 2, \dots, w$:

$$\text{ИНТ} = \begin{pmatrix} c_1^{\max} & c_2^{\max} & \dots & c_m^{\max} \\ t_1^{\text{опл}} & t_2^{\text{опл}} & \dots & t_m^{\text{опл}} \end{pmatrix}.$$

Пример реализации модели распределенного проектирования. Рассмотрим простейший численный пример планирования разработки цифрового макета в соответствии с диаграммой, изображенной на рис. 1. Пусть на первом шаге планирования необходимо из трех имеющихся в базе данных проектных организаций выбрать две подходящие для выполнения заданных ЧТЗ (задача 1), а на втором шаге — сформировать дорожную карту и график финансирования работ всего проекта, при которых суммарное время получения продукта (в данном случае — цифрового макета) будет минимальным (задача 2).

Характеристики работ по ЧТЗ $_1$ и ЧТЗ $_2$, а также организаций-исполнителей ОРГ $_1$, ОРГ $_2$ и ОРГ $_3$ приведены в табл. 1 и 2 соответственно.

Сформируем исходные данные для задачи 2:

$$\mathbf{B}_{i=1} = \begin{pmatrix} 500 & 350 \\ 5 & 3 \\ 3 & 1,5 \\ 0,05 & 0,1 \end{pmatrix}; \mathbf{B}_{i=2} = \begin{pmatrix} 550 & 270 \\ 4 & 3 \\ 4 & 1,7 \\ 0,3 & 0,15 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B}_{i=3} = \begin{pmatrix} 400 & 300 \\ 5 & 3 \\ 4 & 1,8 \\ 0,1 & 0,1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 600 & 300 \\ 5 & 3 \\ 4 & 2 \\ 0,1 & 0,15 \end{pmatrix}; v_c = 0,4; v_e = 0,2; v_l = 0,2; v_r = 0,2.$$

Тогда

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 500 & 350 \\ 550 & 270 \\ 600 & 300 \end{pmatrix}; \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}; \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 3 & 1,5 \\ 4 & 1,7 \\ 4 & 1,8 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,1 \\ 0,3 & 0,15 \\ 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Применив выражение (2), получим

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & \infty \\ \infty & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. характеристики первой организации не соответствуют стоимостным ограничениям для выполнения ЧТЗ $_2$, а характеристики второй организации — ограничениям (2) по компетенциям и рискам.

Согласно формуле (3):

$$\mathbf{SK} = \begin{pmatrix} 1,199 & 1,137 \\ 1,439 & 1,024 \\ 1,440 & 1,100 \end{pmatrix}.$$

Выделив минимальные элементы в столбцах, получим оптимальную матрицу назначений

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для выполнения ЧТЗ $_1$ исполнителем назначено первое предприятие, для выполнения ЧТЗ $_2$ — второе. При этом

$$V(\mathbf{X}^*) = 1,199 \cdot 1 \cdot 1 + 1,024 \cdot 1 \cdot 1 = 2,223;$$

$$C_{\text{пл}} = 500 \cdot 1 + 350 \cdot 0 + 550 \cdot 0 + 270 \cdot 1 + 600 \cdot 0 + 300 \cdot 0 = 770 \text{ тыс. руб.}$$

Имеем

$$\mathbf{DK}_1 = \begin{pmatrix} 180 & 120 & 80 & 120 \\ 1 & 41 & 61 & 71 \\ 40 & 70 & 80 & 90 \\ 0,5 & 0,6 & 0,4 & 0,3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{DK}_2 = \begin{pmatrix} 170 & 100 & 0 & 0 \\ 1 & 41 & 0 & 0 \\ 40 & 60 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Рассмотрим решение задачи 2. Пусть заданы дорожная карта выполнения работ по проекту при

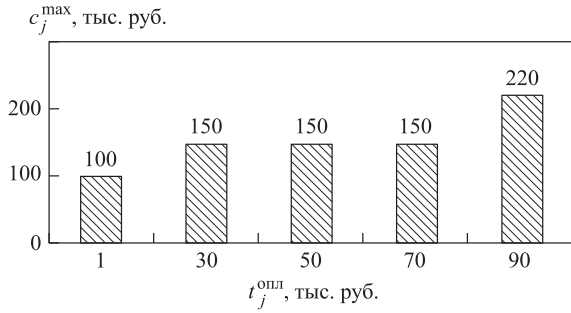


Рис. 2. График допустимого финансирования работ по проекту предприятием-интегратором

