

# Машиностроение и машиноведение

УДК 531.8:519.2

doi: 10.18698/0536-1044-2020-9-3-8

## Численный метод расчета нелинейной упругой характеристики продольно-поперечного преобразователя

П.А. Пья, Ю.В. Григорьев

МГТУ им. Н.Э. Баумана

## A Numerical Method for Calculating the Nonlinear Elastic Characteristic of Longitudinal-Transverse Transducers

Pyae Phyо Aung, Y.V. Grigoriev

Bauman Moscow State Technical University

Рассмотрен численный метод, позволяющий исследовать напряженно-деформированное состояние продольно-поперечного преобразователя и получать его нелинейную упругую характеристику. Предложена математическая модель, в которой использовано численное решение краевой задачи на базе уравнений плоского криволинейного стержня в программном пакете MATLAB. Напряженно-деформированное состояние и нелинейная упругая характеристика системы получены методом последовательных нагружений, основанных на линеаризованных уравнениях криволинейного стержня. Разработанную модель можно рассматривать как начальное приближение к решению пространственной задачи продольно-крутильного преобразователя.

**Ключевые слова:** метод последовательных нагружений, нелинейная задача, линеаризованная система уравнений, продольно-поперечный преобразователь, криволинейный стержень, нелинейная упругая характеристика

This paper presents a numerical method for studying the stress-strain state of longitudinal-transverse transducers and obtaining their nonlinear elastic characteristic. The authors propose a mathematical model that uses a direct numerical solution of the boundary value problem based on the plain curved rod equations in MATLAB. The stress-strain state and the nonlinear elastic characteristic of the system are obtained using a method of successive loading based on linearized equations of the curved rod. The proposed model can be considered as an initial approximation to the solution of the spatial problem of the longitudinal-torsional transducer.

**Keywords:** successive loading method, nonlinear problem, linearized system of equations, longitudinal-transverse transducer, plain curved rod, nonlinear elastic characteristic

Рассмотрим численный метод, позволяющий исследовать напряженно-деформированное состояние продольно-поперечного преобразователя и получать его нелинейную упругую характеристику.

Цель работы — разработка математической модели для расчета напряженно-деформированного состояния плоского криволинейного стержня при больших перемещениях.

Для плоского криволинейного стержня (рис. 1) определим зависимость поперечного перемещения (направленного вдоль оси  $x_1$ )  $u_{x_1}$  верхнего конца 2 стержня от продольного перемещения (сонаправленного с осью  $x_2$ )  $u_{x_2}$  его нижнего конца 1.

Считаем, что нижний конец стержня перемещается строго вертикально вдоль оси  $x_2$ , а его верхний конец смещается в направляющих строго горизонтально параллельно оси  $x_1$  [1–3]. Также принимаем, что концы жестко защемлены, т. е. не поворачиваются относительно точек крепления. Массой стержня пренебрегаем.

Заданы следующие параметры: высота  $H$ , начальный угол  $\beta$  и угол разворота дуги  $\varphi$ .

Углы между локальным единичным вектором  $i_1$ , сонаправленным с глобальной осью  $x_1$ , и естественным единичным вектором  $e_1$ , направленным по касательной к дуге окружности, определяются следующими выражениями:

- в начале стержня

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2} - \beta;$$

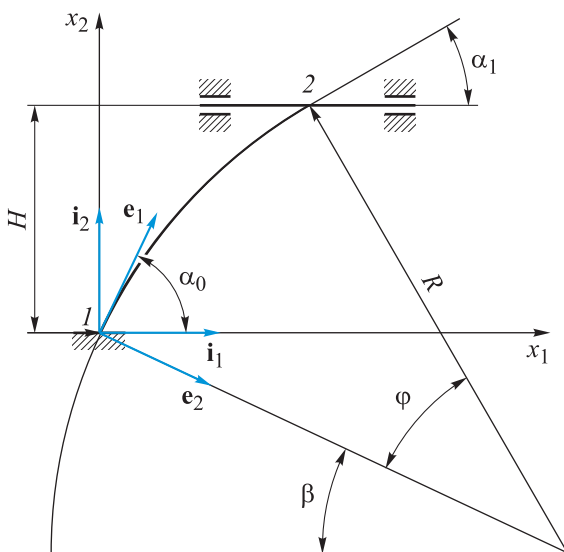


Рис. 1. Схема для определения перемещений плоского криволинейного стержня

- в конце стержня

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - (\beta + \varphi).$$

Высота

$$H = R \sin(\beta + \varphi) - R \sin \beta, \quad (1)$$

где  $R$  — радиус окружности.

