

УДК 531.8; 621.01

doi: 10.18698/0536-1044-2020-8-21-28

# Влияние особых положений на жесткость механизмов параллельной структуры

**К.Г. Эрастова**

МГТУ им. Н.Э. Баумана

## The Influence of Special Positions on the Rigidity of Parallel Structure Mechanisms

**K.G. Erastova**

Bauman Moscow State Technical University

■ Применение роботов на основе механизмов с замкнутыми кинематическими цепями становится перспективным вследствие резкого повышения точности изготовления и контроля изделий машиностроения. Одним из преимуществ механизмов параллельной структуры над таковыми с последовательной структурой является повышенная жесткость конструкции. Отсутствие закономерности изменения жесткости по рабочей зоне и влияние так называемых особых положений обуславливают необходимость разработки новых методов оптимизационного синтеза механизма, основанных на этом параметре. Предложен подход, базирующийся на использовании матрицы Якоби механизма, позволяющий выявлять жесткость в наихудшем направлении приложения внешней силы в каждой точке рабочего пространства. Такой подход позволяет определять форму и размеры эффективной рабочей зоны. На примере плоского пятизвенного механизма продемонстрировано применение этого подхода: получены матрицы жесткости звеньев, построен параллелограмм сил и определено распределение жесткости по рабочей зоне. Показано, что при приближении к особому положению жесткость механизма уменьшается в десятки раз, а непосредственно в нем равна нулю. Предложенный подход может быть использован при оптимизации геометрических параметров механизма из условия максимизации эффективной рабочей зоны.

**Ключевые слова:** механизмы параллельной структуры, жесткость механизма, матрица Якоби, оптимизационный синтез, робототехнические системы, рабочая зона

■ Due to a sharp increase in the accuracy of manufacturing and quality control of mechanical engineering products, robots based on mechanisms with closed-loop kinematic chains have become a promising area of engineering. One of the advantages of parallel structure mechanisms over serial mechanisms is their increased rigidity. The absence of patterns in the change of rigidity in the working zone and the influence of the so-called special positions necessitate the development of new methods of optimization synthesis of the mechanism. This paper presents an approach based on the Jacobian matrix using which it is possible to determine rigidity in the worst direction of the external force application in each point of the working zone. The same approach can also be used for determining the shape and size of the effective working zone. An example of a flat five-chain mechanism is used to demonstrate the application of the method and obtain a matrix of chain rigidity, construct the parallelogram of forces and determine rigidity distribution in the working zone. It is shown that when approaching a special position, the rigidity of the mechanism decreases ten-fold, and in the special position it equals a zero. The proposed method can be used for optimizing the geometrical parameters of the mechanism on the conditions of maximising the effective working zone.

**Keywords:** mechanisms of parallel structure, mechanism rigidity, Jacobian matrix, optimization synthesis, robotic systems, working zone

Механизмы параллельной структуры (МПС) нашли широкое применение в различных областях техники. Их используют как в любительских 3D-принтерах, так и в высокоскоростных манипуляционных комплексах, медицинских роботах, и в установках, работающих в агрессивных средах.

Повышенный интерес к механизмам такого типа обусловлен их характеристиками, пониженной металлоемкостью и повышенными грузоподъемностью и жесткостью по сравнению с механизмами последовательной структуры. МПС воспринимают нагрузку подобно пространственным фермам, что позволяет им манипулировать более массивными объектами [1], а жесткость замкнутой кинематической цепи гораздо выше незамкнутой [2].

Несмотря на перечисленные достоинства, МПС обладают существенным недостатком: в некоторых положениях, называемых особыми (или сингулярными), кинематическая структура механизма вырождается, и выходное звено (или отдельные звенья) манипулятора могут потерять управляемость или подвижность [2, 3].

Негативные явления (снижение точности позиционирования и жесткости, повышение нагрузки на приводы) начинают проявляться уже при приближении к особым положениям [4], что обуславливает необходимость тщательного синтеза и анализа робота-манипулятора и подбора геометрических параметров, минимизирующих размеры данных областей.

Цель работы — исследование влияния особых положений на жесткость МПС, а также создание алгоритмов вычисления формы и размера эффективной рабочей зоны манипулятора по жесткости. Это позволит сформировать практические рекомендации для конструкторов робототехнических систем.

Эффективная рабочая зона манипулятора определяется как множество точек, в которых может находиться выходное звено МПС согласно конструктивным ограничениям реального механизма и требованиям по нужной ориентации выходного звена при условии сохранения в этих точках необходимых конструктивных параметров [5].

