

# Машиностроение и машиноведение

УДК 539.6.013.42

doi: 10.18698/0536-1044-2022-11-3-11

## Задача Бека с пульсирующей следящей силой

В.П. Радин, В.П. Чирков, А.В. Щугорев, В.Н. Щугорев

НИУ «МЭИ»

## Beck's Task with a Pulsating Tracking Force

V.P. Radin, V.P. Chirkov, A.V. Shchugorev, V.N. Shchugorev

National Research University — Moscow Power Engineering Institute

При исследовании устойчивости механических систем, находящихся в условиях нагружения неконсервативными силами, встречаются нехарактерные для обычных задач механики явления (необычное влияние трения, невыпуклость, неодносвязность области устойчивости в пространстве параметров нагружения и т. д.). Проведено исследование устойчивости консольного стержня при действии сжимающих сил — постоянной потенциальной и следящей (с учетом пульсаций значения последней). Принят гармонический закон изменения значения следящей силы. Методами теории Флоке проанализированы параметрические колебания системы с исследованием положения границ области устойчивости на плоскости параметров нагружения. Определен характер движения системы в окрестности границ области устойчивости.

**Ключевые слова:** неконсервативные нагрузки, устойчивость консольного стержня, параметрические колебания, теория Флоке, границы флаттера и дивергенции, параметрический резонанс

During the research of the stability of mechanical systems under loading conditions by non-conservative forces, the phenomena are encountered that are not typical for ordinary problems of mechanics (an unusual effect of friction, non-convexity, non-simply connectedness of the stability region in the space of loading parameters, etc.). The research was made of the stability of a cantilever rod under the action of compressive forces — constant potential and follower (taking into account the pulsations of the latter). A harmonic law of change in the value of the following force has been adopted. Using the methods of the Floquet theory, the parametric vibrations of the system are analyzed with the study of the position of the boundaries of the stability region on the plane of loading parameters. The nature of the system motion in the vicinity of the boundaries of the stability region is determined.

**Keywords:** non-conservative loads, cantilever rod stability, parametric oscillations, Floquet theory, flutter and divergence boundaries, parametric resonance

Устойчивость консольного стержня при сжатии следящей нагрузкой (задача Бека [1]) — одна из первых неконсервативных задач теории упругой устойчивости. История решения этой задачи и дискуссия в научных кругах вокруг

вопроса о реализуемости следящих нагрузок подробно изложены в работе [2].

Как и некоторые другие неконсервативные задачи (задача Реута [3], задача Николаи [4], устойчивость трубопроводов с протекающей

жидкостью [5] и пр.), задача Бека сыграла существенную роль в разработке динамического метода исследования устойчивости [6].

На этой задаче отработывались и методы решения уравнений возмущенного движения, являющиеся той или иной интерпретацией динамического метода исследования устойчивости, начиная с метода непосредственного решения несамосопряженной краевой задачи, разложения решения уравнения возмущенного движения по некоторым базисным функциям, метода конечных элементов и заканчивая ставшим популярным в последнее время методом дифференциальных квадратур.

Обычная постановка перечисленных задач — это исследование устойчивости положения равновесия механической системы под действием неконсервативных сил, явно не зависящих от времени. В этом случае приходят к однородной несамосопряженной краевой задаче на собственные значения для автономной системы [6, 7].

Менее изученными являются вопросы исследования устойчивости положения равновесия для случаев, когда неконсервативные нагрузки, особенно в сочетании с консервативными силами, изменяются во времени.

Наибольший интерес представляет гармоническое изменение во времени параметров нагружения. В этом случае приходим к классической задаче исследования устойчивости положения равновесия при параметрическом воздействии [8–11]. Для определения границ областей неустойчивости обычно используют методы теории Флоке — Ляпунова [12].

Цель работы — исследование параметрических колебаний консольного стержня, находящегося под действием сжимающих сил: постоянной потенциальной силы  $Q$  и следящей силы  $P(t)$ , значение которой меняется по гармоническому закону. При некоторых малых изменяющихся во времени  $t$  отклонениях следящей силы от среднего значения на плоскости параметров нагружения построены границы области устойчивости. Исследован характер движения в окрестности границ области устойчивости.

**Постановка задачи.** Рассмотрим стержень длиной  $l$ , жестко защемленный на одном конце и нагруженный на свободном конце постоянной по значению потенциальной силой  $Q$  (не меняющей направления при любых отклонениях стержня от положения равновесия) и следя-

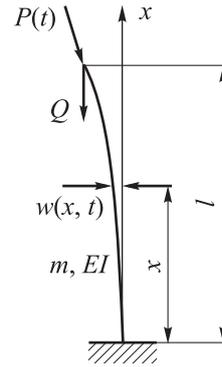


Рис. 1. Схема консольного стержня, находящегося под действием потенциальной  $Q$  и следящей  $P(t)$  сил

щей силой  $P(t)$ , значение которой с некоторой малой амплитудой изменяется во времени  $t$  по гармоническому закону (рис. 1). Направление последней при любых перемещениях совпадает с направлением касательной к изогнутой оси стержня в точке приложения этой силы.

