

Машиностроение и машиноведение

УДК 534.014.4

doi: 10.18698/0536-1044-2019-10-3-13

Методы определения критических значений неконсервативных нагрузок в задачах устойчивости механических систем

В.П. Радин, В.П. Чирков, А.В. Щугорев, В.Н. Щугорев

НИУ «МЭИ»

Methods for Determining Critical Values of Nonconservative Loads in Problems of Stability of Mechanical Systems

V.P. Radin, V.P. Chirkov, A.V. Shchugorev, V.N. Shchugorev

National Research University — Moscow Power Engineering Institute

Рассмотрены методы определения критических значений неконсервативных нагрузок в задачах устойчивости механических систем с распределенными параметрами. На основе динамического подхода к задачам устойчивости изложены метод непосредственного интегрирования линеаризованного уравнения возмущенного движения и сведение задачи вычисления критических нагрузок к задаче минимизации некоторой комплексной функции нескольких переменных. В качестве второго метода проиллюстрирован метод разложения решения уравнения возмущенного движения по формам собственных колебаний. Также описаны основы применения метода конечных элементов к задачам исследования устойчивости при действии неконсервативных нагрузок. Методы проиллюстрированы на примере классических задач: устойчивости консольного стержня при действии потенциальной и следящей сил и устойчивости участка трубопровода с протекающей жидкостью. Проанализированы точность и сходимость двух последних методов в зависимости от числа членов ряда и конечных элементов.

Ключевые слова: неконсервативные нагрузки, устойчивость механических систем, метод исследования устойчивости, дивергенция и флаттер

Methods for determining critical values of nonconservative loads in stability problems of mechanical systems with distributed parameters are considered in this work. Based on a dynamic approach to stability problems, the method of direct integration of the linearized equation of perturbed motion is proposed, and the problem of determining critical loads is reduced to the problem of minimizing a complex function of several variables. As a second method, the method of decomposition of the solution of the equation of perturbed motion in the forms of natural oscillations is presented. The fundamentals of the application of the finite element method to the problems of stability under the action of non-conservative loads are also described. The methods are illustrated on classical problems: the stability of the cantilever rod under the action of potential and tracking forces and the stability of the

pipeline section with flowing liquid. The accuracy and convergence of the latter two methods are analyzed depending on the number of members in the series and the number of finite elements.

Keywords: non-conservative loads, stability of mechanical systems, stability research method, divergence and flutter

Динамический метод исследования устойчивости. О необычном влиянии неконсервативных нагрузок на механические системы известно более 100 лет. Достаточно упомянуть задачи прочности и устойчивости, о сжатии и кручении валов паровых машин, колебания обшивок летательных аппаратов в скоростном потоке газа, действие реактивных сил, направление которых зависит от деформаций упругих систем и т. д.

Дальнейшее развитие современного машиностроения, авиационной и ракетной техники, робототехники и мехатроники значительно расширило класс задач, определяющих прочность и устойчивость механических систем при действии позиционных и неконсервативных нагрузок.

Разработка и развитие методов решения задач по теории устойчивости конструкций связаны с работами Эйлера. Как известно, метод Эйлера основан на отыскании условий, при которых, помимо исследуемой формы равновесия, существуют смежные, близкие к исходной. Этот метод соответствует решению однородной краевой задачи с самосопряженными операторами.

Указанная методика была неоспоримой, пока Е.Л. Николаи [1] на примере известной задачи об устойчивости консольного стержня под действием крутящего момента не показал, что при некоторых видах нагрузок не существует форм равновесия, смежных с исходной, а потеря устойчивости выражается в смене положения равновесия движением (колебаниями) системы в его окрестности.

Такая ситуация имеет место в тех случаях, когда нагрузки, действующие на систему, не обладают потенциалом, являются неконсервативными и, как следствие, задача об устойчивости сводится к динамической несамосопряженной краевой задаче. Метод Эйлера, являясь по существу статическим методом исследования устойчивости, в этих случаях становится неприменимым.

Формулировку и обоснование динамического метода исследования дал В.В. Болотин в монографии [2]. В дальнейшем по теории устойчивости неконсервативных систем, помимо много-

численных журнальных статей, опубликован ряд монографий и учебников, в частности [3–8].

Цель работы — изложение различных способов определения критических нагрузок на основе динамического метода.

Введем вектор отклонений от исследуемого на устойчивость положения равновесия $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3, t]^T$, где u_1, u_2, u_3 — компоненты этого вектора; t — время. Тогда уравнения динамического метода можно записать в операторной форме

$$\mathbf{C}'\mathbf{u} + \mathbf{A}'\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} + \gamma\mathbf{B}'\mathbf{u} + \mathbf{D}'\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

где \mathbf{C}' , \mathbf{A}' и \mathbf{D}' — упругий, инерционный и диссипативный (учитывающий рассеяние энергии при колебаниях) линейный матричный дифференциальный оператор соответственно; \mathbf{B}' и γ — линейный матричный дифференциальный оператор и параметр, характеризующие действие внешней нагрузки; $\mathbf{0}$ — нулевая матрица.

От операторного уравнения свободных колебаний упругих систем уравнение (1) отличается наличием оператора \mathbf{B}' .

Решение краевой задачи на собственные значения. Рассмотрим этот метод на примере

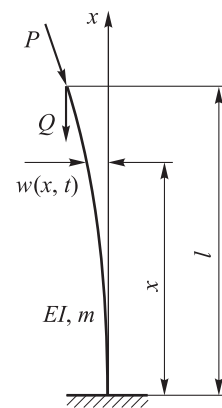


Рис. 1. Схема консольного стержня при действии потенциальной и следящей сил:

$w(x, t)$ — перемещения сечений стержня при отклонении от прямолинейной формы равновесия; x — координата вдоль оси стержня; EI — жесткость стержня на изгиб; m — погонная масса стержня

консольного стержня длиной l (рис. 1), находящегося под действием постоянных по значению потенциальной P и следящей Q сил. При действии только следящей силы имеем известную задачу Бека, которая в различных постановках решалась многими исследователями [3–12].