В качестве критического параметра будем рассматривать жесткость, которая является

важнейшей характеристикой для различных типов машин и роботов. Однако отсутствие методики оптимизационного синтеза механизмов из условия достижения наилучших жесткостных характеристик при заданных конструктивных и эксплуатационных условиях обуславливает актуальность данной работы. Дополнительно осложняет задачу синтеза отсутствие закономерности изменения жесткости — изоморфности жесткости по рабочей зоне [6].

Рассмотрим некую обобщенную модель МПС, имеющего  $n$  степеней свободы и  $n$  кинематических цепей, каждая из которых состоит из звеньев, соединенных одноподвижными шарнирами. Каждая кинематическая цепь содержит только одну приводную пару. Известно [7], что при исследовании только кинематики механизма можно связать усилия в приводных парах и силу на выходном звене, генерируемую механизмом, через следующее соотношение:

$$\mathbf{J}^{-T}\mathbf{T} = -\mathbf{P}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{J}^{-T}$  — обратная транспонированная матрица Якоби механизма;  $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)^T$  — массив усилий в приводных парах каждой цепи;  $\mathbf{P} = (P_{x1}, \dots, P_{xn})^T$  — компонента внешней нагрузки, соответствующая выходной координате  $x_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ).

Обратная транспонированная матрица Якоби механизма определяется как

$$\mathbf{J}^{-T} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial F_1/\partial x_1}{\partial F_1/\partial q_1} & \dots & -\frac{\partial F_n/\partial x_1}{\partial F_n/\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial F_1/\partial x_n}{\partial F_1/\partial q_1} & \dots & -\frac{\partial F_n/\partial x_n}{\partial F_n/\partial q_n} \end{pmatrix},$$

где  $F_i(x_1, \dots, x_n, q_i) = 0$  — уравнения связи механизма;  $q_i$  — входные координаты.

Максимальный момент в приводе МПС достигается в случае, когда  $i$ -я строка  $\mathbf{j}_i^T$  матрицы  $\mathbf{J}^T$  и вектор внешней силы  $\mathbf{P}$  являются коллинеарными:

$$|T_{i\max}| = \mathbf{j}_i^T \mathbf{P}. \quad (2)$$

Известно, что угловые и линейные перемещения выходного звена связаны с вектором

действующей на выходное звено силой с помощью матрицы жесткости  $\mathbf{K}$ :

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{P}, \tag{3}$$

где  $\mathbf{d} = (d_{x1}, \dots, d_{xm})^T$  — упругая деформация цепи, соответствующая координате  $x_k$ .

Объединяя выражения (1) и (3), получаем

$$-\mathbf{J}^{-T}\mathbf{T} = \mathbf{Kd}. \tag{4}$$

Матрицы  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{K}$  зависят только от кинематической структуры, геометрических параметров и текущего положения выходного звена МПС. Таким образом, из выражений (2) и (4) видно, что направление вектора внешней силы, вызывающее максимальный момент в  $i$ -м приводе, совпадает с направлением внешней силы, обуславливающим максимальную упругую деформацию  $i$ -й цепи:

$$|d_{xk i \max}| = \mathbf{k}_k^{-1} \frac{|j_{i,k}|}{\mathbf{j}_i^T} \mathbf{P}, \tag{5}$$

где  $\mathbf{k}_k$  —  $k$ -я строка матрицы жесткости  $\mathbf{K}$ .

Матрицу жесткости механизма можно составить, зная матрицы жесткостей отдельных звеньев в глобальной системе координат (ГСК) [8]:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11}^1 & \mathbf{K}_{12}^1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{21}^1 & \mathbf{K}_{22}^1 + \mathbf{K}_{11}^2 & \mathbf{K}_{12}^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{21}^2 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{K}_{12}^{j-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{K}_{21}^{j-1} & \mathbf{K}_{22}^{j-1} + \mathbf{K}_{11}^j & \mathbf{K}_{12}^j \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{K}_{21}^j & \mathbf{K}_{22}^j \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Здесь  $\mathbf{K}^j$  — матрица жесткости  $j$ -го звена в ГСК,

$$\mathbf{K}^j = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11}^j & \mathbf{K}_{12}^j \\ \mathbf{K}_{21}^j & \mathbf{K}_{22}^j \end{pmatrix}; \tag{7}$$

$$\mathbf{K}^j = \mathbf{S}^T \mathbf{K}_{local}^j \mathbf{S},$$

где  $\mathbf{S}$  — матрица перехода от локальной системы координат (ЛСК) звена в ГСК;  $\mathbf{K}_{local}^j$  — матрица жесткости  $j$ -го звена в ЛСК.

Матрица перехода от ЛСК звена в ГСК имеет вид

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{R} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{R} \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{R}$  — матрица поворота.