Из соотношения (1) выражаем радиус окружности

$$R = \frac{H}{\sin(\beta + \varphi) - \sin \beta}. \quad (2)$$

Запишем систему уравнений для плоского криволинейного стержня [1, 4, 5] как частный случай общих уравнений [6], полагая

$$K_{10} = K_{20} = 0; \quad Q_3 = 0; \quad M_1 = M_2 = 0; \\ \vartheta_1 = \vartheta_2 = 0; \quad u_3 = 0,$$

где  $K_{10}$ ,  $K_{20}$  — начальные кривизны оси стержня относительно главных осей;  $Q_3$  — поперечная сила;  $M_1$  и  $M_2$  — крутящий и изгибающий момент;  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_2$  — углы поворота поперечного сечения относительно главных осей;  $u_3$  — линейное перемещение.

При этом полагаем, что  $P_0 = \Delta P = 0$  и  $T_0 = \Delta T = 0$  [6], где  $P_0$  и  $\Delta P$  — внешняя сосредоточенная сила и ее малое приращение;  $T_0$  и  $\Delta T$  — внешний сосредоточенный момент и его малое приращение.

Окончательно получаем систему из шести уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dQ_1}{d\varepsilon} - K_{30}Q_2 &= 0; \\ \frac{dQ_2}{d\varepsilon} + K_{30}Q_1 &= 0; \\ \frac{dM_3}{d\varepsilon} + Q_2 &= 0; \\ \frac{d\vartheta_3}{d\varepsilon} - \frac{1}{A_{33}}M_3 &= 0; \\ \frac{du_1}{d\varepsilon} - K_{30}u_2 &= 0; \\ \frac{du_2}{d\varepsilon} + K_{30}u_1 - \vartheta_3 &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $Q_1$  и  $Q_2$  — внутренние силы, направленные вдоль осей  $x_1$  и  $x_2$ ;  $\varepsilon$  — безразмерная осевая координата;  $K_{30}$  — начальная кривизна оси стержня;  $M_3$  — изгибающий момент;  $\vartheta_3$  — угол поворота поперечного сечения стержня;  $A_{33}$  — изгибная жесткость стержня;  $u_1$  и  $u_2$  —

продольное и поперечное перемещение поперечного сечения стержня.

Одним из методов решения подобных нелинейных задач является метод последовательных нагружений [3, 5, 7], в котором каждое дискретное увеличение нагрузки описывается линейными (линеаризованными) уравнениями. Для каждого  $m$ -го шага внешняя сила  $F^{(m)} = kF$ , где  $m$  — номер шага нагружения;  $k$  — параметр, определяющий часть общей нагрузки на каждом этапе,  $k = 1/n$  ( $n$  — количество шагов нагружения).

Система уравнений для первого шага нагружения совпадает с системой уравнений (3):

$$\begin{aligned} \frac{dQ_1^{(1)}}{d\varepsilon} - K_{30}Q_2^{(1)} &= 0; \\ \frac{dQ_2^{(1)}}{d\varepsilon} + K_{30}Q_1^{(1)} &= 0; \\ \frac{dM_3^{(1)}}{d\varepsilon} + Q_2^{(1)} &= 0; \\ \frac{d\vartheta_3^{(1)}}{d\varepsilon} - \frac{1}{A_{33}}M_3^{(1)} &= 0; \\ \frac{du_1^{(1)}}{d\varepsilon} - K_{30}u_2^{(1)} &= 0; \\ \frac{du_2^{(1)}}{d\varepsilon} + K_{30}u_1^{(1)} - \vartheta_3^{(1)} &= 0. \end{aligned}$$