Введем следующие безразмерные параметры:

$$\xi = \frac{x}{l}; \bar{w} = \frac{w}{l}; \tau = \omega_0 t; \omega_0 = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}; \varepsilon_i = b_i \omega_0; \varepsilon_e = \frac{b_e}{\omega_0}; \alpha = \frac{Ql^2}{EI}; \beta = \frac{Pl^2}{EI}. \quad (2)$$

Здесь b_i и b_e — коэффициенты внутреннего и внешнего трения.

Запишем уравнение малых колебаний (уравнение возмущенного движения) следующим образом:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \varepsilon_i \frac{\partial^5 w}{\partial \xi^4 \partial \tau} + 2\varepsilon_e \frac{\partial w}{\partial \tau} + (\alpha + \beta) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) дополним граничными условиями

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \xi = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0, \left(1 + \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + \alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \xi = 1. \quad (4)$$

Решение линейной краевой задачи (3) с учетом граничных условий (4) можно представить в виде

$$w(\xi, \tau) = \sum_{j=1}^4 C_j \exp(r_j \xi) \exp(\lambda \tau),$$

где C_j — константа, $j = 1, \dots, 4$; r_j — показатель, определяемый из биквадратного уравнения $r_j^4 (1 + \lambda \varepsilon_i) + (\alpha + \beta) r_j^2 + \lambda^2 + 2\lambda \varepsilon_e = 0$; λ — характеристический показатель.

Из условия нетривиальности для констант C_j при удовлетворении однородных условий (4) имеем трансцендентное уравнение, связывающее параметры нагружения системы α, β и характеристический показатель λ ,

$$\Delta_1(\alpha, \beta, \lambda) = 0. \quad (5)$$

Здесь $\Delta_1(\alpha, \beta, \lambda)$ — определитель матрицы размером 4×4 ,

$$\Delta_1(\alpha, \beta, \lambda) = \begin{vmatrix} 1 & & & 1 \\ & r_1 & & r_4 \\ & r_1^2 e^{r_1} & \dots & r_4^2 e^{r_4} \\ \left[(1 + \varepsilon_i \lambda) r_1^3 + \alpha r_1\right] e^{r_1} & & & \left[(1 + \varepsilon_i \lambda) r_4^3 + \alpha r_4\right] e^{r_4} \end{vmatrix}.$$

Уравнение (5) представляет собой неявную зависимость характеристического показателя λ от параметров краевой задачи. Критической поверхности (на плоскости кривой) соответствует совокупность значений параметров α и β , при которых хотя бы один из характеристических показателей λ пересекает мнимую ось.

Если это пересечение происходит через начало координат $\lambda = 0$ плоскости $\text{Re} \lambda, \text{Im} \lambda$, где $\text{Re} \lambda$ и $\text{Im} \lambda$ — действительная и мнимая части показателя λ , то значения α и β соответствуют дивергентному типу потери устойчивости. В других случаях, т. е. когда $\text{Re} \lambda = 0$, а $\text{Im} \lambda \neq 0$, имеет место колебательный тип потери устойчивости — флаттер.

Функция $\Delta_1(\alpha, \beta, \lambda)$ является комплекснозначной. Комплексное выражение обращается в нуль тогда и только тогда, когда равен нулю его модуль $|\Delta_1(\alpha, \beta, \lambda)|$, а модуль комплексного числа не может быть отрицательным. Таким образом, любой корень λ уравнения (5) является одновременно и точкой абсолютного локального (ввиду дискретности множества корней) минимума модуля левой части уравнения.

Задача поиска абсолютного минимума функции $|\Delta_1(\alpha, \beta, \lambda)|$ решается с привлечением функции `fminsearch` вычислительной системы MATLAB. Алгоритм этой функции основан на модифицированном симплекс-методе (методе Нелдера — Мида). При фиксированных значениях α и β действительная функция $|\Delta_1(\alpha, \beta, \lambda)|$ рассматривается как функция действительных и мнимых частей характеристических показателей λ .

Для построения границы области устойчивости задаются постоянные параметры системы, в частности коэффициенты демпфирования. Вычисляются первые две собственные частоты консольного стержня ω_1 и ω_2 . Частоты подправляются с учетом внутреннего и внешнего трения. Эти значения принимаются в качестве первого приближения для отыскания двух локальных минимумов функции $|\Delta_1(\alpha, \beta, \lambda)|$:

$$\lambda_1 = -\varepsilon_e - \frac{\varepsilon_i \omega_1^2}{2} + i \sqrt{\omega_1^2 - \left(\varepsilon_e + \frac{\varepsilon_i \omega_1^2}{2} \right)^2};$$

$$\lambda_2 = -\varepsilon_e - \frac{\varepsilon_i \omega_2^2}{2} + i \sqrt{\omega_2^2 - \left(\varepsilon_e + \frac{\varepsilon_i \omega_2^2}{2} \right)^2}.$$

Далее параметры внешней нагрузки возрастают от нуля до тех значений, при которых один из характеристических показателей (для рассматриваемой системы это λ_1) перейдет в правую полуплоскость с обращением в нуль его действительной части.

Для значений коэффициентов демпфирования $\varepsilon_e = 0,01$ и $\varepsilon_i = 0,01$ на рис. 2 построена граница области устойчивости ABC (сплошная линия), примыкающая к началу координат. Часть границы AB — граница флаттера. Ее пересечение соответствует колебательному типу потери устойчивости. Часть границы BC — граница дивергенции. При ее пересечении происходит монотонное отклонение стержня от прямолинейной формы равновесия. При $\beta = 0$ в точке C критический параметр α равен $\pi^2/4$.