$n = 2, G = 4$, приведенная в табл. 3, а также график их допустимого финансирования предприятием-интегратором, показанный на рис. 2. Характеристики исполнителей представлены в табл. 4.

$$ИИТ = \begin{pmatrix} 100 & 150 & 150 & 150 & 220 \\ 1 & 30 & 50 & 70 & 90 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получим

$$C = \begin{pmatrix} 180 & 120 & 80 & 120 \\ 170 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad T_{нач} = \begin{pmatrix} 1 & 41 & 61 & 71 \\ 1 & 41 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Таблица 3

Дорожная карта выполнения работ по проекту

ЧТЗ	Наименование этапа	Расчетные промежутки (t), соответствующие им дни и стоимость этапов (тыс. руб.)								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
		1-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80	81-90
ЧТЗ ₁	Этап 1	180								
	Этап 2					120				
	Этап 3							80		
	Этап 4								120	
ЧТЗ ₂	Этап 1	170								
	Этап 2					100				

Таблица 4

Характеристики исполнителей

Исполнитель	M_i , тыс. руб.	τ_i , дни	β_i	K_i , тыс. руб.
ОРГ ₁	1000	90	1,3	1,5
ОРГ ₂	700	90	1,4	1,0

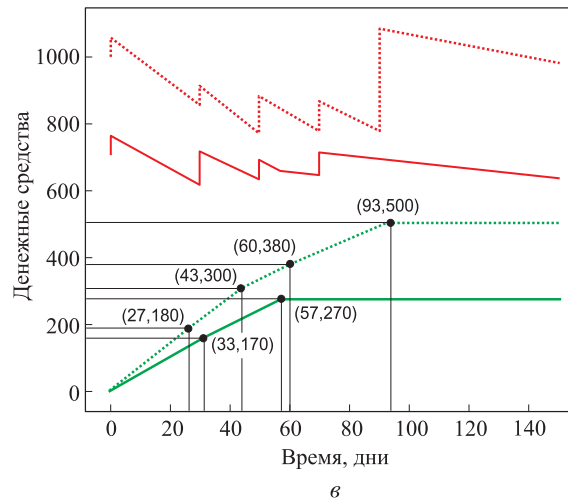
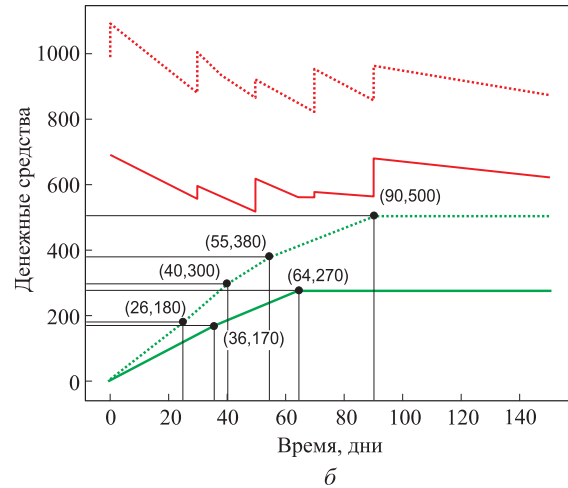
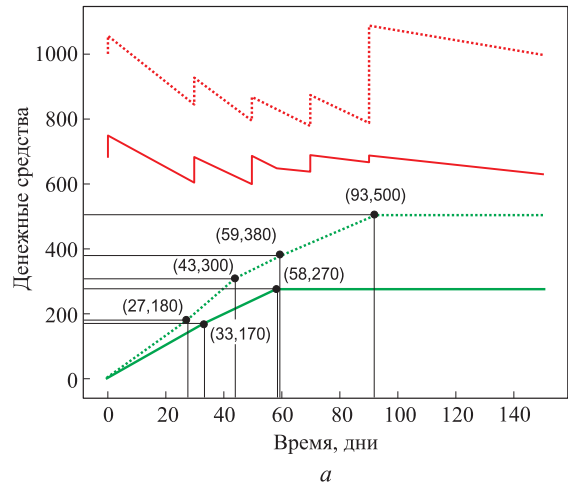


Рис. 3. Графики решений дифференциальных уравнений при $n = 2$ для матриц $C^{опл(1)}$ (а), $C^{опл(2)}$ (б) и $C^{опл(3)}$ (в):