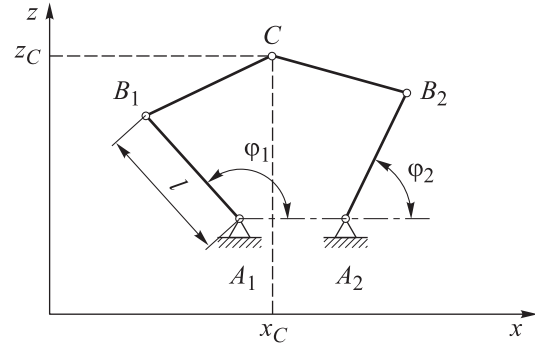


Рис. 1. Кинематическая схема пятизвенного механизма:  $A_i$  — приводные пары ( $i$  — номер цепи);  $B_i$  — пассивные (неприводные) пары;  $C$  — выходное звено;  $\varphi_i$  — углы поворота входных звеньев (входные координаты);  $x_C, z_C$  — координаты точки  $C$

Таким образом, подход позволяет при заданных геометрических параметрах с помощью итерационного метода [5, 9–11] оценить смещение выходного звена (и промежуточных шарниров) под действием внешней нагрузки в наихудшем направлении. Возможно решение обратной задачи: поиск оптимальных геометрических параметров манипулятора из условия непревышения максимально допустимого смещения.

Рассмотрим предложенный подход на примере плоского пятизвенного механизма. Схема механизма показана на рис. 1, а его 3D-визуализация — на рис. 2. Физические и геометрические параметры механизма (см. таблицу) подобраны заведомо неоптимальным образом для наилучшей визуализации описанного подхода. Уравнения связи и анализ рабочей зоны такого механизма приведены в статьях [12, 13]. Для расчета в первом приближении вращательные шарниры примем абсолютно жесткими.

**Геометрические и физические параметры механизма для расчета**

Параметр	Значение
Расстояние между входными парами $l_{A_1A_2}$ , мм	100
Длина звена $l$ , мм	175
Момент инерции сечения относительно оси $y, \text{мм}^4$	$3,41 \cdot 10^3$
Момент инерции сечения относительно оси $z, \text{мм}^4$	$1,33 \cdot 10^3$
Полярный момент инерции сечения $I_p, \text{мм}^4$	$3,26 \cdot 10^3$
Модуль Юнга $E$ , МПа	$68,9 \cdot 10^3$
Модуль сдвига $G$ , МПа	$25,9 \cdot 10^3$
Коэффициент Пуассона $\mu$	0,33