Метод разложения по формам собственных колебаний. Будучи точным в вычислительном отношении, метод, основанный на решении трансцендентного уравнения типа (5), связан со значительными трудностями из-за сложной структуры гиперповерхности (для которой ищут локальные минимумы), выбора начальных приближений и т. д. Эти трудности многократно возрастают при увеличении числа варьируемых параметров.

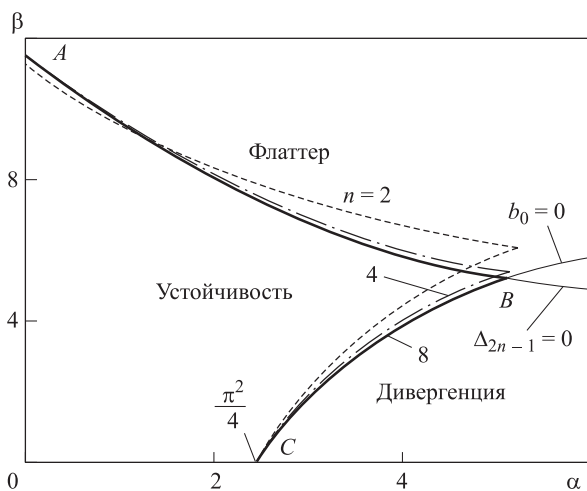


Рис. 2. Границы области устойчивости при различных значениях числа членов ряда

В связи с этим более распространенным методом построения критических поверхностей является метод нормальных координат или метод разложения по формам собственных колебаний [2–8]. Вместо форм собственных колебаний может быть взята и другая система функций, удовлетворяющая граничным условиям, а также условиям полноты и ортогональности.

Для применения указанного метода уберем из граничных условий (4) параметр потенциальной силы α и с помощью δ -функции введем его проекцию в дифференциальное уравнение (3). Тогда получим уравнение возмущенного движения

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \varepsilon_i \frac{\partial^5 w}{\partial \xi^4 \partial \tau} + 2\varepsilon_e \frac{\partial w}{\partial \tau} + (\alpha + \beta) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - \alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} \delta(\xi - 1) = 0$$

с нулевыми граничными условиями.

Представим решение $w(\xi, \tau)$ уравнения (6) в виде ряда по формам собственных колебаний

$$w(\xi, \tau) = \mathbf{q}^T(\tau) \boldsymbol{\varphi}(\xi); \quad \mathbf{q}(\tau) = \begin{bmatrix} q_1(\tau) \\ q_2(\tau) \\ \dots \\ q_n(\tau) \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\xi) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\chi_1 \xi) \\ \varphi_2(\chi_2 \xi) \\ \dots \\ \varphi_n(\chi_n \xi) \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{q}(\tau)$ — вектор обобщенных координат; $\boldsymbol{\varphi}(\xi)$ — вектор форм собственных колебаний консольного стержня; χ_k — параметры, определяемые из частотного уравнения; n — число удерживаемых членов ряда.

Подставим ряд (7) в уравнение возмущенного движения (6) и применим процедуру метода Бубнова — Галеркина. В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат $q_k(\tau)$. Запишем эту систему в матричной форме:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + (2\varepsilon_e \mathbf{A} + \varepsilon_i \mathbf{C})\dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{C} + (\alpha + \beta)\mathbf{D} - \alpha \mathbf{B}]\mathbf{q} = 0,$$

где $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ — матрицы размером $n \times n$, определяемые выражениями

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \int_0^1 \boldsymbol{\varphi}(\xi) \boldsymbol{\varphi}^T(\xi) d\xi; \\
 \mathbf{B} &= \int_0^1 \boldsymbol{\varphi}(\xi) \left[\frac{d\boldsymbol{\varphi}(\xi)}{d\xi} \right]^T \delta(\xi-1) d\xi; \\
 \mathbf{C} &= \int_0^1 \boldsymbol{\varphi}(\xi) \left[\frac{d^4\boldsymbol{\varphi}(\xi)}{d\xi^4} \right]^T d\xi; \\
 \mathbf{D} &= \int_0^1 \boldsymbol{\varphi}(\xi) \left[\frac{d^2\boldsymbol{\varphi}(\xi)}{d\xi^2} \right]^T d\xi.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Представим вектор обобщенных координат как $\mathbf{q}(\tau) = \mathbf{q}_0 \exp(\lambda\tau)$, где \mathbf{q}_0 — начальное значение вектора обобщенных координат. Подставив это выражение в формулу (8), вместо трансцендентного уравнения (5) относительно характеристических показателей λ получим алгебраическую проблему собственных значений в виде матричного полинома

$$\mathbf{P}_2 \lambda^2 + \mathbf{P}_1 \lambda + \mathbf{P}_0 = 0, \tag{10}$$

где $\mathbf{P}_2 = \mathbf{A}$; $\mathbf{P}_1 = 2\varepsilon_e \mathbf{A} + \varepsilon_i \mathbf{C}$; $\mathbf{P}_0 = \mathbf{C} + (\alpha + \beta) \mathbf{D} - \alpha \mathbf{B}$.

Применение метода разложения по формам собственных колебаний сводит систему с распределенными параметрами к системе с конечным числом степеней свободы. Для исследования устойчивости последних применяют критерии Рауса — Гурвица и Зубова, позволяющие судить о расположении характеристических показателей на комплексной плоскости и строить границы областей устойчивости в пространстве параметров без вычисления самих показателей.