..... — M_1 ; — — M_2 ; — V_1 ; — — V_2

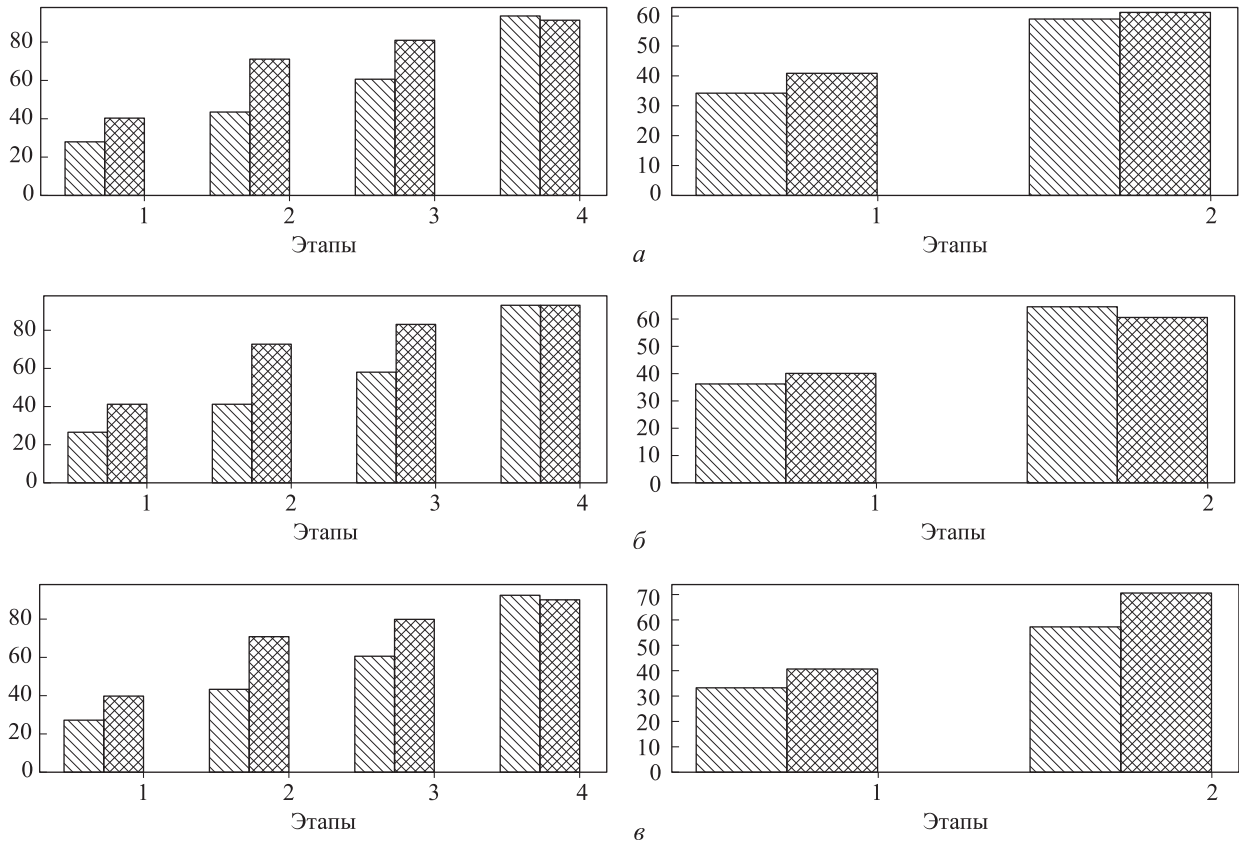


Рис. 4. Значения действительного (▨) и планового (▩) времени выполнения этапов работ для дорожных карт ДК₁ (слева) и ДК₂ (справа) с различными параметрами:

a — $C^{опл(1)}$; *б* — $C^{опл(2)}$; *в* — $C^{опл(3)}$

$$T^{кон} = \begin{pmatrix} 40 & 70 & 80 & 90 \\ 40 & 60 & 0 & 0 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 0,36 & 0,24 & 0,16 & 0,24 \\ 0,63 & 0,37 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$IND^{пред} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; IND^{посл} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для примера ограничимся генерацией трех вариантов матрицы $C^{опл}$. Случайным образом с учетом ограничений (12) получим