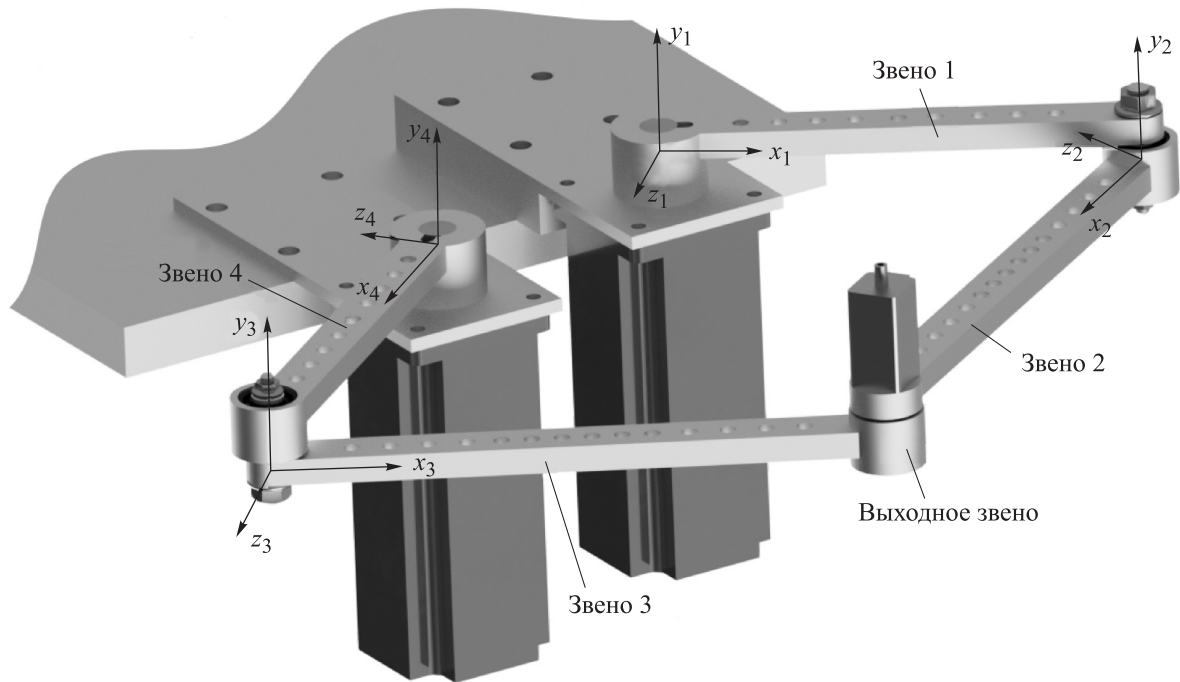


Рис. 2. 3D-визуализация манипулятора на основе пятизвенного механизма:  
 $x_i; y_i; z_i$  — локальные системы координат звеньев

Для описания каждого звена будем использовать пространственный балочный элемент. Матрица жесткости в соответствующей ЛСК имеет вид [8]

$$\mathbf{K}_{local}^0 = \frac{E}{l^3} \mathbf{M},$$

где  $\mathbf{M}$  — матрица размером  $12 \times 12$ ,  $m_{1,1} = m_{7,7} = Al^2$ ,  $m_{1,7} = m_{7,1} = -Al^2$ ,  $m_{2,2} = m_{8,8} = 12I_z$ ,  $m_{2,6} = m_{2,12} = m_{6,2} = m_{12,2} = 6Il_z$ ,  $m_{2,8} = m_{8,2} = -12I_z$ ,  $m_{3,3} = m_{9,9} = 12I_y$ ,  $m_{3,5} = m_{3,11} = m_{5,3} = m_{11,3} = -6Il_y$ ,  $m_{3,9} = m_{9,3} = -12I_y$ ,  $m_{4,4} = m_{10,10} = GI_p l^2 / E$ ,  $m_{4,10} = m_{10,4} = -GI_p l^2 / E$ ,  $m_{5,5} = m_{11,11} = 4l^2 I_y$ ,  $m_{5,9} = m_{8,11} = m_{9,5} = m_{11,8} = 6Il_y$ ,  $m_{5,11} = m_{11,5} = 2l^2 I_y$ ,  $m_{6,6} = m_{12,12} = 4l^2 I_z$ ,  $m_{6,8} = m_{8,6} = m_{8,12} = m_{12,8} = -6Il_z$ ,  $m_{6,12} = m_{12,6} = 2l^2 I_z$ , остальные элементы матрицы  $\mathbf{M}$  — нулевые;  $A$  — площадь сечения балочного элемента.

Эта матрица жесткости записана для балочного элемента с заделкой на обоих концах. В рассматриваемой задаче необходимо составить матрицы жесткости для двух типов балок: заделка — одноподвижный шарнир (первое звено в каждой цепи, привод условно принят абсолютно жестким) и одноподвижный шарнир — одноподвижный шарнир (второе звено в каждой цепи). Формирование новых матриц жесткости проводят следующим образом:

- матричное уравнение (3) записывают в виде системы линейных уравнений;

- силовой фактор  $P_i$ , соответствующий подвижности шарнира, приравнивают к нулю;
- из  $i$ -го уравнения выражают  $i$ -е перемещение, которое подставляют в остальные уравнения системы;
- из новой системы линейных уравнений формируют уравнение в матричной форме и, соответственно, матрицу жесткости.

В соответствии с рис. 1 и 2 матрицы жесткости для первого и второго звена каждой цепи в ЛСК записываются следующим образом:

$$\mathbf{K}_{local}^1 = \frac{E}{l^3} \mathbf{N},$$

где  $\mathbf{N}$  — матрица размером  $12 \times 12$ ,  $n_{1,1} = n_{7,7} = Al^2$ ,  $n_{1,7} = n_{7,1} = -Al^2$ ,  $n_{2,2} = n_{8,8} = 12I_z$ ,  $n_{2,6} = n_{2,12} = n_{6,2} = n_{12,2} = 6Il_z$ ,  $n_{2,8} = n_{8,2} = -12I_z$ ,  $n_{3,3} = n_{9,9} = 3I_y$ ,  $n_{3,5} = n_{5,3} = -3Il_y$ ,  $n_{3,9} = n_{9,3} = -3I_y$ ,  $n_{4,4} = n_{10,10} = GI_p l^2 / E$ ,  $n_{4,10} = n_{10,4} = -GI_p l^2 / E$ ,  $n_{5,5} = 3l^2 I_y$ ,  $n_{5,9} = n_{9,5} = 3Il_y$ ,  $n_{6,6} = 4l^2 I_z$ ,  $n_{6,8} = n_{8,6} = n_{8,12} = n_{12,8} = -6Il_z$ ,  $n_{6,12} = n_{12,6} = 2l^2 I_z$ ,  $n_{12,12} = 4l^2 I_y$ , остальные элементы матрицы  $\mathbf{N}$  — нулевые;