В частности, если для рассматриваемой системы используется критерий Рауса — Гурвица, то соответствующая матрица Гурвица состоит из коэффициентов характеристического полинома матрицы

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{A}^{-1}[\mathbf{C} + (\alpha + \beta)\mathbf{D} - \alpha\mathbf{B}] & -\mathbf{A}^{-1}(2\varepsilon_e \mathbf{A} + \varepsilon_i \mathbf{C}) \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{0}$ и \mathbf{E} — нулевая и единичная матрицы размером $n \times n$.

Равенство нулю главного минора матрицы Гурвица порядка $2n-1$, т. е. $\Delta_{2n-1} = 0$, определяет границу области флаттера на плоскости параметров нагружения α и β . Границу области дивергенции можно найти из условия равенства нулю определителя матрицы Гурвица или равенства нулю свободного члена b_0 характеристического полинома.

Таким образом, граница области устойчивости может быть построена либо непосредственным решением уравнения (10), либо применением критериев отрицательности действительных частей характеристических показателей. На рис. 2 продолжение границ флаттера и дивергенции показаны пунктирными линиями.

Точность построения границ области устойчивости методом нормальных координат зависит от числа удерживаемых членов в разложении (7). На рис. 2 сплошной линией отмечена точная граница области устойчивости, найденная с помощью уравнения (5).

Штриховой и штрихпунктирной линиями показаны границы, построенные с применением двух ($n=2$) и четырех ($n=4$) членов ряда в разложении $w(\xi, \tau)$. Числа у кривых на рисунке соответствуют значению числа членов ряда n . Граница, полученная для $n=8$, практически сливается с границей, построенной с использованием точного метода решения краевой задачи на собственные значения.

Наибольшие отклонения метода разложения по формам собственных колебаний при малых n наблюдаются в окрестности угловой точки границы, где происходит смена типа потери устойчивости. Как и ранее, при вычислениях принято, что коэффициенты демпфирования $\varepsilon_e = 0,01$ и $\varepsilon_i = 0,01$.

Устойчивость трубопровода с протекающей жидкостью. Применим описанные методы к задаче об устойчивости участка трубопровода с протекающей жидкостью [3, 9–14], где неконсервативные нагрузки возникают со стороны жидкости.

Рассмотрим прямолинейный участок трубопровода, наполненный невязкой жидкостью, которая движется с невозмущенной скоростью v . Расчетная схема трубопровода может быть представлена в виде стержня с изгибной жесткостью EI , погонной массой m_0 и длиной l . Пусть один конец стержня жестко зашпелен в заделке, а другой свободен от закреплений (рис. 3). Плотность протекающей

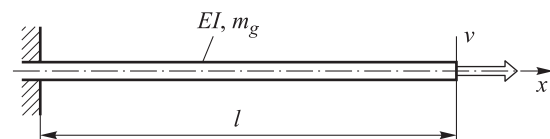


Рис. 3. Схема участка трубопровода с протекающей жидкостью

жидкости обозначим через m_g , а перемещения сечений стержня при отклонении от прямолинейной формы равновесия — через $w(x, t)$.

Введем следующие безразмерные параметры:

$$\xi = \frac{x}{l}; \tau = \omega_0 t; \omega_0 = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m_0}}; \mu = \frac{m_g}{m_0 + m_g};$$

$$\alpha = \nu \sqrt{\frac{m_g l^2}{EI}}.$$

Тогда уравнение малых колебаний около невозмущенной формы равновесия $w \equiv 0$ и граничные условия можно записать как

$$(1 - \mu) \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + 2\alpha \sqrt{\mu(1 - \mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \tau} + \alpha^2 (1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0; \quad (11)$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \xi = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} = 0 \text{ при } \xi = 1.$$

В данной задаче потеря устойчивости связана только с колебательным типом, т. е. с флаттером. В качестве параметров нагружения, на плоскости которых будем строить границу области устойчивости прямолинейной формы равновесия трубопровода, принимаем α — параметр, характеризующий расход жидкости, и μ — относительную погонную массу жидкости.

Как и ранее, решение краевой задачи дает неявное уравнение, определяющее границу области устойчивости (границу флаттера) $\Delta_1(\alpha, \mu, \lambda) = 0$. Эта граница (кривая Пайдуссиса) показана сплошной линией на рис. 4. Область устойчивости расположена ниже этой линии.

Для применения метода разложения по формам собственных колебаний необходимо провести те же действия, что и в предыдущем разделе. В результате получим следующее уравнение относительно вектора обобщенных координат $\mathbf{q}(\tau)$:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + 2\alpha\sqrt{\mu(1-\mu)}\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + (1-\mu)(\mathbf{C} + \alpha^2\mathbf{D})\mathbf{q} = 0.$$

Здесь \mathbf{A} , \mathbf{C} , \mathbf{D} — матрицы, вычисляемые по выражениям (9); \mathbf{B} — матрица, рассчитываемая по формуле

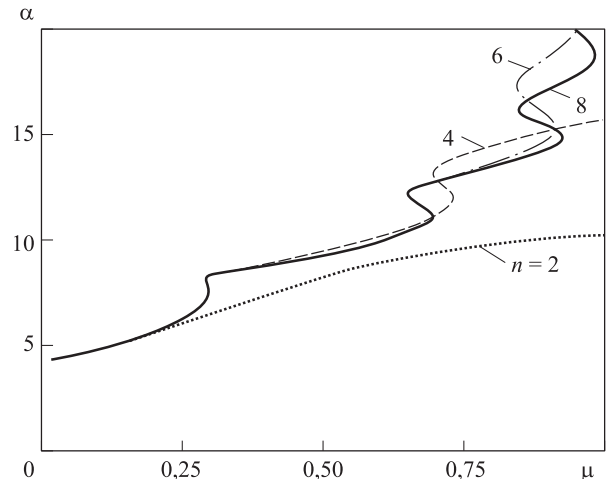


Рис. 4. Граница флаттера при различных значениях числа членов ряда

$$\mathbf{B} = \int_0^1 \boldsymbol{\varphi}(\xi) \left[\frac{d\boldsymbol{\varphi}(\xi)}{d\xi} \right]^T d\xi.$$

Пунктирные, штриховая и штрихпунктирная линии на рис. 4 соответствуют расчетам при различных значениях числа членов ряда в разложении решения уравнения (11), о чем свидетельствуют числа, стоящие у кривых. Из рисунка следует, что граница флаттера, имеющая достаточно сложную конфигурацию с наличием участков немонотонной зависимости $\alpha(\mu)$, с достаточной точностью может быть построена при удержании не менее восьми членов ряда.