Для каждого последующего  $m$ -го шага нагружения система уравнений будет выглядеть следующим образом [6, 8, 9]:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_1^{(m)}}{d\varepsilon} - K_3^{(m-1)}Q_2^{(m)} - Q_2^{(m-1)}\Delta K_3^{(m)} &= 0; \\ \frac{dQ_2^{(m)}}{d\varepsilon} + K_3^{(m-1)}Q_1^{(m)} + Q_1^{(m-1)}\Delta K_3^{(m)} &= 0; \\ \frac{dM_3^{(m)}}{d\varepsilon} + Q_2^{(m)} &= 0; \\ \frac{d\vartheta_3^{(m)}}{d\varepsilon} - \frac{1}{A_{33}}M_3^{(m)} &= 0; \\ \frac{du_1^{(m)}}{d\varepsilon} - K_3^{(m-1)}u_2^{(m)} &= 0; \\ \frac{du_2^{(m)}}{d\varepsilon} + K_3^{(m-1)}u_1^{(m)} - \vartheta_3^{(m)} &= 0, \end{aligned}$$

где

$$K_3^{(m-1)} = K_{30} + \sum_{k=2}^{m-1} \Delta K_3^{(k)} = K_{30} + \sum_{k=2}^{m-1} \frac{M_3^{(k)}}{A_{33}};$$

$$\Delta K_3^{(m)} = \frac{M_3^{(m)}}{A_{33}}; \quad Q_j^{(m-1)} = \sum_{k=2}^{m-1} \Delta Q_j^{(k)}.$$

Рассмотрим граничные условия для очередного шага решаемой задачи.

**При безразмерной осевой координате  $\varepsilon = 0$ .** Так как нижний конец стержня жестко зашпелен, угол поворота  $\vartheta_3$  в начале участка равен нулю.

В начале координат задано перемещение вдоль оси  $x_2$ . Для решения задачи его необходимо спроецировать на естественные оси [10–12].

Матрица поворота для перехода от декартовой системы координат к естественной имеет вид

$$L(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{Bmatrix} = L(\varphi) \begin{Bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \end{Bmatrix}.$$

Тогда граничные условия будут выглядеть следующим образом:

$$\vartheta_3 = 0; \quad u_1 = \Delta u_0 \sin \alpha_0; \quad u_2 = \Delta u_0 \cos \alpha_0,$$

где  $\Delta u_0$  — малое приращение перемещения на конце стержня.

**При безразмерной осевой координате  $\varepsilon = 1$ .** Верхний конец стержня жестко зашпелен, поэтому угол поворота  $\vartheta_3$  в конце участка равен 0.

Верхний конец стержня может перемещаться только горизонтально в направляющих, поэтому можно записать следующее условие:

$$u_{x1} = 0.$$

Сила, направленная вдоль оси  $x_1$ , также должна быть равна нулю, поскольку верхний конец стержня может свободно перемещаться в направлении оси  $x_1$ :

$$Q_{x1} = 0.$$

Эти два граничных условия записаны в декартовой системе координат. Спроецировав их на естественные оси в конце стержня, получаем следующие алгебраические выражения [13–15]:

- для перемещения

$$u_{x1} = u_1 \sin \alpha_1 + u_2 \cos \alpha_1;$$

- для силы

$$Q_{x1} = Q_1 \sin \alpha_1 - Q_2 \cos \alpha_1.$$

Тогда граничные условия будут выглядеть следующим образом:

