

УДК 69.04; 62.26

doi: 10.18698/0536-1044-2020-5-11-20

# Анализ матриц жесткости элементов Tube для оценки корректности моделирования криволинейных элементов трубопроводных систем

**В.В. Шелофаст<sup>1,2</sup>, В.В. Шелофаст<sup>2</sup>**<sup>1</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана<sup>2</sup> ООО НТЦ «АПМ»

## An Analysis of Stiffness Matrices of Tube Elements to Assess the Correctness of Modeling Curved Elements of Pipeline Systems

**V.V. Shelofast<sup>1,2</sup>, V.V. Shelofast<sup>2</sup>**<sup>1</sup> Bauman Moscow State Technical University<sup>2</sup> Research and Software Development Centre APM

Масштабные работы по созданию отечественной системы инженерного анализа предполагают выполнение огромного числа специализированных задач, каждая из которых требует индивидуального подхода и специфического решения. Не исключением являются и расчеты трубопроводных систем, наиболее просто осуществляемые в варианте стержневого представления. Такой подход наиболее эффективен для повышения скорости вычислений, увеличения размерности выполняемых задач и, главное, для упрощения процедуры моделирования. Рассмотрен вариант определения матриц жесткости трубопроводного пространственного элемента, служащих основой полного инженерного анализа трубопроводных систем. Приведены верификационные примеры, подтверждающие надежность и корректность получаемых решений.

**Ключевые слова:** матрица жесткости, матрица податливости, вектор узловых нагрузок, функции формы, узловые перемещения, нормальные напряжения

Large-scale work to create a Russian engineering analysis system involves the implementation of a considerable number of specialized tasks, each of which requires an individual approach and specific solutions. The calculation of pipeline systems that can most easily be performed in the version using rods is no exception. Such an approach is the most effective in terms of increasing the speed of calculations, increasing the dimension of the tasks performed, and most importantly, in simplifying the modeling procedure. In this paper, the authors consider the option of determining the stiffness matrices of a spatial element for modeling of pipes, which underlie the full engineering analysis of pipeline systems. Verification examples that confirm the reliability and correctness of the obtained solutions are presented.

**Keywords:** stiffness matrix, ductility matrix, nodal load vector, shape functions, nodal displacements, normal stresses

Для моделирования отдельных участков трубопроводных систем удобнее использовать не оболочечные и твердотельные элементы, а конечные элементы Tube круглого поперечного

сечения [1–13]. При таком варианте моделирования участок трубы представляется конечными элементами, аналогичными стержневым, и все методы стержневого анализа после дора-

ботки и дополнения можно применять для инженерного анализа трубопроводов.

Задача инженерного анализа трубопроводных систем поставлена в связи с разработкой отечественной системы САПР, куда трубопроводы входят в качестве конструктивных составных элементов. Так как участок трубопровода может быть криволинейным, рассмотрим именно такую его конфигурацию с целью соблюдения общности.

Для получения универсальных решений исследуем криволинейный двухузловой пространственный элемент трубопровода, имеющего шесть степеней свободы в каждом узле, при приложении к нему таких нагрузок, как собственный вес, внешнее и внутреннее давления, равномерные распределенные по длине силы и термические нагрузки.

Цель работы — определение матрицы жесткости изогнутого элемента трубопровода и эквивалентных узловых усилий, возникающих под действием распределенных внешних силовых факторов.

Прямолинейный элемент трубопровода работает на растяжение–сжатие, изгиб и кручение, поэтому для него можно использовать давно разработанные модели балочных элементов. Наименее изученным вопросом является формирование матрицы жесткости пространственных элементов.

**Определение матрицы жесткости изогнутого участка трубопровода с постоянным радиусом.** Схема изогнутого участка трубопровода приведена на рис. 1.

Вывод матрицы жесткости изогнутого элемента трубопровода основан на использовании теоремы Кастилиано, связывающей приложенные силы и вызываемые ими перемещения. Для получения полной матрицы применим принцип суперпозиции обобщенных сил.

Теорему Кастилиано запишем в виде

$$u_i = \partial U / \partial F_i,$$

где  $u_i$  — перемещение элемента в направлении  $i$ -й степени свободы, возникающее под действием обобщенной силы  $F_i$ ;  $U$  — энергия деформации.

Введем следующие обозначения:  $R$  — радиус гiba;  $H$  и  $V$  — горизонтальная  $F_x$  и вертикальная  $F_y$  компоненты обобщенной силы;  $\varphi$  — полный угол гiba, отсчитываемый от узла 1 к узлу 2 (рис. 2).

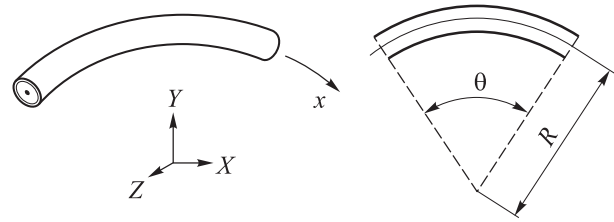


Рис. 1. Схема изогнутого участка трубопровода

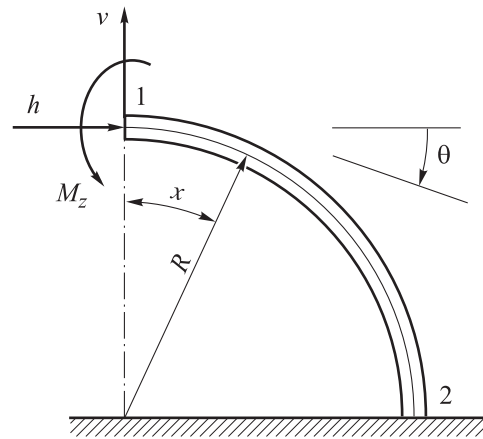


Рис. 2. Схема силовых факторов, действующих на изогнутый элемент трубопровода ( $M_z$  — изгибающий момент в плоскости гiba)

Рассмотрим силовые факторы, возникающие под действием узловых нагрузок на расстоянии  $x = R\theta$  от начала изогнутого элемента трубопровода (рис. 2).