$$\mathbf{K}_{local}^2 = \frac{E}{l^3} \mathbf{H},$$

где  $\mathbf{H}$  — матрица размером  $12 \times 12$ ,  $h_{1,1} = h_{7,7} = Al^2$ ,  $h_{1,7} = h_{7,1} = -Al^2$ ,  $h_{2,2} = h_{8,8} = 12I_z$ ,  $h_{2,6} = h_{2,12} = h_{6,2} = h_{12,2} = 6Il_z$ ,  $h_{2,8} = h_{8,2} = -12I_z$ ,  $h_{4,4} = h_{10,10} = GI_p l^2 / E$ ,  $h_{4,10} = h_{10,4} = -GI_p l^2 / E$ ,

$h_{6,6} = 4l^2I_z$ ,  $h_{6,8} = h_{8,6} = h_{8,12} = h_{12,8} = -6lI_z$ ,  
 $h_{6,12} = h_{12,6} = 2l^2I_z$ ,  $h_{12,12} = 4l^2I_y$ , остальные  
 элементы матрицы  $\mathbf{H}$  — нулевые.

Блок-схема алгоритма расчета жесткости механизма по рабочей зоне приведена на рис. 3. Согласно алгоритму, в каждой точке рабочей зоны матрицы жесткости записываются в ГСК в соответствии с выражениями (7), где матрица поворота имеет вид

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos a & 0 & \sin a \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin a & 0 & \cos a \end{pmatrix}.$$

Здесь для первого и четвертого звеньев  $a = \varphi_i$  (см. рис. 1, 2), для второго и третьего звеньев

$$a = \arctg 2(z_C - z_{B_i}, x_C - x_{B_i}),$$

где  $z_{B_i}$ ,  $x_{B_i}$  — координаты точек  $B_i$ .

После проведения ансамблирования согласно выражению (6) из матрицы жесткости удаляются пустые строки и столбцы, а также первые и последние шесть строк и столбцов, соответствующие заделкам. Таким образом, формируется окончательная матрица жесткости системы размером  $15 \times 15$ .

Внешняя сила прикладывается в плоскости  $xOz$  в наихудшем направлении согласно выражению (5). При этом разработанная трехмерная модель позволит в дальнейшем проводить математическое моделирование, включающее в себя всевозможные силовые факторы.

Для визуализации этого этапа расчета построим в некоторой точке рабочего пространства параллелограмм сил (рис. 4) [14], показывающий, какую максимальную силу может сгенерировать выходное звено манипулятора в каждом из направлений при известном значении максимально допустимого момента в приводе  $T_{\max}$  (в данной задаче  $T_{\max} = 2000 \text{ Н}\cdot\text{мм}$ ).

Наихудшее направление внешней силы определяется меньшей диагональю параллелограмма и соответствует направлению к приближению к особому положению. На рис. 5 показаны наихудшие направления внешней силы для обоих приводов. Синим выделена зона повышенной нагрузки на первый привод, красным — на второй. Синим пунктиром обозначено примерное расположение зоны особых положений типа ПУ [3, 15], в которых выходное звено механизма теряет управляемость.

В каждой точке рабочей зоны вычислено перемещение в направлении действующей внеш-