$$\vartheta_3 = 0; \quad u_1 \sin \alpha_1 + u_2 \cos \alpha_1 = 0;$$

$$Q_1 \sin \alpha_1 - Q_2 \cos \alpha_1 = 0.$$

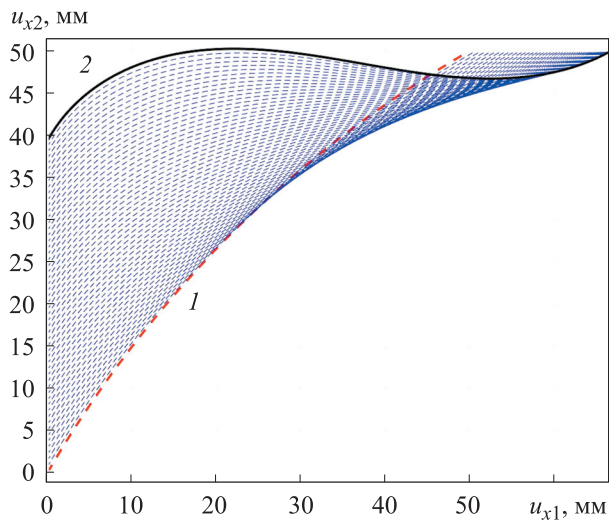


Рис. 2. Графики деформирования оси стержня:  
1 — исходная форма оси стержня;  
2 — форма оси стержня на последнем шаге нагружения

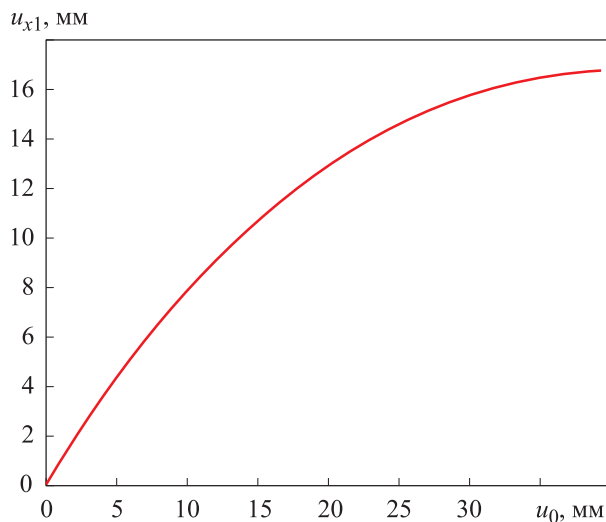


Рис. 3. Нелинейная упругая характеристика продольно-поперечного преобразователя

Полученные граничные условия должны выполняться на каждом шаге решения методом последовательных нагружений в программном комплексе MATLAB, так как углы  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  остаются неизменными на протяжении всего решения задачи [15–17].

В качестве примера приведем результаты расчета плоского криволинейного стержня со следующими входными параметрами:  $H = 50$  мм;  $\beta = \pi/6$ ;  $\varphi = \pi/6$ ; ширина сечения  $b = 5$  мм; высота сечения  $h = 1$  мм; модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

Радиус кривизны рассчитываемого криволинейного стержня, вычисленный по формуле (2),  $R = 0,1366$  м.

В ходе решения задачи в математическом пакете MATLAB получены графики деформирования оси стержня на каждом шаге нагружения (рис. 2).

Также определена зависимость поперечного смещения верхнего конца стержня  $u_{x1}$  от продольного перемещения его нижнего конца  $u_0$  (рис. 3), называемая нелинейной упругой характеристикой продольно-поперечного преобразователя.

## Выводы

1. Методом последовательных нагружений в математическом комплексе MATLAB проведен численный расчет напряженно-деформированного состояния плоского криволинейного стержня при больших перемещениях.

2. На основе полученных результатов построена нелинейная упругая характеристика продольно-поперечного преобразователя.

## Литература

- [1] Жилин П.А. *Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней*. Санкт-Петербург, Изд-во СПбГПУ, 2007. 101 с.
- [2] Кудряшев С.Б. Решение задачи анализа и синтеза продольно-крутильного ультразвукового волновода. *Молодой исследователь Дона*, 2018, № 4(13), с. 74–76. URL: [http://mid-journal.ru/upload/iblock/214/15\\_760\\_Kudryashev\\_74\\_76.pdf](http://mid-journal.ru/upload/iblock/214/15_760_Kudryashev_74_76.pdf)
- [3] Grigoryev Y.V., Pyae Phyong Aung. Waveguide Analysis for Ultrasonic Medical Instruments (Comparison of Different Methods). *MATEC Web of Conferences*, 2018, vol. 226, no. 04007, doi: <https://doi.org/10.1051/mateconf/201822604007>
- [4] Бидерман В.Л. *Механика тонкостенных конструкций. Статика*. Москва, URSS, 2017. 485 с.
- [5] Левин В.Е., Пустовой Н.В. *Механика деформирования криволинейных стержней*. Новосибирск, Изд-во НГТУ, 2008. 208 с.
- [6] Светлицкий В.А., Нарайкин О.С. *Упругие элементы машин*. Москва, Машиностроение, 1989. 380 с.