Полная энергия деформации имеет вид

$$U = \int_0^l \frac{M_x^2}{2EJ_x} dx + \int_0^l \frac{M_y^2}{2EJ_y} dx + \int_0^l \frac{M_{tor}^2}{2GJ_{tor}} dx + \int_0^l \frac{N^2}{2EF} dx + \int_0^l \frac{k_x Q_x^2}{2GF} dx + \int_0^l \frac{k_y Q_y^2}{2GF} dx, \quad (1)$$

где  $l$  — длина дуги криволинейного элемента;  $M_x$  и  $M_y$  — изгибающие моменты относительно осей  $X$  и  $Y$ ;  $E$  — модуль упругости материала элемента;  $J_x$  и  $J_y$  — моменты инерции относительно осей  $X$  и  $Y$ ;  $M_{tor}$  — крутящий момент;  $G$  — модуль сдвига материала элемента;  $J_{tor}$  — момент кручения;  $N$  — осевая (касательная) сила;  $F$  — площадь поперечного сечения элемента;  $k_x$  и  $k_y$  — коэффициенты, зависящие от формы сечения, возникающие как результат применения формулы Журавского, для тонкостенных круглых труб  $k_x = k_y = 2$ ;  $Q_x$ ,  $Q_y$  — поперечные силы относительно осей  $X$  и  $Y$ .

В общем случае для определения матрицы гибкости (податливости) элемента, а также мат-

рицы жесткости как обратной величины к матрице податливости, используем теорему Кастилиано.

Рассмотрим часть полной энергии деформации, отвечающей за изгиб в плоскости элемента. Вклад в эту энергию действия изгибающего момента в плоскости элемента вычисляется по формуле

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EJ_z} dx = \int_0^\varphi \frac{M^2(\theta)}{2EJ_z} R d\theta,$$

где  $M$  — изгибающий момент в плоскости элемента;  $J_z$  — момент инерции сечения относительно оси  $z$ .

Моменты, возникающие в поперечном сечении  $x$  элемента под действием силовых факторов, определяются следующими выражениями:

• от силовых факторов в первом (или начальном) узле

$$M_1(\theta) = F_{x1}(1 - \cos\theta)R - F_{y1}\sin\theta R + M_{z1};$$

• от силовых факторов во втором (или конечном) узле

$$M_2(\theta) = -F_{x2}(\cos\theta - \cos\varphi)R + F_{y2}(\sin\varphi - \sin\theta)R + M_{z2},$$

где  $F_{x1}$ ,  $F_{x2}$  и  $F_{y1}$ ,  $F_{y2}$  — горизонтальные и вертикальные компоненты обобщенных сил, действующих в первом и втором узле элемента соответственно;  $M_{z1}$  и  $M_{z2}$  — изгибающие моменты, возникающие в первом и втором узле элемента.

Применяя теорему Кастилиано, получаем следующие выражения для узловых перемещений, происходящих под действием обобщенных сил в первом узле элемента:

$$u_1 = \partial U / \partial F_{x1} = \int_0^\varphi \frac{M_1(\theta)}{EJ_z} \frac{\partial M_1(\theta)}{\partial F_{x1}} R d\theta;$$

$$v_1 = \partial U / \partial F_{y1} = \int_0^\varphi \frac{M_1(\theta)}{EJ_z} \frac{\partial M_1(\theta)}{\partial F_{y1}} R d\theta;$$

$$\theta_{z1} = \partial U / \partial M_{z1} = \int_0^\varphi \frac{M_1(\theta)}{EJ_z} \frac{\partial M_1(\theta)}{\partial M_{z1}} R d\theta,$$

где  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $\theta_{z1}$  — перемещения и угол поворота первого узла в локальной системе координат в плоскости элемента;  $J_z$  — момент инерции сечения элемента относительно оси  $z$ .

Дифференцируя выражения для узловых перемещений, происходящих под действием

обобщенных сил в первом узле элемента, получаем

$$\frac{\partial M_1(\theta)}{\partial F_{x1}} = 1 - \cos\theta;$$

$$\frac{\partial M_1(\theta)}{\partial F_{y1}} = -R \sin\theta;$$

$$\frac{\partial M_1(\theta)}{\partial M_{z1}} = 1.$$

После подстановки этих соотношений в формулы для узловых перемещений первого узла элемента и интегрирования полученных выражений имеем

$$u_1 = \partial U / \partial F_{x1} = \frac{R^2}{4EJ} \{-2RV_1 + 4M_{z1}\varphi + 6H_1R\varphi - 4M_{z1}\sin\varphi + R[-2V_1(-2 + \cos\varphi)\cos\varphi + H_1(-8\sin\varphi) + \sin 2\varphi]\};$$

$$v_1 = \partial U / \partial F_{y1} = \frac{R^2}{2EJ_1} [2M_{z1}(-1 + \cos\varphi) + 2H_1R(-1 + \cos\varphi) + H_1R\sin\varphi^2 + RV_1(\varphi - \cos\varphi\sin\varphi)];$$

$$\theta_{z1} = \partial U / \partial M_{z1} = \frac{R[M_{z1}\varphi + H_1R\varphi + RV_1(-1 + \cos\varphi) - H_1R\sin\varphi]}{EJ_1},$$

где  $V_1 = F_{y1}$ ;  $H_1 = F_{x1}$ ;  $J_1 = J_z$ .

Введем матрицу гибкости изогнутого элемента  $[Flex]$ , связывающую его узловые перемещения и силы:

$$\mathbf{u} = [Flex] \cdot \mathbf{F}$$

или

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \theta_{z2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Flex_{1,1} & \cdots & Flex_{1,12} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Flex_{12,1} & \cdots & Flex_{12,12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{x1} \\ \vdots \\ M_{z2} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{F}$  — векторы узловых перемещений и сил;  $\theta_{z2}$  — угол поворота второго узла в локальной системе координат в плоскости элемента.