$$C^{опл(1)} = \begin{pmatrix} 51 & 77 & 72 & 100 & 200 \\ 49 & 73 & 78 & 50 & 20 \end{pmatrix};$$

$$C^{опл(2)} = \begin{pmatrix} 100 & 120 & 50 & 130 & 100 \\ 0 & 30 & 100 & 20 & 120 \end{pmatrix};$$

$$C^{опл(3)} = \begin{pmatrix} 50 & 50 & 100 & 80 & 220 \\ 50 & 100 & 50 & 70 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решения систем дифференциальных уравнений (11) при $n = 2$ для матриц $C^{опл(1)}$, $C^{опл(2)}$ и $C^{опл(3)}$ иллюстрирует рис. 3, а–в.

Матрицы, отражающие действительное время выполнения этапов ЧТЗ₁ и ЧТЗ₂, имеют следующие значения:

$$T_{действ}^{нач(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 28 & 44 & 60 \\ 1 & 34 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$T_{действ}^{кон(1)} = \begin{pmatrix} 27 & 43 & 59 & 93 \\ 33 & 58 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$T_{действ}^{нач(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 25 & 41 & 56 \\ 1 & 37 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$T_{действ}^{кон(2)} = \begin{pmatrix} 26 & 40 & 55 & 90 \\ 36 & 64 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$T_{действ}^{нач(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 28 & 44 & 61 \\ 1 & 34 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$T_{действ}^{кон(3)} = \begin{pmatrix} 27 & 43 & 60 & 93 \\ 33 & 57 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученные результаты приведены на рис. 4. Из сравнения полученных результатов моделирования следует, что минимальное общее вре-

мя выполнения этапов, равное 90 дням, соответствует дорожной карте с параметрами $S^{опл(2)}$.

Выводы

1. Функциональное прототипирование в машиностроении является ключевым этапом разработки инноваций, связанным с большими затратами и рисками.

2. Прототипирование представляет собой процесс с ограниченными ресурсами, требующий тщательного анализа на начальном этапе

разработки прототипа с использованием полных математических моделей.

3. Предложенная математическая модель распределенного проектирования адекватно отражает нелинейные процессы изменения контролируемых ресурсов на этапе прототипирования инновации и может эффективно использоваться для разработки оптимальных дорожных карт проектов. В ней заложен значительный потенциал развития за счет применения методов теории автоматов для анализа влияния рынка на управляемые параметры процесса проектирования.

Литература

- [1] Программа «Цифровая экономика Российской Федерации». Распоряжение Правительства Российской Федерации от 28 июля 2017 г. № 1632-р. 87 с.
- [2] Боровков А.И., Клявин О.И., Марусева В.М., Рябов Ю.А., Шербина Л.А. Цифровая фабрика (Digital Factory) Института передовых производственных технологий СПбПУ. *Трамплин к успеху*, 2016, № 7, с. 11–13.
- [3] Белов В.Ф., Занкин А.И. Анализ технологий построения систем распределенного проектирования. *Огаревские чтения. Матер. XLVII науч. конф.*, Саранск, 6–13 декабря 2018, Саранск, Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва, 2018, с. 82–86.
- [4] Рябов Ю.А., Гамзикова А.А. Новые производственные технологии в России. *Цифровая индустрия промышленной России. Матер. конф.*, Иннополис, 22–24 мая 2019, Иннополис, ЦИПР, 2019, с. 99–103.
- [5] Бабенчук С.П. Анализ программного обеспечения управления проектами. *Программные продукты и системы*, 2011, № 2, с. 45–49.
- [6] Либерзон В. Управление проектами с помощью Spider Project. *Открытые системы. СУБД*, 2002, № 9. URL: <https://www.osp.ru/os/2002/09/181925/> (дата обращения 15 марта 2019).
- [7] *Обзор системы Teamcenter*. URL: <https://docplayer.ru/36464681-Obzor-sistemy-teamcenter.html> (дата обращения 15 июня 2019).
- [8] Боровков А.И., Рябов Ю.А. О дорожной карте «Технет» (передовые производственные технологии) Национальной технологической инициативы. *Трамплин к успеху*, 2017, № 10, с. 8–11.
- [9] Романов А.А. Смена парадигмы разработки инновационной продукции: от разрозненных НИОКР к цифровым проектам полного жизненного цикла. *Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы*, 2017, т. 4, вып. 2, с. 68–84, doi: 10.17238/issn2409-0239.2017.2.68
- [10] Анисимов В.И., Гридин В.Н., Башкатов А.С. Технология построения системы информационной поддержки распределенных процессов проектирования. *Автоматизация в промышленности*, 2010, № 2, с. 41–43.
- [11] Смирнов Д.П. Способ моделирования распределенных автоматизированных процессов и производств. *Фундаментальные исследования*, 2016, № 2, с. 94–98.
- [12] Coppinger R. Design through the looking glass. *Engineering & Technology*, 2016, vol. 11, iss. 11, pp. 58–59, doi: 10.1049/et.2016.1106
- [13] Боровков А.И., Рябов Ю.А. Цифровые двойники: определение, подходы и методы разработки. *Цифровая трансформация экономики и промышленности. Сб. тр. X науч.-практ. конф. с зарубежным участием*, Санкт-Петербург, 20–22 июня 2019, Санкт-Петербург, ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2019, с. 234–245.
- [14] Кордюков Р.Ю., Допира Р.В., Иванова А.В., Абу-Абед Ф.Н., Мартынов Д.В. Модель и алгоритмизация оптимизационной задачи о назначениях в условиях дополнитель-