- [7] Наумов А.М. Применение метода последовательных нагружений при решении задач механики плоских стержней. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2016, № 12, с. 33–42, doi: 10.18698/0536-1044-2016-12-33-42
- [8] Гаврюшин С.С., Барышникова О.О., Борискин О.Ф. *Численный анализ элементов конструкций машин и приборов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 479 с.
- [9] Елисеев В.В. *Механика упругих тел*. Санкт-Петербург, Изд-во СПбГПУ, 2003. 336 с.
- [10] Khaled Alnefaie. Lateral and longitudinal vibration of a rotating flexible beam coupled with torsional vibration of a flexible shaft. *International journal of mechanical and mechatronics engineering*, 2013, vol. 7, no. 5, pp. 884–891.
- [11] Svetlitsky V.A. *Engineering Vibration Analysis: Worked Problems. B. 1*. Berlin, Springer, 2004. 316 p.
- [12] Svetlitsky V.A. *Engineering Vibration Analysis: Worked Problems. B. 2*. Berlin, Springer, 2010. 343 p.
- [13] Феодосьев В.И. *Сопротивление материалов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 590 с.
- [14] Cardoni A., Harkness P., Lucas M. Ultrasonic Rock Sampling Using Longitudinal-Torsional Vibrations. *Physics Procedia*, 2010, no. 3, pp. 125–134, doi: 10.1016/j.phpro.2010.01.018
- [15] Zhou G., Zhang Y., Zhang B. The Complex-mode Vibration of Ultrasonic Vibration Systems. *Ultrasonics*, 2002, vol. 40, pp. 907–911, doi: 10.1016/s0041-624x(02)00224-x
- [16] Svetlitsky V.A. *Statics of Rods*. Berlin, Springer, 2004. 308 p.
- [17] Svetlitsky V.A. *Dynamics of Rods*. Berlin, Springer, 2004. 340 p.

## References

- [1] Zhilin P.A. *Prikladnaya mekhanika. Teoriya tonkikh uprugikh sterzhney* [Applied mechanics. Theory of thin elastic rods]. Sankt-Petersburg, SPBGPU publ., 2007. 101 p.
- [2] Kudryashev S.B. Solution to the problem of analysis and synthesis of longitudinal-torsion ultrasonic waveguide. *Molodoy issledovatel' Dona*, 2018, no. 4(13), pp. 74–76 (in Russ.). Available at: [http://mid-journal.ru/upload/iblock/214/15\\_760\\_Kudryashev\\_74\\_76.pdf](http://mid-journal.ru/upload/iblock/214/15_760_Kudryashev_74_76.pdf)
- [3] Grigoryev Y.V., Pyae Phy Aung. Waveguide Analysis for Ultrasonic Medical Instruments (Comparison of Different Methods). *MATEC Web of Conferences*, 2018, vol. 226, no. 04007, doi: <https://doi.org/10.1051/mateconf/201822604007>
- [4] Biderman V.L. *Mekhanika tonkostennykh konstruktsiy. Statika* [Mechanics of thin-walled structures. Statics]. Moscow, URSS publ., 2017. 485 p.
- [5] Levin V.E., Pustovoy N.V. *Mekhanika deformirovaniya krivolinyenykh sterzhney* [The mechanics of deformation of curved rods]. Novosibirsk, NSTU publ., 2008. 208 p.
- [6] Svetlitskiy V.A., Naraykin O.S. *Uprugiye elementy mashin* [Elastic elements of machines]. Moscow, Mashinostroyeniye publ., 1989. 380 p.
- [7] Naumov A.M. The Application of the Method of Successive Loadings when Solving Problems of Mechanics of Flat Rods. *Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2016, no. 12, pp. 33–42 (in Russ.), doi: 10.18698/0536-1044-2016-12-33-42
- [8] Gavryushin S.S., Baryshnikova O.O., Boriskin O.F. *Chislennyy analiz elementov konstruktsiy mashin i priborov* [Numerical analysis of structural elements of machines and devices]. Moscow, Bauman Press, 2014. 479 p.
- [9] Eliseyev V.V. *Mekhanika uprugikh tel* [The mechanics of elastic bodies]. Sankt-Petersburg, SPBGPU publ., 2003. 336 p.
- [10] Khaled Alnefaie. Lateral and longitudinal vibration of a rotating flexible beam coupled with torsional vibration of a flexible shaft. *International journal of mechanical and mechatronics engineering*, 2013, vol. 7, no. 5, pp. 884–891.
- [11] Svetlitsky V.A. *Engineering Vibration Analysis: Worked Problems. B. 1*. Berlin, Springer, 2004. 316 p.
- [12] Svetlitsky V.A. *Engineering Vibration Analysis: Worked Problems. B. 2*. Berlin, Springer, 2010. 343 p.
- [13] Feodos'yev V.I. *Soprotivleniye materialov* [Strength of materials]. Moscow, Bauman Press, 2010. 590 p.