Коэффициенты матрицы (2) являются коэффициентами при соответствующих силовых факторах в выражениях для перемещений

$$Flex_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial F_j}. \quad (3)$$

Найдем верхнюю левую часть матрицы гибкости (2) от изгибающего момента в плоскости первого узла элемента:

$$\begin{aligned} Flex_{1,1} &= \frac{\partial u_1}{\partial F_{x1}} = \frac{R^3 (6\varphi - 8 \sin \varphi + \sin 2\varphi)}{4EJ_1}; \\ Flex_{1,2} &= \frac{\partial u_1}{\partial F_{y1}} = -\frac{2R^3 \sin(\varphi/2)^4}{EJ_1}; \\ Flex_{1,6} &= \frac{\partial u_1}{\partial M_{z1}} = \frac{R^2 (\varphi - \sin \varphi)}{EJ_1}; \\ Flex_{2,1} &= \frac{\partial v_1}{\partial F_{x1}} = -\frac{2R^3 \sin(\varphi/2)^4}{EJ_1}; \\ Flex_{2,2} &= \frac{\partial v_1}{\partial F_{y1}} = \frac{R^3 (\varphi - \cos \varphi \sin \varphi)}{2EJ_1}; \\ Flex_{2,6} &= \frac{\partial v_1}{\partial M_{z1}} = \frac{R^2 (-1 + \cos \varphi)}{EJ_1}; \\ Flex_{6,1} &= \frac{\partial \theta_{z1}}{\partial F_{x1}} = \frac{R^2 (\varphi - \sin \varphi)}{EJ_1}; \\ Flex_{6,2} &= \frac{\partial \theta_{z1}}{\partial F_{y1}} = \frac{R^2 (-1 + \cos \varphi)}{EJ_1}; \\ Flex_{6,6} &= \frac{\partial \theta_{z1}}{\partial M_{z1}} = \frac{R\varphi}{EJ_1}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом получим выражения для узловых перемещений, происходящих под действием обобщенных сил во втором узле элемента:

$$\begin{aligned} u_2 &= \partial U / \partial F_{x2} = \int_0^\varphi \frac{M_2(\theta)}{EJ_z} \frac{\partial M_2(\theta)}{\partial F_{x2}} R d\theta; \\ v_2 &= \partial U / \partial F_{y2} = \int_0^\varphi \frac{M_2(\theta)}{EJ_z} \frac{\partial M_2(\theta)}{\partial F_{y2}} R d\theta; \\ \theta_{z2} &= \partial U / \partial M_{z2} = \int_0^\varphi \frac{M_2(\theta)}{EJ_z} \frac{\partial M_2(\theta)}{\partial M_{z2}} R d\theta, \end{aligned}$$

где  $u_2$ ,  $v_2$  — перемещения второго узла в локальной системе координат в плоскости элемента.

Дифференцируя выражения для узловых перемещений, происходящих под действием обобщенных сил во втором узле элемента, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_2(\theta)}{\partial F_{x2}} &= -R(\cos \theta - \cos \varphi); \\ \frac{\partial M_2(\theta)}{\partial F_{y2}} &= R(-\sin \theta + \sin \varphi); \\ \frac{\partial M_2(\theta)}{\partial M_{z2}} &= 1. \end{aligned}$$

После подстановки этих соотношений в формулы для узловых перемещений второго узла элемента и интегрирования полученных выражений имеем

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{4EJ_2} R^2 \{ (-4RV_2 + 4M_{z2}\varphi) \cos \varphi + \\ &R(3V_2 + 2H_2\varphi) \cos 2\varphi - 4M_{z2} \sin \varphi + \\ &+ R[V_2 + 4H_2\varphi + (-3H_2 + 2V_2\varphi) \sin 2\varphi] \}; \\ v_2 &= \frac{1}{4EJ_2} R^2 \{ -4M_{z2} + H_2R + 4RV_2\varphi + \\ &+ 4(M_{z2} - H_2R) \cos \varphi + R(3H_2 - 2V_2\varphi) \cos 2\varphi + \\ &+ 2[-4RV_2 + 2M_{z2}\varphi + R(3V_2 + 2H_2\varphi) \cos \varphi] \sin \varphi \}; \\ \theta_{z2} &= \frac{R}{EJ_2} [ -RV_2 + M_{z2}\varphi + R(V_2 + H_2\varphi) \cos \varphi - \\ &- R(H_2 - V_2\varphi) \sin \varphi ], \end{aligned}$$

где  $V_2 = F_{y2}$ ;  $H_2 = F_{x2}$ ;  $J_2 = J_z$ .

Найдем нижнюю левую часть матрицы гибкости от изгибающего момента в плоскости второго узла элемента

$$\begin{aligned} Flex_{7,7} &= \partial u_2 / \partial F_{x2} = \\ &= \frac{R^3 (4\varphi + 2\varphi \cos 2\varphi - 3 \sin 2\varphi)}{4EJ_2}; \\ Flex_{7,8} &= \partial u_2 / \partial F_{y2} = \\ &= -\frac{R^3 (-1 + 4 \cos \varphi - 3 \cos 2\varphi - 2\varphi \sin 2\varphi)}{4EJ_2}; \\ Flex_{7,12} &= \partial u_2 / \partial M_{z2} = \frac{R^2 (\varphi \cos \varphi - \sin \varphi)}{EJ_2}; \\ Flex_{8,7} &= \partial v_2 / \partial F_{x2} = \\ &= \frac{R^3 [1 + 3 \cos 2\varphi + 4 \cos \varphi (-1 + \varphi \sin \varphi)]}{4EJ_2}; \\ Flex_{8,8} &= \partial v_2 / \partial F_{y2} = \\ &= -\frac{R^3 [-2\varphi + \varphi \cos 2\varphi + (4 - 3 \cos \varphi) \sin \varphi]}{2EJ_2}; \\ Flex_{8,12} &= \partial v_2 / \partial M_{z2} = \frac{R^2 (-1 + \cos \varphi + \varphi \sin \varphi)}{EJ_2}; \\ Flex_{12,7} &= \partial \theta_{z2} / \partial F_{x2} = \frac{R^2 (\varphi \cos \varphi - \sin \varphi)}{EJ_2}; \\ Flex_{12,8} &= \partial \theta_{z2} / \partial F_{y2} = \frac{R^2 (-1 + \cos \varphi + \varphi \sin \varphi)}{EJ_2}; \\ Flex_{12,12} &= \partial \theta_{z2} / \partial M_{z2} = \frac{R\varphi}{EJ_2}. \end{aligned}$$