- ных ограничений. *Программные продукты и системы*, 2016, № 2(114), с. 16–22, doi: 10.15827/0236-235X.114.016-022
- [15] Черняев А.П. Дифференциальные уравнения динамического баланса и их приложения. *Соросовский образовательный журнал, Математика*, 2000, т. 6, № 11, с. 117–122.
- [16] Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. *Математический сборник*, 1960, т. 51(93), № 1, с. 99–128.

References

- [1] *Программа «Tsifrovaya ekonomika Rossiyskoy Federatsii»* [The program «Digital Economy of the Russian Federation»]. Order of the Government of the Russian Federation of July 28, 2017, no. 1632-p. 87 p.
- [2] Borovkov A.I., Klyavin O.I., Maruseva V.M., Ryabov Yu.A., Shcherbina L.A. Digital Factory of the Institute of Advanced Production Technologies SPbPU. *Tramplin k uspekhu*, 2016, no. 7, pp. 11–13 (in Russ.).
- [3] Belov V.F., Zankin A.I. Analysis of technologies for building distributed design systems. *Ogarevskiyechteniya. Mater. XLVII nauch. konf.* [Ogarevsky readings. Materials of the XLVII Scientific Conference]. Saransk, 2018, pp. 82–86.
- [4] Ryabov Yu.A., Gamzikova A.A. New manufacturing technologies in Russia. *Tsifrovaya industriya promyshlennoy Rossii: mater. konf.* [Digital Industry of Industrial Russia: Materials of the Conference]. Innopolis, 2019, pp. 99–103.
- [5] Babenchuk S.P. Analysis of project management software. *Programmnyye produkty i sistemy*, 2011, no. 2, pp. 45–49 (in Russ.).
- [6] Liberzon V. Project Management with the Spider Project. *Otkrytyye sistemy. SUBD*, 2002, no. 9 (in Russ.). Available at: <https://www.osp.ru/os/2002/09/181925/> (accessed 15 March 2019).
- [7] *Obzor sistemy Teamcenter* [Teamcenter System Overview]. Available at: <https://docplayer.ru/36464681-Obzor-sistemy-teamcenter.html> (accessed 15 June 2019).
- [8] Borovkov A.I., Ryabov Yu.A. About the Technet Road Map (Advanced Manufacturing Technologies) of the National Technology Initiative. *Tramplin k uspekhu*, 2017, no. 10, pp. 8–11 (in Russ.).
- [9] Romanov A.A. Paradigm Shift in the Development of Innovative Products: from Disparate R&D to Full Life Cycle Digital Projects. *Raketno-kosmicheskoye priborostroyeniye i informatsionnyye sistemy*, 2017, vol. 4, iss. 2, pp. 68–84 (in Russ.), doi: 10.17238/issn2409-0239.2017.2.68
- [10] Anisimov V.I., Gridin V.N., Bashkatov A.S. The technology of building a system of information support for distributed design processes. *Avtomatizatsiya v promyshlennosti*, 2010, no. 2, pp. 41–43 (in Russ.).
- [11] Smirnov D.P. Method of modeling distributed automated processes and production. *Fundamental research*, 2016, no. 2, pp. 94–98 (in Russ.).
- [12] Coppinger R. Design through the looking glass. *Engineering & Technology*, 2016, vol. 11, iss. 11, pp. 58–59, doi: 10.1049/et.2016.1106
- [13] Borovkov A.I., Ryabov Yu.A. Digital twins: definition, approaches and methods of development. *Tsifrovaya transformatsiya ekonomiki i promyshlennosti. Sb. tr. X nauch.-prakt. konf. s zarubezhnym uchastiyem* [Digital Transformation of Economy and Industry. Works of the X research-to-practice conference with foreign participation]. Sankt-Petersburg, 2019, pp. 234–245.
- [14] Kordyukov R.Yu., Dopira R.V., Ivanova A.V., Abu-Abed F.N., Martynov D.V. A model and algorithmization of the assignment problem under additional constraints. *Programmnyye produkty i sistemy*, 2016, no. 2(114), pp. 16–22 (in Russ.), doi: 10.15827/0236-235X.114.016-022
- [15] Chernyayev A.P. Differential equations of dynamic balance and their applications. *Sorosovskiy obrazovatel'nyy zhurnal. Matematika*, 2000, vol. 6, no. 11, pp. 117–122 (in Russ.).
- [16] Filippov A.F. Differential equations with a discontinuous right-hand side. *Matematicheskiy sbornik*, 1960, vol. 51(93), no. 1, pp. 99–128 (in Russ.).