Запишем уравнение возмущенного движения относительно перемещений сечений стержня при отклонении от прямолинейной формы  $w(x, t)$  в следующем виде:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + b_i EI \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + m b_e \frac{\partial w}{\partial t} + [Q + P(t)] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где  $x$  — продольная координата;  $EI$  — жесткость стержня на изгиб;  $b_i$  — коэффициент внутреннего трения, описываемый моделью Фойхта [13];  $m$  — погонная масса стержня;  $b_e$  — коэффициент внешнего трения.

Рассеяние энергии в материале стержня (внутреннее трение) учтено в уравнении (1) из тех соображений, что в неконсервативных системах с распределенными параметрами именно оно отвечает за парадокс Циглера [14]. Как показано в работе [15], известное критическое значение следящей силы в задаче Бека, равное  $20,05EI/l^2$ , при добавлении в систему весьма малого внутреннего трения снижает критическую силу на 45 %.

Уравнение (1) дополним следующими граничными условиями:

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0;$$

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + Q \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = l.$$

Введем безразмерные параметры:

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad \tau = \omega_0 t; \quad \omega_0 = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}};$$

$$\varepsilon_i = b_i \omega_0; \quad \varepsilon_e = \frac{b_e}{\omega_0};$$

$$\beta(t) = \frac{P(t)l^2}{EI}; \quad \alpha = \frac{Ql^2}{EI}.$$

Запишем уравнение (1) и граничные условия в безразмерном виде

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \varepsilon_i \frac{\partial^5 w}{\partial \xi^4 \partial \tau} + \varepsilon_e \frac{\partial w}{\partial \tau} + [\alpha + \beta(t)] \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0; \quad (2)$$

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при } \xi = 0;$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + \alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при } \xi = 1. \quad (3)$$

Для применения метода главных координат (метода разложения по формам собственных колебаний) уберем из граничных условий (3) параметр потенциальной силы  $\alpha$  и с помощью  $\delta$ -функции введем ее проекцию в дифференциальное уравнение (2).

Тогда приходим к уравнению возмущенного движения

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \varepsilon_i \frac{\partial^5 w}{\partial \xi^4 \partial \tau} + \varepsilon_e \frac{\partial w}{\partial \tau} + [\alpha + \beta(t)] \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - \alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} \delta(\xi - 1) = 0 \quad (4)$$

и граничным условиям

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при } \xi = 0;$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} = 0 \quad \text{при } \xi = 1.$$

Представим решение уравнения (4) в виде ряда

$$w(\xi, \tau) = \mathbf{q}^T(\tau) \boldsymbol{\varphi}(\xi); \quad (5)$$

$$\mathbf{q}(\tau) = \begin{bmatrix} q_1(\tau) \\ q_2(\tau) \\ \dots \\ q_n(\tau) \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varphi}(\xi) = \begin{bmatrix} \varphi(\chi_1 \xi) \\ \varphi(\chi_2 \xi) \\ \dots \\ \varphi(\chi_n \xi) \end{bmatrix},$$

где  $\mathbf{q}(\tau)$  — вектор обобщенных координат;  $\boldsymbol{\varphi}(\xi)$  — вектор форм собственных колебаний консольного стержня;  $\chi_j$  — параметры, опре-

деляемые из частотного уравнения для консольного стержня  $1 + \text{ch } \chi \cos \chi = 0$ ;  $n$  — число удерживаемых членов ряда.

Формы собственных колебаний консольного стержня выразим через функции Крылова [12]

$$S_1(\chi \xi) = \frac{1}{2} [\text{ch}(\chi \xi) + \cos(\chi \xi)];$$

$$S_2(\chi \xi) = \frac{1}{2} [\text{sh}(\chi \xi) + \sin(\chi \xi)];$$

$$S_3(\chi \xi) = \frac{1}{2} [\text{ch}(\chi \xi) - \cos(\chi \xi)];$$

$$S_4(\beta \xi) = \frac{1}{2} [\text{sh}(\chi \xi) - \sin(\chi \xi)].$$

Для защемленного на одном конце стержня собственные формы имеют вид

$$\varphi_k(\chi_k \xi) = S_4(\chi_k \xi) - \frac{S_2(\chi_k)}{S_1(\chi_k)} S_3(\chi_k \xi),$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Применим к уравнению возмущенного движения (4) процедуру метода Бубнова — Галеркина, для чего подставим в него ряд (5). Затем поочередно умножим полученное уравнение на каждую собственную форму  $\varphi_k(\chi_k \xi)$  и проинтегрируем полученные выражения по  $\xi$  от 0 до 1.