В результате найдена следующая связь между узловыми перемещениями и силами в плоскости гiba:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{z1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Flex_{1,1} & Flex_{1,2} & Flex_{1,6} \\ Flex_{2,1} & Flex_{2,2} & Flex_{2,6} \\ Flex_{6,1} & Flex_{6,2} & Flex_{6,6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_{z1} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Flex_{7,7} & Flex_{7,8} & Flex_{7,12} \\ Flex_{8,7} & Flex_{8,8} & Flex_{8,12} \\ Flex_{12,7} & Flex_{12,8} & Flex_{12,12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{pmatrix}.$$

Для получения матриц жесткости необходимо инвертировать матрицы гибкости:

$$KStif11 = \begin{pmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,6} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & K_{2,6} \\ K_{6,1} & K_{6,2} & K_{6,6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Flex_{1,1} & Flex_{1,2} & Flex_{1,6} \\ Flex_{2,1} & Flex_{2,2} & Flex_{2,6} \\ Flex_{6,1} & Flex_{6,2} & Flex_{6,6} \end{pmatrix}^{-1}; \quad (4)$$

$$KStif22 = \begin{pmatrix} K_{7,7} & K_{7,8} & K_{7,12} \\ K_{8,7} & K_{8,8} & K_{8,12} \\ K_{12,7} & K_{12,8} & K_{12,12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Flex_{7,7} & Flex_{7,8} & Flex_{7,12} \\ Flex_{8,7} & Flex_{8,8} & Flex_{8,12} \\ Flex_{12,7} & Flex_{12,8} & Flex_{12,12} \end{pmatrix}^{-1}.$$

Рассмотрим получение подматриц жесткости, связывающих перемещения с усилиями разных узлов. Для этого найдем реакции во втором узле  $R_{x2}$ ,  $R_{y2}$  на воздействие обобщенных сил в первом узле, и наоборот (рис. 3).

$$\begin{aligned} R_{x2} &= F_{x2} = -F_{x1}; \\ R_{y2} &= F_{y2} = -F_{y1}; \\ RM_{z2} &= M_{z2} = -F_{x1}R(1 - \cos \varphi) - F_{y1}R \sin \varphi - M_{z1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Из формулы (4) следует зависимость сил, возникающих в первом узле от перемещений в нем,

$$\begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_{z1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,6} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & K_{2,6} \\ K_{6,1} & K_{6,2} & K_{6,6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{z1} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Подставляя выражение (6) в формулу (5), получаем связь между усилиями на втором узле вследствие перемещений первого узла:

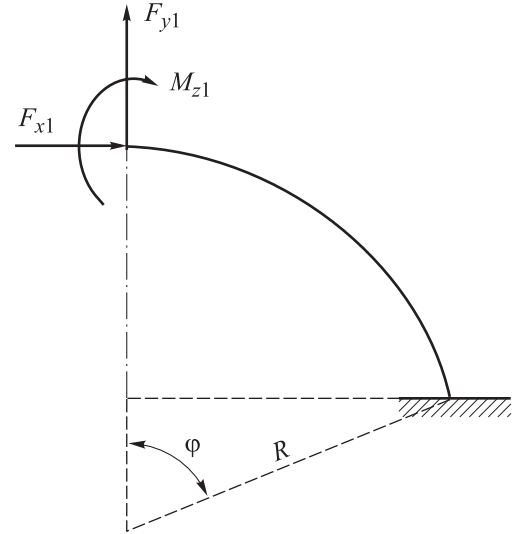


Рис. 3. Схема расчета реакций изогнутого участка трубопровода

$$\begin{pmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{7,1} & K_{7,2} & K_{7,6} \\ K_{8,1} & K_{8,2} & K_{8,6} \\ K_{12,1} & K_{12,2} & K_{12,6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{z1} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Коэффициенты формул (6) и (7) связаны следующим образом:

$$\begin{aligned} K_{7,1} &= -K_{1,1}; & K_{7,2} &= -K_{1,2}; & K_{7,6} &= -K_{1,6}; \\ K_{8,1} &= -K_{2,1}; & K_{8,2} &= -K_{2,2}; & K_{8,6} &= -K_{2,6}; \\ K_{12,1} &= -K_{1,1}R(1 - \cos \varphi) - K_{2,1}R \sin \varphi - K_{6,1}; \\ K_{12,2} &= -K_{1,2}R(1 - \cos \varphi) - K_{2,2}R \sin \varphi - K_{6,2}; \\ K_{12,6} &= -K_{1,6}R(1 - \cos \varphi) - K_{2,6}R \sin \varphi - K_{6,6}. \end{aligned}$$

Аналогичные вычисления выполняем для определения реакций в первом узле  $R_{x1}$  и  $R_{y1}$  на воздействие обобщенных сил во втором.

**Учет касательных сил.** Из формулы (1) следует, что вклад действия касательных сил в полную энергию деформации учитывается выражением

$$U = \int_0^l \frac{N^2}{2EF} dx.$$

Касательные силы, возникающие в сечении  $x$  под действием силовых факторов, определяются следующими выражениями:

- в первом узле
 
$$N_1(\theta) = F_{x1} \cos \theta + F_{y1} \sin \theta;$$
- во втором узле
 
$$N_2(\theta) = F_{x2} \cos \theta + F_{y2} \sin \theta.$$

Перемещения, происходящие вследствие действия касательных сил в первом узле, имеют вид

$$u_1 = \frac{\partial U}{\partial F_{x1}} = \int_0^\varphi \frac{N_1(\theta)}{EF} \frac{\partial N_1(\theta)}{\partial F_{x1}} R d\theta =$$

$$= \frac{R(F_{x1}\varphi + F_{x1} \cos \varphi \sin \varphi + F_{y1} \sin \varphi^2)}{2EF};$$

$$v_1 = \frac{\partial U}{\partial F_{y1}} = \int_0^\varphi \frac{N_1(\theta)}{EF} \frac{\partial N_1(\theta)}{\partial F_{y1}} R d\theta =$$

$$= \frac{R(F_{x1}\varphi + F_{x1} \cos \varphi \sin \varphi + F_{y1} \sin \varphi^2)}{2EF}.$$