Информация об авторах

БЕЛОВ Владимир Федорович — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Системы автоматизированного проектирования». МГУ им. Н.П. Огарева; директор Центра проектирования инноваций АУ «Технопарк-Мордовия» (430005, Саранск, Российская Федерация, ул. Большевикская, д. 68, e-mail: belovvf@mail.ru).

ГАВРЮШИН Сергей Сергеевич — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Компьютерные системы автоматизации производства». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: gss@rk9.bmstu.ru).

МАРКОВА Юлия Николаевна — директор по развитию Центра проектирования инноваций АУ «Технопарк-Мордовия» (430034, Саранск, Российская Федерация, ул. Лодыгина, д. 3, e-mail: 1002maps@mail.ru).

Information about the authors

BELOV Vladimir Fedorovich — Doctor of Science (Eng.), Professor, Head of Department, Computer Aided Design Systems. Ogarev Mordovia State University, Director, Design Centre for Innovations — Technopark-Mordovia (430005, Saransk, Russian Federation, Bolshevistskaya St., Bldg. 68, e-mail: belovvf@mail.ru).

GAVRYUSHIN Sergei Sergeevich — Doctor of Science (Eng.), Professor, Head of Department, Computer Systems of Industrial Automation. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Bauman-skaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: gss@rk9.bmstu.ru).

MARKOVA Yulia Nikolaevna — Director for Development. Design Centre for Innovations — Technopark-Mordovia (430005, Saransk, Russian Federation, Lodygin St., Bldg. 3, e-mail: 1002maps@mail.ru).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Белов В.Ф., Гаврюшин С.С., Маркова Ю.Н. Математическая модель распределенного проектирования прототипов в машиностроении. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2019, № 9, с. 7–19, doi: 10.18698/0536-1044-2019-9-7-19

Please cite this article in English as:

Belov V.F., Gavryushin S.S., Markova Y.N. A Mathematical Model of Distributed Prototype Design in Mechanical Engineering. *Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2019, no. 9, pp. 7–19, doi: 10.18698/0536-1044-2019-9-7-19



В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана
вышло в свет 2 издание учебного пособия
Л.П. Мухамедова

«Основы проектирования транспортных космических систем»

Изложены основы проектирования транспортных космических систем с жидкостными ракетными двигателями, предназначенных для доставки полезных грузов на целевые орбиты и траектории назначения, и их составляющих: ракет-носителей и разгонных блоков. Рассмотрено формирование граничных условий решения задач баллистического проектирования. Предложены инженерные методики выбора основных проектных параметров и определения энергомассовых и геометрических характеристик проектируемого изделия в составе ракетного комплекса. Приведены численные примеры решения задач баллистического проектирования транспортных космических систем.

Для студентов старших курсов машиностроительных вузов, а также для специалистов, занимающихся разработкой ракетно-космических систем.

По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;
press@bmstu.ru; www.baumanpress.ru