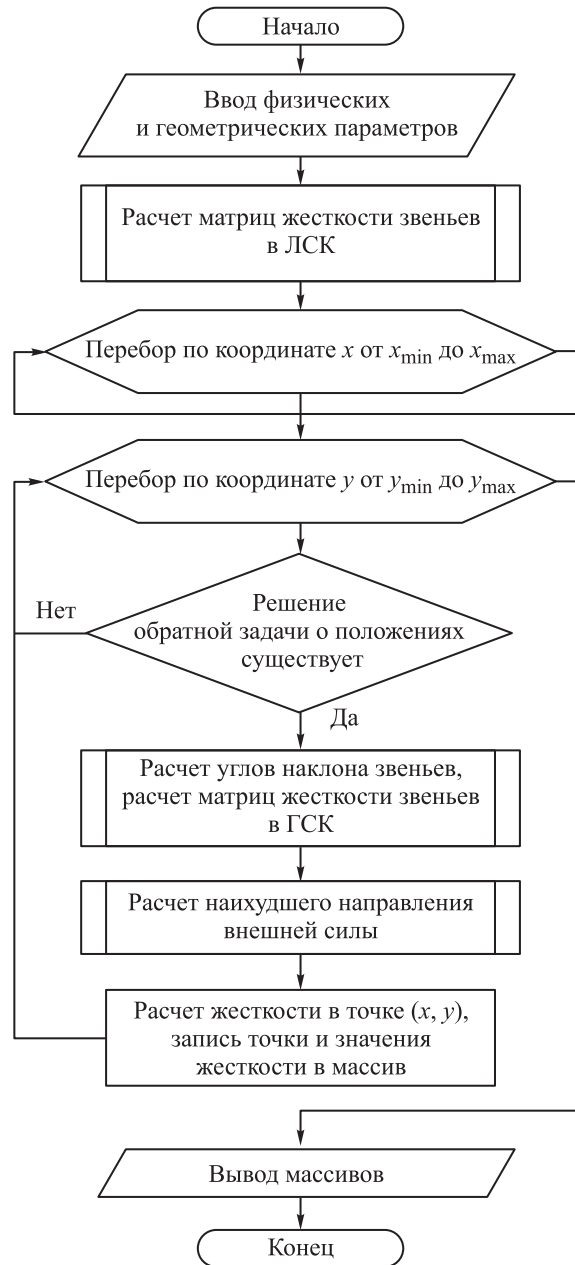


Рис. 3. Блок-схема алгоритма расчета жесткости механизма по рабочей зоне:  $x_{\max}$ ,  $y_{\max}$  и  $x_{\min}$ ,  $y_{\min}$  — максимальные и минимальные значения  $x$  и  $y$

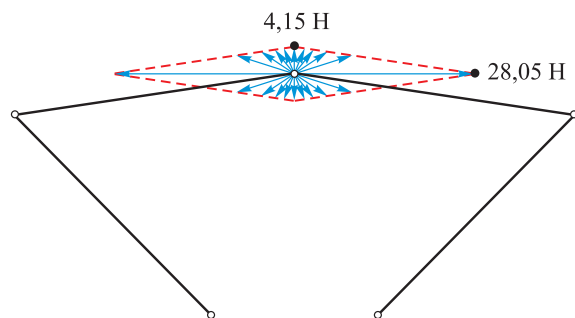


Рис. 4. Параллелограмм сил пятизвенного манипулятора в точке [50, 150]

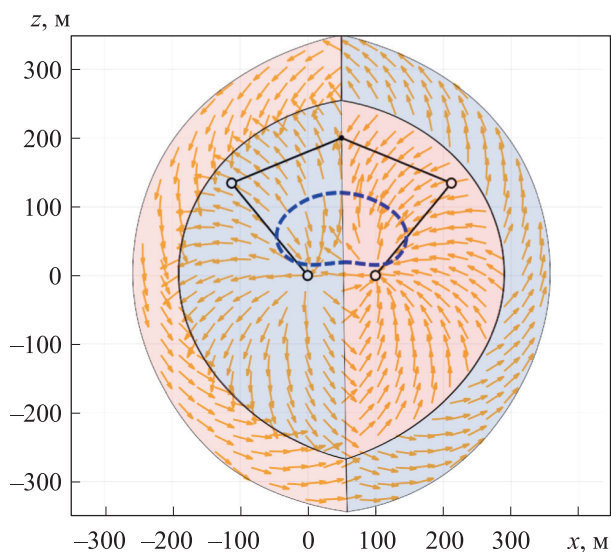


Рис. 5. Наихудшие направления внешней силы, приложенной к выходному звену, для каждой точки рабочей зоны

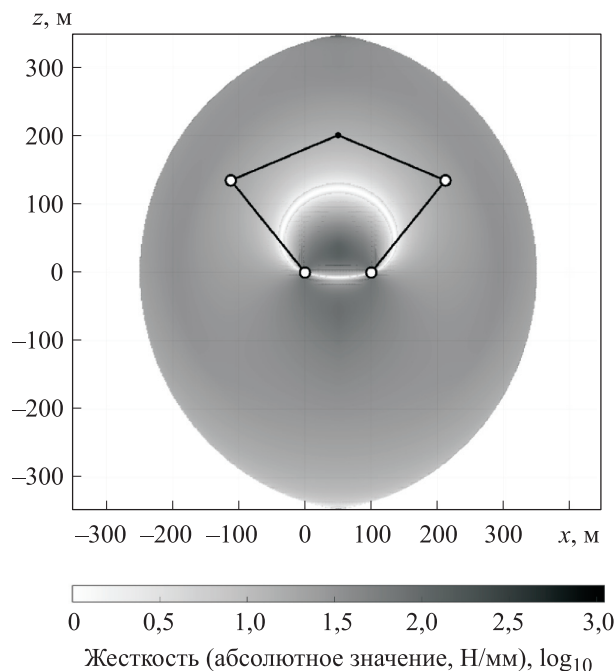


Рис. 6. Распределение жесткости по рабочей зоне в плоскости механизма

ней силы и соответствующая жесткость. Для наглядности результат визуализирован в виде графика, приведенного на рис. 6, демонстрирующего распределение жесткости по рабочей зоне в плоскости механизма.