Согласно выражению (3), добавки от касательных сил в верхнюю левую часть матрицы гибкости определяются следующим образом:

$$Flex_{1,2} = \partial u_1 / \partial F_{y1} = \frac{R \sin \varphi^2}{2EF};$$

$$Flex_{2,1} = \partial v_1 / \partial F_{x1} = \frac{R \sin \varphi^2}{2EF};$$

$$Flex_{2,2} = \partial v_1 / \partial F_{y1} = \frac{R(\varphi + \cos \varphi \sin \varphi)}{2EF}.$$

Аналогичные выражения получаем для подматрицы гибкости, соответствующей ее нижней левой части,  $Flex_{7,7}$ ,  $Flex_{7,8}$ ,  $Flex_{8,7}$ ,  $Flex_{8,8}$ .

Перемещения, происходящие вследствие действия касательных сил во втором узле, имеют вид

$$u_2 = \frac{\partial U}{\partial F_{x2}} = \int_0^\varphi \frac{N_2(\theta)}{EF} \frac{\partial N_2(\theta)}{\partial F_{x2}} R d\theta =$$

$$= \frac{R(F_{x2}\varphi + F_{x2} \cos \varphi \sin \varphi + F_{y2} \sin \varphi^2)}{2EF};$$

$$v_2 = \frac{\partial U}{\partial F_{y2}} = \int_0^\varphi \frac{N_2(\theta)}{EF} \frac{\partial N_2(\theta)}{\partial F_{y2}} R d\theta =$$

$$= \frac{R(F_{x2}\varphi + F_{x2} \cos \varphi \sin \varphi + F_{y2} \sin \varphi^2)}{2EF}.$$

**Расчет коэффициентов матрицы жесткости изогнутого элемента трубопровода для степеней свободы из плоскостигиба.** Общий подход к нахождению соответствующих подматриц жесткости остается таким же, как и для жестко-

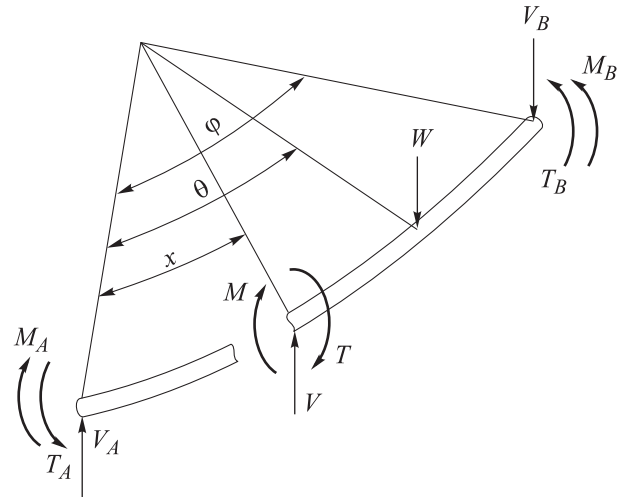


Рис. 4. Схема изогнутого участка трубопровода, нагруженного из плоскостигиба

сти в плоскостигиба. Схема изогнутого участка трубопровода, нагруженного из плоскостигиба, приведена ниже на рис. 4, где  $w$  — внешняя сила, приложенная из плоскостигиба;  $V_A$ ,  $T_A$  и  $M_A$  — сила из плоскостигиба, крутящий момент и изгибающий момент из плоскостигиба в первом узле соответственно;  $V_B$ ,  $T_B$  и  $M_B$  — сила из плоскостигиба, крутящий момент и изгибающий момент из плоскостигиба во втором узле соответственно;  $V$ ,  $T$  и  $M$  — сила из плоскостигиба, крутящий момент и изгибающий момент из плоскостигиба в рассматриваемом сечении на угловом расстоянии  $x$  от первого узла)

Изгибающий момент, в сечении  $x$ , возникающий под действием силовых факторов в первом узле (обозначенным точкой  $A$ ) изогнутого элемента,

$$M(x) = V_A \sin xR + M_A \cos x - T_A \sin x,$$

где  $V_A = F_{z1}$ ;  $M_A = M_{z1}$ ;  $T_A = M_{x1}$ .

Крутящий момент, возникающий в сечении  $x$  под действием силовых факторов в первом узле элемента,

$$M_{tor}(x) = V_A(1 - \cos x)R + M_A \sin x + T_A \cos x.$$

Энергия деформации имеет вид

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EJ_z} dx + \int_0^l \frac{M_{tor}^2}{2GJ_{tor}} dx.$$

Применяя теорему Кастилиано, получаем для параметров первого узла элемента следующие выражения:

• для узловых перемещений

$$w_1 = \frac{\partial U}{\partial F_{z1}} = \frac{\partial U}{\partial V_A} = \int_0^{\varphi} \frac{M(\theta)}{EJ_A} \frac{\partial M(\theta)}{\partial V_A} R d\theta + \int_0^{\varphi} \frac{M_{tor}(\theta)}{GJ_{tor}} \frac{\partial M_{tor}(\theta)}{\partial V_A} R d\theta = \frac{R^2}{4GJ_{tor}} [3M_A - 2T_A\varphi + 6RV_A\varphi - 4M_A \cos \varphi + M_A \cos 2\varphi + 4(T_A - 2RV_A) \sin \varphi + (-T_A + RV_A) \sin 2\varphi] + \frac{R^2}{4EJ_A} [2M_A \sin^2 \varphi + 2RV_A (\varphi - \cos \varphi \sin \varphi) + T_A (-2\varphi + \sin 2\varphi)];$$

• для угла изгиба

$$\theta_2 = \frac{\partial U}{\partial M_{z1}} = \frac{\partial U}{\partial M_A} = \int_0^{\varphi} \frac{M(\theta)}{EJ_A} \frac{\partial M(\theta)}{\partial M_A} R d\theta + \int_0^{\varphi} \frac{M_{tor}(\theta)}{GJ_{tor}} \frac{\partial M_{tor}(\theta)}{\partial M_A} R d\theta = \frac{R}{2EJ_A} [M_A\varphi + M_A \cos \varphi \sin \varphi + (-T_A + RV_A) \sin \varphi^2] + \frac{R}{2GJ_{tor}} [2RV_A + M_A\varphi + (T_A - RV_A) \sin \varphi^2 - \cos \varphi (2RV_A + M_A \sin \varphi)];$$