Метод конечных элементов (МКЭ). В случае сложных механических систем (с переменными сечениями, сложными нагрузками и т. п.) целесообразно использовать МКЭ [15, 16]. Основной особенностью применения МКЭ для неконсервативных систем является необходимость учета виртуальной работы неконсервативных сил или неконсервативных составляющих нагрузок, если таковые имеются.

Получим уравнение возмущенного движения в форме МКЭ на примере первой системы, рассмотренной ранее (см. рис. 1), с использованием вариационного принципа Гамильтона — Остроградского:

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \delta(T - U - \Pi) dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta' A_{nc} dt = 0.$$

Здесь $[t_0, t_1]$ — отрезок времени, на котором рассматривается движение; T — кинетическая

энергия системы; U — потенциальная энергия упругой деформации; Π — потенциал внешних нагрузок, $\Pi = -A_c$ (A_c — работа потенциальных нагрузок и потенциальных составляющих неконсервативных нагрузок); $\delta'A_{nc}$ — виртуальная работа неконсервативных сил.

Кинетическая энергия T , потенциальная энергия упругой деформации U , работа потенциальной силы Q и консервативной составляющей следящей силы $P \cos(\partial w / \partial x) \approx P$ определяются как

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx; \quad U = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx; \quad (12)$$

$$\Pi = -\frac{1}{2} \int_0^l (P + Q) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Виртуальная работа неконсервативной составляющей следящей нагрузки P имеет вид

$$\delta'A_{nc} = -P \frac{\partial w}{\partial x} \delta w \Big|_{x=l},$$

где δw — нормальный прогиб.

Из условия стационарности функционала $\delta I = 0$ и в силу произвольности вариаций отрезка времени $[t_0, t_1]$ и вариаций нормального прогиба δw на основании основной леммы вариационного исчисления получим уравнение Эйлера — Остроградского, которое для данной системы выполняет роль уравнения возмущенного движения с естественными граничными условиями.

Для сведения этого уравнения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений в форме МКЭ разобьем исходную стержневую систему на n конечных элементов (КЭ). Число КЭ n выбирается в зависимости от требуемой точности и конструктивных особенностей системы. Типичный k -й КЭ показан на рис. 5.

Элемент загружен сжимающими «мертвой» $Q^{(k)}$ и следящей $P^{(k)}$ силами. Для КЭ исполь-

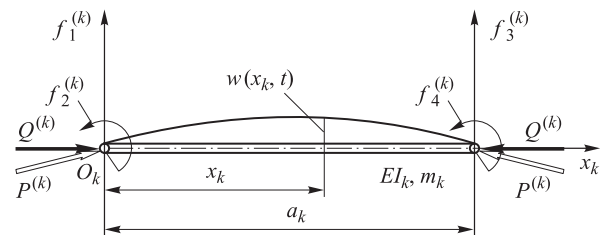


Рис. 5. Схема стержневого КЭ при плоском деформировании

зована локальная нумерация $k = 1, 2, \dots, n$ и индивидуальная локальная система координат $O_k x_k y_k z_k$. Ось $O_k x_k$ совпадает с осью стержня. Для каждого КЭ локальная координата x_k меняется от 0 до a_k . Оси $O_k y_k$ и $O_k z_k$ являются главными центральными осями инерции поперечного сечения. Изгибную жесткость стержня относительно оси, перпендикулярной плоскости его изгиба, обозначим как EI_k , а его погонную массу стержня — m_k .

Положение каждого КЭ однозначно определяется заданием четырех обобщенных узловых перемещений — двух линейных $f_1^{(k)}(t)$, $f_3^{(k)}(t)$ и двух угловых $f_2^{(k)}(t)$, $f_4^{(k)}(t)$, образующих вектор $\mathbf{f}_k(t) = [f_1^{(k)}(t) \ f_2^{(k)}(t) \ f_3^{(k)}(t) \ f_4^{(k)}(t)]^T$. Положительные направления компонент вектора $\mathbf{f}_k(t)$ показаны на рис. 5. В узлах КЭ приложены также обобщенные реакции со стороны соседних элементов.

Аппроксимация прогиба $w_k(x_k, t)$ при изгибных деформациях стержня в локальной системе координат имеет вид

$$w_k(x_k, t) = \mathbf{H}_k(x_k) \mathbf{f}_k(t).$$

Здесь $\mathbf{H}_k(x_k)$ — компоненты вектора-строки, представляющие собой известные функции Эрмита.