Как видно из рис. 6, средняя жесткость по рабочей зоне составляет около 100 Н/мм, в то время как при приближении к особым положениям она резко падает до нуля. Таким образом, работа выходного органа вблизи особых положений невозможна, и эти области не могут быть включены в эффективную рабочую зону механизма.

## Выводы

1. Предложен подход, основанный на использовании матрицы Якоби механизма, позволяющий определить наилучшее значение

жесткости механизма в каждой точке рабочего пространства и таким образом определить размер и форму эффективной рабочей зоны манипулятора.

2. Разработанный подход решает актуальную задачу исследования неизоморфных жесткостных характеристик манипуляторов параллельной структуры. Применение подхода подробно продемонстрировано на примере плоского пятизвенного механизма.

3. В дальнейших исследованиях планируется изучение влияния жесткости приводов и шарниров, проведение натурного эксперимента и разработка автоматизированных процессов оптимизации.

## Литература

- [1] Крайнев А.Ф. *Механика машин. Фундаментальный словарь*. Москва, Машиностроение, 2000. 904 с.
- [2] Merlet J.-P. *Parallel Robots*. Springer, 2006. 394 p.
- [3] Ларюшкин П.А. Оценка близости к особым положениям механизмов параллельной структуры путем дифференцирования уравнений связи. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2019, № 1, с. 71–83, doi: 10.18698/0236-3941-2019-1-71-83
- [4] Arakelian V., Briot S., Glazunov V. Increase of singularity-free zones in the workspace of parallel manipulators using mechanisms of variable structure. *Mechanism and Machine Theory*, 2008, vol. 43, no. 9, pp. 1129–1140, doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2007.09.005
- [5] Эрастова К.Г., Ларюшкин П.А. Рабочие зоны механизмов параллельной структуры и способы определения их формы и размеров. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2017, № 8, с. 78–87, doi: 10.18698/0536-1044-2017-8-78-87

- [6] Глазунов В.А., Есина М.Г., Быков Р.Э. Управление механизмами параллельной структуры при переходе через особые положения. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2004, № 2, с. 78–84.
- [7] Ларюшкин П.А., Глазунов В.А., Эрастова К.Г. Определение максимальных усилий в приводах манипуляторов параллельной структуры по заданной величине внешней нагрузки. *Машиностроение и инженерное образование*, 2016, № 2(47), с. 40–46.
- [8] Kassimali A. *Matrix Analysis of Structures*. Cengage Learning, 2012. 657 p.
- [9] Ларюшкин П.А., Палочкин С.В. Рабочая зона манипулятора параллельной структуры с тремя степенями свободы. *Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности*, 2012, № 3(339), с. 92–96.
- [10] Пашенко В.Н. Построение рабочей зоны шестистепенного манипулятора параллельной структуры на базе кривошипно-шатунного механизма. *Интернет-журнал «Наукоеведение»*, 2016, т. 8, № 3, doi: 10.15862/142TVN316. URL: <http://naukovedenie.ru/PDF/142TVN316.pdf> (дата обращения 28 января 2020).
- [11] Merlet J.-P. Workspace-oriented methodology for designing a parallel manipulator. *Proceedings — IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1996, vol. 4, pp. 3726–3731.
- [12] Захаров М.Н., Ларюшкин П.А., Эрастова К.Г. Определение геометрических параметров плоского пятизвенного механизма из условия обеспечения его устойчивой работы в заданной области. *Вестник машиностроения*, 2017, № 11, с. 10–13.
- [13] Эрастова К.Г., Ларюшкин П.А. Оптимизация геометрических параметров механизмов параллельной структуры методом SQP из условия максимизации эффективной рабочей зоны на примере пятизвенного манипулятора. *Машиноведение и инновации. Тр. XXIX междунар. конф.*, Москва, 06–08 декабря 2017, Москва, ИМАШ РАН, 2018, с. 356–359.
- [14] Lynch K.M., Park F.C. *Modern Robotics: Mechanics, Planning, and Control*. Cambridge University Press, 2017. 624 p.
- [15] Глазунов В.А., Нгуен Нгок Хуэ, Нгуен Минь Тхань. К анализу особых положений механизмов параллельной структуры. *Машиностроение и инженерное образование*, 2009, № 4, с. 11–16.