• для угла закручивания

$$\theta_1 = \frac{\partial U}{\partial M_{x1}} = \frac{\partial U}{\partial T_A} = \int_0^{\varphi} \frac{M(\theta)}{EJ_A} \frac{\partial M(\theta)}{\partial T_A} R d\theta + \int_0^{\varphi} \frac{M_{tor}(\theta)}{GJ_{tor}} \frac{\partial M_{tor}(\theta)}{\partial T_A} R d\theta = \frac{R}{2GJ_{tor}} \{ (T_A - RV_A)\varphi + [2RV_A + (T_A - RV_A) \cos \varphi] \sin \varphi + M_A \sin \varphi^2 \} + \frac{R}{4EJ_A} (2T_A\varphi - 2RV_A\varphi - 2T_A \cos \varphi \sin \varphi - 2M_A \sin \varphi^2 + RV_A \sin 2\varphi),$$

где  $J_A = J_z$ .

Соответствующая подматрица гибкости вычисляется согласно выражению (3).

Как уже указывалось, полная матрица жесткости получается суммированием подматриц, полученных от всех слагаемых в выражении энергии деформации.

**Вектор узловых нагрузок.** Получение эквивалентного вектора узловых нагрузок, возника-

ющих под действием температуры, внешнего и внутреннего давлений, представляет определенные сложности, так как у изогнутого элемента отсутствуют функции формы, и стандартный подход с использованием метода конечных элементов в данном случае неприменим.

Вектор сил от воздействия различных силовых факторов можно определить, используя уравнения равновесия и метод сил, как это сделал исследователь Варрен С. Янг (Warren C. Young) в 2002 г. Он же получил явные выражения для опорных реакций, там, где это возможно. Однако существуют трудности в применимости полученных результатов: наличие эмпирических коэффициентов, размытость границы в данных между тонкими и толстыми трубами, большая чувствительность коэффициентов матрицы системы уравнений метода сил при малых углахгиба, общая громоздкость финальных выражений.

В связи с этим для нагрузок, приводящих к осевым деформациямгиба, (таких как внешнее и внутреннее давления, температурное воздействие и предварительное натяжение), предлагается вычислять реакции в узлах непосредственно через матрицу жесткости элемента.

Для этого определяют удлинениегиба, возникающее под действием нагрузки, строят локальный вектор перемещений в касательных направлениях элемента с компонентами полученных удлинений (рис. 5) и рассчитывают вектор узловых реакций  $\{R\} = [K]\{u\}$ , где  $[K]$  — матрица жесткости элемента;  $\{u\}$  — вектор узловых перемещений.

Такой подход к расчету усилий является простым и эффективным, при этом реакции получаются согласованными по матрице жесткости.

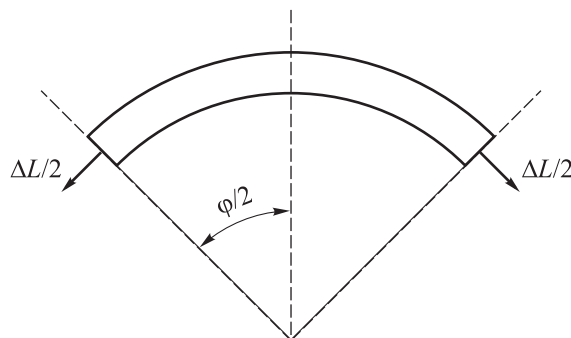


Рис. 5. Схема вычисления вектора узловых усилий ( $\Delta L$  — удлинениегиба)

Тестирование полученной матрицы жесткости на примере изогнутого участка трубопровода под действием сосредоточенной силы в плоскостигиба. Для проверки полученной матрицы жесткости проведем расчет участка трубопровода, изогнутого в виде арки и нагруженного сосредоточенной силой (рис. 6).

**Постановка задачи.** Участок трубопровода с наружным диаметром  $D_0$  и толщиной стенки  $t$ , изогнутый с радиусом изгиба  $R$ , шарнирно опертый с обоих концов, нагружен в верхней точке  $C$  плоскости арки сосредоточенной вертикальной силой  $P$ . В одной из опор (точка  $B$ ) разрешено горизонтальное перемещение.

Определим угол поворота трубопровода в точках опоры  $A$  и  $B$ , прогиб в среднем сечении и горизонтальное смещение опоры  $B$ , а также возникающие при этом нормальные напряжения в сечении рассматриваемого элемента.

**Исходные данные:** модуль упругости  $E = 2,0 \cdot 10^5$  МПа; коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ , радиус изгиба арки трубопровода  $R = 1000$  мм; внешний диаметр трубопровода  $D_0 = 20$  мм; толщина стенки трубопровода  $t = 2$  мм; сосредоточенная сила в плоскостигиба  $P = 100$  Н.

**Аналитическое решение.** Максимальные перемещения, возникающие на конце арки, определяются [14] максимальными нормальными напряжениями

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{изг}}}{W_{\text{изг}}} = 5 \cdot 10^4 / 463,699 = 107,83 \text{ МПа},$$

где  $M_{\text{изг}}$  — изгибающий момент в среднем сечении арки,  $M_{\text{изг}} = PR/2 = 5 \cdot 10^4$  Н·мм;  $W_{\text{изг}}$  — момент сопротивления сечения,  $W_{\text{изг}} = \pi(D_0^4 - D_i^4)/(32D_0) = 463,699$  мм<sup>4</sup> ( $D_i = 16$  мм — внутренний диаметр трубопровода).

Результаты расчета конечно-элементной модели приведены на рис. 7–9.