Углы поворота поперечных сечений и кривизны в КЭ также представим через вектор обобщенных координат $\mathbf{f}_k(t)$:

$$\frac{\partial w_k(x_k, t)}{\partial x_k} = \frac{\partial [\mathbf{H}_k(x_k) \mathbf{f}_k(t)]}{\partial x_k} = \frac{d\mathbf{H}_k(x_k)}{dx_k} \mathbf{f}_k(t) = \mathbf{M}_k(x_k) \mathbf{f}_k(t);$$

$$\frac{\partial^2 w_k(x_k, t)}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2 [\mathbf{H}_k(x_k) \mathbf{f}_k(t)]}{\partial x_k^2} = \frac{d^2 \mathbf{H}_k(x_k)}{dx_k^2} \mathbf{f}_k(t) = \mathbf{N}_k(x_k) \mathbf{f}_k(t),$$

где $\mathbf{M}_k(x_k)$ и $\mathbf{N}_k(x_k)$ — матрицы-строки, состоящие соответственно из первых и вторых производных функций Эрмита.

Таким образом, вариация интеграла действия для k -го КЭ с учетом выражения (12) имеет вид

$$\delta I_k = - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{a_k} m_k \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} \delta w_k dx_k dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{a_k} EI_k \frac{\partial^2 w_k}{\partial x_k^2} \delta \left(\frac{\partial^2 w_k}{\partial x_k^2} \right) dx_k dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{a_k} (P^{(k)} + Q^{(k)}) \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \delta \left(\frac{\partial w_k}{\partial x_k} \right) dx_k dt - \int_{t_0}^{t_1} P^{(k)} \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \delta w_k \Big|_{x_k=a_k} dt.$$

Введем для каждого КЭ матрицы инерции $\mathbf{A}^{(k)}$, жесткости $\mathbf{C}^{(k)}$ и геометрические матрицы нагрузок $\mathbf{B}_1^{(k)}$ и $\mathbf{B}_2^{(k)}$:

$$\mathbf{A}^{(k)} = \int_0^{a_k} \mathbf{H}_k^T(x_k) m_k \mathbf{H}_k(x_k) dx_k;$$

$$\mathbf{C}^{(k)} = \int_0^{a_k} \mathbf{N}_k^T(x_k) EI_k \mathbf{N}_k(x_k) dx_k;$$

$$\mathbf{B}_1^{(k)} = \int_0^{a_k} \mathbf{M}_k^T(x_k) \mathbf{M}_k(x_k) dx_k;$$

$$\mathbf{B}_2^{(k)} = \mathbf{M}_k^T(x_k) \mathbf{H}_k(x_k) \Big|_{x_k=a_k}.$$

Тогда конечно-элементный вариант принципа Гамильтона — Остроградского можно записать как

$$\delta I = - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^n \delta \mathbf{f}_k^T(t) \left\{ \mathbf{A}^{(k)} \ddot{\mathbf{f}}_k(t) + [\mathbf{C}^{(k)} - (\mathbf{P}^{(k)} + \mathbf{Q}^{(k)}) \mathbf{B}_1^{(k)} + \mathbf{P}^{(k)} \mathbf{B}_2^{(k)}] \mathbf{f}_k(t) \right\} dt = 0. \quad (13)$$

Глобальные матрицы для всей системы \mathbf{A} , \mathbf{C} , \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 получим объединением записанных ранее матриц, расширенных до размера $(2n+2) \times (2n+2)$, с учетом кинематических граничных условий, соответствующих заделке сечения стержня при $x=0$.

Из условия (13) в силу произвольности вариаций $\delta \mathbf{f}_k$ и интервала времени $[t_0, t_1]$ для объединенного вектора обобщенных координат $\mathbf{f}(t)$ получим уравнение размером $2n$ в виде

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{f}}(t) + [\mathbf{C} - (\mathbf{Q} + \mathbf{P}) \mathbf{B}_1 + \mathbf{P} \mathbf{B}_2] \mathbf{f}(t) = 0. \quad (14)$$

В практических расчетах, как правило, в уравнение (14) добавляют матрицу демпфирования, учитывающую внешнее рассеяние энергии, пропорциональное матрице \mathbf{A} , и внутреннее рассеяние, пропорциональное матрице \mathbf{C} , т. е. $b_e \mathbf{A} + b_i \mathbf{C}$.

Таким образом, окончательно уравнение возмущенного движения в окрестности прямолинейной формы равновесия в форме МКЭ с учетом безразмерных параметров (2) и линейной модели рассеяния энергии можно записать как

$$\mathbf{A} \frac{d^2 \mathbf{f}(\tau)}{d\tau^2} + (\varepsilon_e \mathbf{A} + \varepsilon_i \mathbf{C}) \frac{d\mathbf{f}(\tau)}{d\tau} + [\mathbf{C} - (\alpha + \beta) \mathbf{B}_1 + \beta \mathbf{B}_2] \mathbf{f}(\tau) = 0. \quad (15)$$

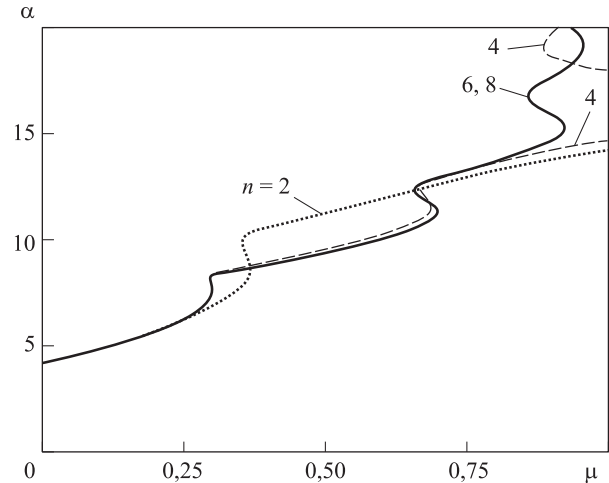


Рис. 6. Границы области устойчивости при различных значениях числа конечных элементов