## References

- [1] Kraynev A.F. *Mekhanika mashin. Fundamental'nyy slovar'* [Mechanics of cars. Fundamental Dictionary]. Moscow, Mashinostroyeniye publ., 2000. 904 s.
- [2] Merlet J.-P. *Parallel Robots*. Springer, 2006. 394 p.
- [3] Laryushkin P.A. Estimating How Close Parallel Mechanisms are to their Singularities by Differentiating Constraint Equations. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering*, 2019, no. 1, pp. 71–83 (in Russ.), doi: 10.18698/0236-3941-2019-1-71-83
- [4] Arakelian V., Briot S., Glazunov V. Increase of singularity-free zones in the workspace of parallel manipulators using mechanisms of variable structure. *Mechanism and Machine Theory*, 2008, vol. 43, no. 9, pp. 1129–1140, doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2007.09.005
- [5] Erastova K.G., Laryushkin P.A. Workspaces of Parallel Mechanisms and Methods of Determining Their Shape and Size. *Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2017, no. 8, pp. 78–87 (in Russ.), doi: 10.18698/0536-1044-2017-8-78-87
- [6] Glazunov V.A., Esina M.G., Bykov R.E. Controlling mechanisms of a parallel structure when passing through special positions. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2004, no. 2, pp. 78–84 (in Russ.).
- [7] Laryushkin P.A., Glazunov V.A., Erastova K.G. Computation of the maximal actuation efforts in parallel manipulators at a specified value of external load. *Mashinostroyeniye i inzhenernoye obrazovaniye*, 2016, no. 2(47), pp. 40–46 (in Russ.).
- [8] Kassimali A. *Matrix Analysis of Structures*. Cengage Learning, 2012. 657 p.
- [9] Laryushkin P.A., Palochkin S.V. Workspace of the parallel structure manipulator with three degrees of freedom. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Tekhnologiya tekstil'noy promyshlennosti*, 2012, no. 3(339), pp. 92–96 (in Russ.).

- [10] Pashchenko V.N. The construction working area shestistrunnoi manipulator of the parallel structure on the basis of the crank mechanism. *Internet-zhurnal "Naukovedeniye"*, 2016, vol. 8, no. 3, doi: 10.15862/142TVN316. Available at: <http://naukovedenie.ru/PDF/142TVN316.pdf> (accessed 28 January 2020).
- [11] Merlet J.-P. Workspace-oriented methodology for designing a parallel manipulator. *Proceedings — IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1996, vol. 4, pp. 3726–3731.
- [12] Zakharov M.N., Laryushkin P.A., Erastova K.G. Determination of geometric parameters of plain five-link mechanism from condition of assurance of its operation stability in specified area. *Vestnik mashinostroyeniya*, 2017, no. 11, pp. 10–13 (in Russ.).
- [13] Erastova K.G., Laryushkin P.A. Optimization of the geometric parameters of parallel structure mechanisms using the SQP method from the condition of maximizing the effective working area using the example of a five-link manipulator. *Mashinovedeniye i innovatsii. Tr. XXIX mezhdunar. konf. [Machine science and innovation. Proceedings of the XXIX International Conference]*. Moscow, 2018, pp. 356–359.
- [14] Lynch K.M., Park F.C. *Modern Robotics: Mechanics, Planning, and Control*. Cambridge University Press, 2017. 624 p.
- [15] Glazunov V.A., Nguyen Ngok Khue, Nguyen Min' Tkhan'. Singular configuration analysis of the parallel mechanisms. *Mashinostroyeniye i inzhenernoye obrazovaniye*, 2009, no. 4, pp. 11–16 (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 29.02.2020

## Информация об авторе

**ЭРАСТОВА Ксения Георгиевна** — ассистент кафедры «Основы конструирования машин». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: [erastovakg@gmail.com](mailto:erastovakg@gmail.com)).

## Information about the author

**ERASTOVA Ksenia Georgievna** — Research Assistant, Scientific Research Institute of Automation of Production Processes. Bauman Moscow State Technical University (105005, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: [erastovakg@gmail.com](mailto:erastovakg@gmail.com)).

### Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Эрастова К.Г. Влияние особых положений на жесткость механизмов параллельной структуры. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2020, № 8, с. 21–28, doi: 10.18698/0536-1044-2020-8-21-28

### Please cite this article in English as:

Erastova K.G. The Influence of Special Positions on the Rigidity of Parallel Structure Mechanisms. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2020, no. 8, pp. 21–28, doi: 10.18698/0536-1044-2020-8-21-28