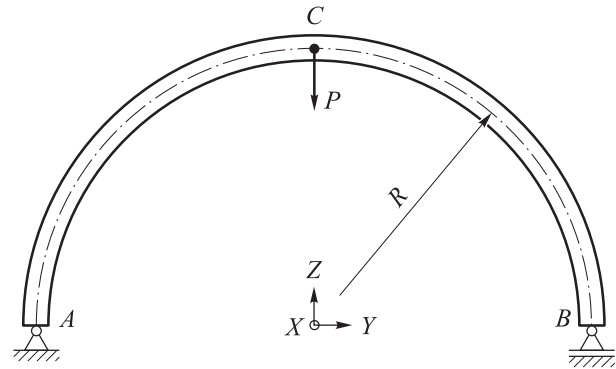


Рис. 6. Схема участка трубопровода, изогнутого в виде арки и нагруженного сосредоточенной силой

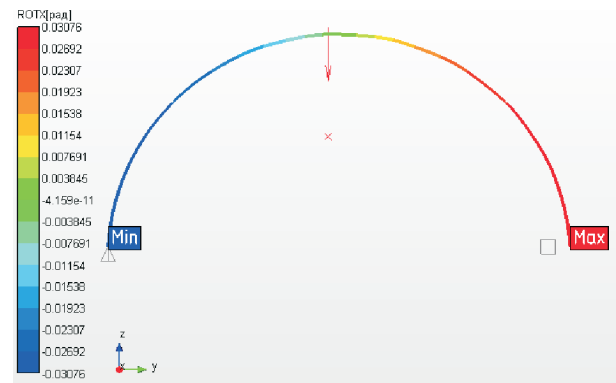


Рис. 7. Изменение угла поворота сечения трубопровода в опоре, рад, относительно оси  $x$

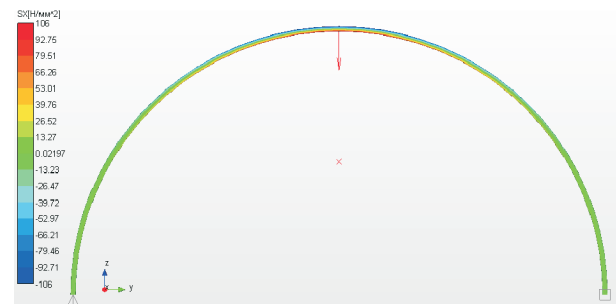
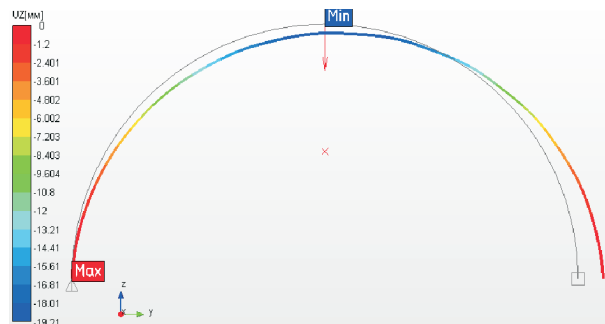
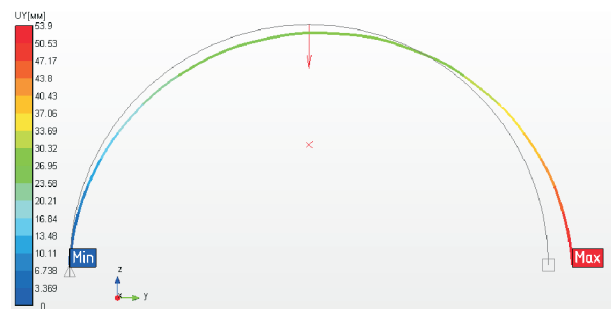


Рис. 8. Распределение нормальных напряжений, Н/мм<sup>2</sup>, по длине трубопровода



а



б

Рис. 9. Распределения перемещений арочного элемента, мм, по осям  $Z$  (а) и  $Y$  (б)



### Результаты расчета параметров арочного участка трубопровода

Параметр	Значение				Погрешность, %
	теоретическое	расчетное			
		$k = 2$	$k = 4$	$k = 8$	
Угол поворота сечения трубопровода в опоре, рад	$\pm 0,03077$	0,03076	0,03076	0,03076	0,03
Максимальное перемещение по оси Z, мм	-19,20	-19,21	-19,21	-19,21	0,05
Перемещение по оси Y в опоре B арки, мм	53,91	53,90	53,90	53,90	0,02
Максимальное нормальное напряжение в середине арочного участка, МПа	107,83	106,00	106,00	106,00	1,72

Результаты расчета конечно-элементных моделей и теоретических данных для арочного участка трубопровода с разным количеством  $k$  изогнутых элементов приведены в таблице.

Анализ полученных данных показал, что их точность практически не зависит от количества конечных элементов, используемых при моделировании.

### Выводы

1. Рассмотрен двухузловой пространственный элемент, имеющий шесть степеней свободы в каждом узле, для которого с помощью энергетического метода Кастилиано получена матрица жесткости.

2. С учетом отсутствия функций форм рассмотрены способы получения вектора реакций

на различные воздействия. Предложен простой способ определения этого вектора для нагрузок характерного типа.

3. Проведено тестирование полученной матрицы жесткости на примере участка трубопровода, изогнутого в виде арки при различном количестве конечных элементов. Полученное решение по перемещениям и углу поворота сечения хорошо согласуется с аналитическими данными, погрешность не превышает 0,1 %.

4. Выполнен анализ поведения элемента при решении динамических задач. Исходя из изложенного, можно утверждать, что представленный конечный элемент изогнутого участка трубопровода применим для моделирования трубопроводных систем при статических и динамических нагрузках.