Представим решение уравнения (15) в виде $\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_0 \exp(\lambda t)$, где \mathbf{f}_0 — начальное значение вектора узловых перемещений. Тогда относительно характеристических показателей λ получим обобщенную задачу на собственные значения в виде матричного полинома

$$\mathbf{A} \lambda^2 + (\varepsilon_e \mathbf{A} + \varepsilon_i \mathbf{C}) \lambda + \mathbf{C} - (\alpha + \beta) \mathbf{B}_1 + \beta \mathbf{B}_2 = 0. \quad (16)$$

После аналогичных математических выкладок для трубопровода (см. рис. 3) имеем уравнение

$$\mathbf{A} \lambda^2 + \alpha \sqrt{\mu} (\mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1 + \mathbf{D}_1) \lambda + \mathbf{C} - \alpha^2 (\mathbf{B} + \mathbf{D}_2) = 0, \quad (17)$$

где $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ — объединения следующих матриц:

$$\mathbf{G}_1^{(k)} = \int_0^{a_k} \mathbf{M}_k^T \mathbf{H}_k dx_k; \quad \mathbf{G}_2^{(k)} = \int_0^{a_k} \mathbf{H}_k^T \mathbf{M}_k dx_k;$$

$$\mathbf{D}_1^{(k)} = \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k \Big|_{x_k=a_k}; \quad \mathbf{D}_2^{(k)} = \mathbf{H}_k^T \mathbf{M}_k \Big|_{x_k=a_k}.$$

Матрицы \mathbf{A}, \mathbf{B} и \mathbf{C} при постоянных по длине характеристиках стержня и трубопровода определяются так же, как и ранее.

Вычисления по формулам (16) и (17) показали следующее. Для первой системы (консольного стержня) границу области устойчивости можно достаточно точно построить, используя всего два КЭ. При этом погрешность расчета критических значений потенциальной и следящей сил составляет 0,5 %.

На рис. 6 приведены результаты построения границы флаттера для задачи устойчивости трубопровода.

Сплошная линия (как и ранее) соответствует точному положению границы. Пунктирная линия построена при $n=2$, штриховая — при $n=4$. Здесь положение границы несколько более чувствительно к числу КЭ. Кроме того, наблюдается рост погрешности для малого значения n при возрастании относительной массы жидкости μ . Однако уже при $n=6$ и тем более при $n \geq 8$ граница, построенная с помощью МКЭ, практически совпадает с точной границей флаттера.

Выводы

1. Изложенные методы позволяют исследовать устойчивость различных неконсервативных

механических систем, в частности, определять критические значения нагрузок, строить границы областей устойчивости, выявлять зависимости критических нагрузок от различных параметров.

2. Анализ результатов исследований показал, что метод разложения по собственным формам и МКЭ по крайней мере в рассмотренных задачах имеют хорошую сходимость и удобство в численной реализации.

3. Полученные данные могут быть использованы при проектировании и расчете элементов машиностроительных конструкций и обеспечении устойчивости разнообразных технологических процессов, например, при расчете системы дозаправки самолетов.

Литература

- [1] Николаи Е.Л. *Труды по механике*. Москва, Гостехиздат, 1955, с. 357–406.
- [2] Бологин В.В. *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*. Москва, Физматгиз, 1961. 339 с.
- [3] Феодосьев В.И. *Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов*. Москва, Наука, 1973. 400 с.
- [4] Циглер Г. *Основы теории устойчивости конструкций*. Москва, Мир, 1971. 192 с.
- [5] Радин В.П., Самогин Ю.Н., Чирков В.П., Щугорев А.В. *Решение неконсервативных задач теории устойчивости*. Москва, Физматлит, 2017. 240 с.
- [6] Каган-Розенцвейг Л.М. *Вопросы неконсервативной теории устойчивости*. Санкт-Петербург, СПбГАСУ, 2014. 174 с.
- [7] Seyranian A.R., Elishakoff I. *Modern problem of structural stability*. New York, Springer-Verlag Wien, 2002. 394 p.
- [8] Elishakoff I. *Resolution of the 20th century conundrum in elastic stability*. Florida Atlantic University, 2014. 334 p.
- [9] Лагозинский С.А., Соколов А.И. Устойчивость прямолинейных стержней, нагруженных следящими силами. *Проблемы прикладной механики, динамики и прочности машин*. Сб. ст., Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005, с. 244–259.
- [10] Bigoni D., Noselli G. Experimental evidence of flutter and divergence instabilities induced by dry friction. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2011, vol. 59, pp. 2208–2226, doi: 10.1016/j.jmps.2011.05.007
- [11] Shvartsman B.S. Large deflections of a cantilever beam subjected to a follower force. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, vol. 304, pp. 969–973, doi: 10.1016/j.jsv.2007.03.010
- [12] Elishakoff I. Controversy associated with the so-called «follower forces»: critical overview. *Applied Mechanics Reviews*, 2005, vol. 58, pp. 117–142, doi: 10.1115/1.1849170
- [13] Xiao Q.-X., Li X.-F. Flutter and vibration of elastically restrained nanowires under a non-conservative force. *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2018, no. 9, pp. 1–15, doi: 10.1002/zamm.201700325
- [14] Yang X., Yang T., Jin J. Dynamic stability of a beam-model viscoelastic pipe for conveying pulsative fluid. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2007, vol. 20, no. 4, pp. 350–356, doi: 10.1007/s10338-007-0741-x
- [15] Olson L., Jamison D. Application of a general purpose finite element method to elastic pipes conveying fluid. *Journal of Fluids and Structures*, 1997, no. 11, pp. 207–222, doi: 10.1006/jfls.1996.0073
- [16] Alshorbagy A.E., Eltahir M.A., Mahmoud F.F. Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method. *Applied Mathematical Modelling*, 2011, vol. 35, no. 1, pp. 412–425, doi: 10.1016/j.apm.2010.07.006