- [14] Cardoni A., Harkness P., Lucas M. Ultrasonic Rock Sampling Using Longitudinal-Torsional Vibrations. *Physics Procedia*, 2010, no. 3, pp. 125–134, doi: 10.1016/j.phpro.2010.01.018
- [15] Zhou G., Zhang Y., Zhang B. The Complex-mode Vibration of Ultrasonic Vibration Systems. *Ultrasonics*, 2002, vol. 40, pp. 907–911, doi: 10.1016/s0041-624x(02)00224-x
- [16] Svetlitsky V.A. *Statics of Rods*. Berlin, Springer, 2004. 308 p.
- [17] Svetlitsky V.A. *Dynamics of Rods*. Berlin, Springer, 2004. 340 p.

Статья поступила в редакцию 08.04.2020

## Информация об авторах

**ПЬЯ Пьо Аунг** — аспирант кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: pyaephyo88@mail.ru).

**ГРИГОРЬЕВ Юрий Всеволодович** — кандидат технических наук, доцент кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: grigoryev52@mail.ru).

### Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Пья П.А., Григорьев Ю.В. Численный метод расчета нелинейной упругой характеристики продольно-поперечного преобразователя. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2020, № 9, с. 3–8, doi: 10.18698/0536-1044-2020-9-3-8

### Please cite this article in English as:

Pyae Phyoe Aung, Grigoriev Y.V. A Numerical Method for Calculating the Nonlinear Elastic Characteristic of Longitudinal-Transverse Transducers. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2020, no. 9, pp. 3–8, doi: 10.18698/0536-1044-2020-9-3-8

## Information about the authors

**PYAE Phyoe Aung** — Postgraduate, Department of Applied Mechanics. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., Bldg.5, Block 1, e-mail: pyaephyo88@mail.ru).

**GRIGORIEV Yuri Vselovolodovich** — Candidate of Science (Eng.), Department of Applied Mechanics. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., Bldg.5, Block 1, e-mail: grigoryev52@mail.ru).



## В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана вышло в свет учебное пособие К.Ю. Вуколова, А.М. Зимина, В.И. Тройнова «Спектроскопия водородной плазмы»

В учебном пособии приведены теоретические основы атомной и молекулярной спектроскопии водородной плазмы, методики спектроскопических измерений и описание аппаратуры, используемой для диагностики высокотемпературной плазмы.

Предназначено для формирования компетенций, предусмотренных основными профессиональными образовательными программами по направлениям подготовки 16.04.02 «Высокотехнологические плазменные и энергетические установки» (магистратура) и 03.06.01 «Физика и астрономия» (аспирантура, уровень подготовки кадров высшей квалификации). Пособие также может быть использовано при подготовке специалистов, обучающихся по специальности 24.05.02-05 «Проектирование авиационных и ракетных двигателей» (специализация «Проектирование электроракетных двигателей»).

### По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.  
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;  
press@bmstu.ru; www.baumanpress.ru