### Литература

- [1] ANSYS (v.12.1). *Help*. URL: <https://www.ansys.com>.
- [2] ANSYS *Workbench Verification Manual, Release 18.2*. ANSYS, Inc, 2017. URL: [https://ecourses.ou.edu/fem/manuals/ANSYS\\_Workbench\\_Verification\\_Manual\\_v18.2.pdf](https://ecourses.ou.edu/fem/manuals/ANSYS_Workbench_Verification_Manual_v18.2.pdf).
- [3] Bathe K.-J. *Finite element procedures*. Englewood, New Jersey, Prentice Hall, 1996. 1065 p.
- [4] Hovgaard W. Stress in three dimensional pipe-bends. *Transactions of ASME*, 1935, vol. 57, pp. 401–416.
- [5] Kohnke P. *Ansys, Inc. Theory, Release 5.7*. SAS IP, 2001. 1126 p.
- [6] Peng L.-C., Peng T.-L. *Pipe stress engineering*. ASME, 2009. 506 p.
- [7] *Mecaniciens Societe Francaise des Guide de validation des progiciels de calcul de structures*. Test no. SSL08/89. Paris, Afnor Technique, 1990.
- [8] Thiagarajan N., Dhananjay R., Shakti Prasad. Stiffness of Pipe Elbow. *International Conference on Mechanical, Production and Automobile Engineering*, Pattaya, 2011, pp. 230–234.
- [9] Tulk J.D. *Correlation Between Dynamic Stress and Vibration Velocity in Complex Piping Systems*. Canadian Electrical Association, 1988. 46 p.
- [10] Young W.C., Budynas R.G., Sadegh A.M. *Roark's Formulas for Stress and Strain*. New York, McGraw-Hill, 2002. 852 p.
- [11] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element method. Solid mechanics*. Butterworth-Heinemann, 2000, vol. 2, 476 p.
- [12] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element method. The basis*. Butterworth-Heinemann, 2000, vol. 1, 708 p.

- [13] Агапов П. *Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости пространственных тонкостенных подкрепленных конструкций*. Москва, АСВ, 2000. 152 с.
- [14] Феодосьев В.И. *Сопротивление материалов*. Москва, Наука, 1972. 544 с.

## References

- [1] ANSYS (v.12.1) *Help. Elektronnyy resurs*. Available at: <https://www.ansys.com>.
- [2] ANSYS *Workbench Verification Manual, Release 15.0*. ANSYS, Inc, 2013. Available at: [https://ecourses.ou.edu/fem/manuals/ANSYS\\_Workbench\\_Verification\\_Manual\\_v18.2.pdf](https://ecourses.ou.edu/fem/manuals/ANSYS_Workbench_Verification_Manual_v18.2.pdf).
- [3] Bathe K.-J. *Finite element procedures*. Englewood, New Jersey, Prentice Hall, 1996. 1065 p.
- [4] Hovgaard W. Stress in three dimensional pipe-bends. *Transactions of ASME*, 1935, vol. 57, pp. 401–416.
- [5] Kohnke P. *Ansys, Inc. Theory, Release 5.7*. SAS IP, 2001. 1126 p.
- [6] Peng L.-C., Peng T.-L. *Pipe stress engineering*. ASME, 2009. 506 p.
- [7] *Mecaniciens Societe Francaise des Guide de validation des progiciels de calcul de structures*. Test no. SLL08/89. Paris, Afnor Technique, 1990.
- [8] Thiagarajan N., Dhananjay R., Shakti Prasad. Stiffness of Pipe Elbow. *International Conference on Mechanical, Production and Automobile Engineering*, Pattaya, 2011, pp. 230–234.
- [9] Tulk J.D. *Correlation Between Dynamic Stress and Vibration Velocity in Complex Piping Systems*. Canadian Electrical Association, 1988. 46 p.
- [10] Young W.C., Budynas R.G., Sadegh A.M. *Roark's Formulas for Stress and Strain*. New York, McGraw-Hill, 2002. 852 p.
- [11] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element method. Solid mechanics*. Butterworth-Heinemann, 2000, vol. 2, 476 p.
- [12] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element method. The basis*. Butterworth-Heinemann, 2000, vol. 1, 708 p.
- [13] Agapov P. *Metod konechnykh elementov v statike, dinamike i ustoychivosti prostranstvennykh tonkostennykh podkreplennykh konstruksiy* [The finite element method in the statics, dynamics and stability of spatial thin-walled reinforced structures]. Moscow, ASV publ., 2000. 152 p.
- [14] Feodos'yev V.I. *Soprotivleniye materialov* [Strength of materials]. Moscow, Nauka publ., 1972. 544 p.

Статья поступила в редакцию 13.12.2019

## Информация об авторах

**ШЕЛОФАСТ Владимир Васильевич** — доктор технических наук, профессор кафедры «Основы конструирования машин». МГТУ им. Н.Э. Баумана; генеральный директор ООО НТЦ «АПМ» (141070, Московская область, Королев, Российская Федерация, Октябрьский бульвар, д. 14, офис 6, e-mail: [vvshelofast@apm.ru](mailto:vvshelofast@apm.ru)).

**ШЕЛОФАСТ Вадим Владимирович** — технический директор ООО НТЦ «АПМ» (141070, Московская область, Королев, Российская Федерация, Октябрьский бульвар, д. 14, офис 6, e-mail: [vshelofast@yahoo.com](mailto:vshelofast@yahoo.com)).

## Information about the authors

**SHELOFAST Vladimir Vasilievich** — Doctor of Science (Eng.), Professor, Department of Fundamentals of Machine Design. Bauman Moscow State Technical University; General Director of Research and Software Development Centre APM (141070, Moscow region, Korolev, Russian Federation, Oktyabrskiy Blvd., Bldg. 14, Office 6, e-mail: [vvshelofast@apm.ru](mailto:vvshelofast@apm.ru)).

**SHELOFAST Vadim Vladimirovich** — Chief Technical Officer of Research and Software Development Centre APM (141070, Moscow region, Korolev, Russian Federation, Oktyabrskiy Blvd., Bldg. 14, Office 6, e-mail: [vshelofast@yahoo.com](mailto:vshelofast@yahoo.com)).

### Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Шелофаст В.В., Шелофаст В.В. Анализ матриц жесткости элементов Tube для оценки корректности моделирования криволинейных элементов трубопроводных систем. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2020, № 5, с. 11–20, doi: 10.18698/0536-1044-2020-5-11-20

### Please cite this article in English as:

Shelofast V.V., Shelofast V.V. An Analysis of Stiffness Matrices of Tube Elements to Assess the Correctness of Modeling Curved Elements of Pipeline Systems. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2020, no. 5, pp. 11–20, doi: 10.18698/0536-1044-2020-5-11-20