References

- [1] Nikolai E.L. *Trudy po mekhanike* [Works on mechanics]. Moscow, Gostekhizdat publ., 1955, pp. 357–406.
- [2] Bolotin V.V. *Nekonservativnye zadachi teorii uprugoy ustoychivosti* [Nonconservative problems of the theory of elastic stability]. Moscow, Fizmatgiz publ., 1961. 339 p.
- [3] Feodos'ev V.I. *Izbrannye zadachi i voprosy po soprotivleniyu materialov* [Selected problems and questions on the resistance of materials]. Moscow, Nauka publ., 1973. 400 p.
- [4] Tsigler G. *Osnovy teorii ustoychivosti konstruksiy* [Fundamentals of the theory of stability of structures]. Moscow, Mir publ., 1971. 192 p.
- [5] Radin V.P., Samogin Yu.N., Chirkov V.P., Shchugorev A.V. *Reshenie nekonservativnykh zadach teorii ustoychivosti* [Solution of non-conservative problems of stability theory]. Moscow, Fizmatlit publ., 2017. 240 p.
- [6] Kagan-Rozentsveyg L.M. *Voprosy nekonservativnoy teorii ustoychivosti* [Questions of the nonconservative theory of stability]. Sankt-Petersburg, SPbGASU publ., 2014. 174 p.
- [7] Seyranian A.R., Elishakoff I. *Modern problem of structural stability*. New York, Springer-Verlag Wien, 2002. 394 p.
- [8] Elishakoff I. *Resolution of the 20th century conundrum in elastic stability*. Florida Atlantic University, 2014. 334 p.
- [9] Lagozinskii S.A., Sokolov A.I. Straight-line stability of the rods loaded by tracking forces. *Problemy prikladnoi mekhaniki, dinamiki i prochnosti mashin. Sb. statei* [Problems of applied mechanics, dynamics and strength of machines. Collected papers]. Moscow, Bauman Press, 2005, pp. 244–259 (in Russ.).
- [10] Bigoni D., Noselli G. Experimental evidence of flutter and divergence instabilities induced by dry friction. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2011, vol. 59, pp. 2208–2226, doi: 10.1016/j.jmps.2011.05.007
- [11] Shvartsman B.S. Large deflections of a cantilever beam subjected to a follower force. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, vol. 304, pp. 969–973, doi: 10.1016/j.jsv.2007.03.010
- [12] Elishakoff I. Controversy associated with the so-called «follower forces»: critical overview. *Applied Mechanics Reviews*, 2005, vol. 58, pp. 117–142, doi: 10.1115/1.1849170
- [13] Xiao Q.-X., Li X.-F. Flutter and vibration of elastically restrained nanowires under a non-conservative force. *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2018, no. 9, pp. 1–15, doi: 10.1002/zamm.201700325
- [14] Yang X., Yang T., Jin J. Dynamic stability of a beam-model viscoelastic pipe for conveying pulsative fluid. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2007, vol. 20, no. 4, pp. 350–356, doi: 10.1007/s10338-007-0741-x
- [15] Olson L., Jamison D. Application of a general purpose finite element method to elastic pipes conveying fluid. *Journal of Fluids and Structures*, 1997, no. 11, pp. 207–222, doi: 10.1006/jfls.1996.0073
- [16] Alshorbagy A.E., Eltaher M.A., Mahmoud F.F. Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method. *Applied Mathematical Modelling*, 2011, vol. 35, no. 1, pp. 412–425, doi: 10.1016/j.apm.2010.07.006

Статья поступила в редакцию 17.04.2019

Информация об авторах

РАДИН Владимир Павлович — кандидат технических наук, профессор кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». НИУ «МЭИ» (111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14, e-mail: radinvp@gmail.com).

ЧИРКОВ Виктор Петрович — доктор технических наук, профессор кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». НИУ «МЭИ» (111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14, e-mail: victor.p.chirkov@gmail.com).

ЩУГОРЕВ Алексей Владимирович — кандидат технических наук, ассистент кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». НИУ «МЭИ» (111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14, e-mail: alexey.salut@gmail.com).

ЩУГОРЕВ Владимир Николаевич — кандидат технических наук, доцент кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». НИУ «МЭИ» (111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14, e-mail: shchugorev.vn@gmail.com).

Information about the authors

RADIN Vladimir Pavlovich — Candidate of Science (Eng.), Professor, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines. National Research University — Moscow Power Engineering Institute (111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14, e-mail: radinvp@gmail.com).

CHIRKOV Viktor Petrovich — Doctor of Sciences (Eng.), Professor, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines. National Research University — Moscow Power Engineering Institute (111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14, e-mail: victor.p.chirkov@gmail.com).

SHCHUGOREV Aleksei Vladimirovich — Candidate of Sciences (Eng.), Teaching Assistant, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines. National Research University — Moscow Power Engineering Institute (111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14, e-mail: alexey.salut@gmail.com).

SHCHUGOREV Vladimir Nikolaevich — Candidate of Sciences (Eng.), Associate Professor, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines. National Research University — Moscow Power Engineering Institute (111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14, e-mail: shchugorev.vn@gmail.com).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Радин В.П., Чирков В.П., Щугорев А.В., Щугорев В.Н. Методы определения критических значений неконсервативных нагрузок в задачах устойчивости механических систем. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2019, № 10, с. 3–13, doi: 10.18698/0536-1044-2019-10-3-13

Please cite this article in English as:

Radin V.P., Chirkov V.P., Shchugorev A.V., Shchugorev V.N. Methods for Determining Critical Values of Non-conservative Loads in Problems of Stability of Mechanical Systems. *Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2019, no. 10, pp. 3–13, doi: 10.18698/0536-1044-2019-10-3-13