В результате приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат  $q_k(\tau)$ . Запишем эту систему в матричной форме

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} + (\varepsilon_e \mathbf{A} + \varepsilon_i \mathbf{C}) \dot{\mathbf{q}} + \{\mathbf{C} + [\alpha + \beta(t)] \mathbf{D} - \alpha \mathbf{B}\} \mathbf{q} = 0, \quad (6)$$

где  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  — матрицы размера  $n \times n$ ,

$$\mathbf{A} = \int_0^1 \boldsymbol{\varphi}(\xi) \boldsymbol{\varphi}^T(\xi) d\xi;$$

$$\mathbf{B} = \int_0^1 \frac{d\boldsymbol{\varphi}(\xi)}{d\xi} \boldsymbol{\varphi}^T(\xi) \delta(\xi - 1) d\xi;$$

$$\mathbf{C} = \int_0^1 \frac{d^4 \boldsymbol{\varphi}(\xi)}{d\xi^4} (\xi) \boldsymbol{\varphi}^T(\xi) d\xi;$$

$$\mathbf{D} = \int_0^1 \frac{d^2 \boldsymbol{\varphi}(\xi)}{d\xi^2} \boldsymbol{\varphi}^T(\xi) d\xi.$$

Таким образом, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от времени. Для применения стандартных процедур вычисли-

тельного пакета MATLAB приведем уравнение (6) к нормальной форме Коши

$$\frac{dx}{d\tau} = G(\tau)x. \quad (7)$$

Здесь  $x = [q \ \dot{q}]^T$ ;  $G(\tau)$  — матрица размера  $2n \times 2n$ ,

$$G(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{A}^{-1}\{\mathbf{C} + [\alpha + \beta(\tau)]\mathbf{D} - \alpha\mathbf{B}\} & -\mathbf{A}^{-1}(\varepsilon_e \mathbf{A} + \varepsilon_i \mathbf{C}) \end{bmatrix},$$

где  $\mathbf{0}$  и  $\mathbf{E}$  — нулевая и единичная матрицы размера  $n \times n$ .

При периодическом параметрическом воздействии выполняется условие

$$G(\tau + T) = G(\tau).$$

**Граница области устойчивости при постоянных параметрах нагрузки.** Пусть потенциальная и следящая силы постоянны по значению. В этом случае уравнение (6) будет уравнением с постоянными коэффициентами. Представляя вектор обобщенных координат в виде  $q(\tau) = q_0 \exp(\lambda\tau)$  и подставляя это выражение в уравнение (6), относительно характеристических показателей  $\lambda$  получаем алгебраическую проблему собственных значений в виде матричного полинома

$$P_2 \lambda^2 + P_1 \lambda + P_0 = 0, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} P_2 &= \mathbf{A}; \\ P_1 &= 2\varepsilon_e \mathbf{A} + \varepsilon_i \mathbf{C}; \\ P_0 &= \mathbf{C} + (\alpha + \beta)\mathbf{D} - \alpha\mathbf{B}. \end{aligned}$$

Для построения границы области устойчивости на плоскости параметров нагружения  $\alpha - \beta$  применим критерий Рауса — Гурвица [12]. На основании полинома (8) сформируем матрицу Гурвица  $\mathbf{H}(\alpha, \beta)$ . Как указано в работе [15], равенство нулю главного минора матрицы Гурвица порядка  $2n - 1$ , т. е.  $\Delta_{2n-1}(\alpha, \beta) = 0$ , определяет границу области флаттера (потерю устойчивости колебательным образом) на плоскости параметров нагружения  $\alpha - \beta$ .

Квазистатический тип потери устойчивости (дивергенция) имеет место при условии равенства нулю определителя матрицы Гурвица или (что то же самое) равенства нулю свободного члена характеристического полинома. На рис. 2 (сплошная линия) для коэффициентов демп-

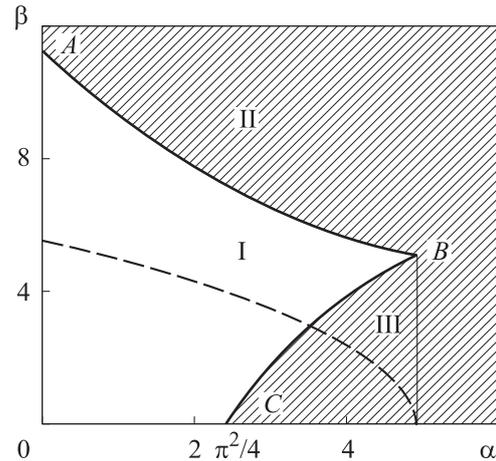


Рис. 2. Граница области устойчивости на плоскости параметров  $\alpha - \beta$  и зависимость частоты флаттера  $\omega_f$  от параметра  $\alpha$ : I — устойчивость; II — флаттер; III — дивергенция

фирования  $\varepsilon_i = 0,001$  и  $\varepsilon_e = 0,010$  построена граница области устойчивости ABC прямолинейной формы консольного стержня на плоскости параметров нагружения  $\alpha - \beta$  при удержании восьми членов ряда в разложении решения возмущенного движения в ряд по формам собственных колебаний.

Пересечение границы AB соответствует динамической потере устойчивости тривиального положения равновесия по типу флаттера. При  $\alpha = 0$  критическое значение параметра следящей нагрузки  $\beta_* = 11,2$ . Как уже указывалось, здесь в полной мере реализован парадокс Циглера [14] вследствие наличия внутреннего трения в системе.

Пересечение границы BC соответствует квазистатической потере устойчивости тривиального положения равновесия по типу дивергенции. При  $\beta = 0$  критическое значение параметра мертвой силы равно  $\pi^2/4$ , которое вытекает и из формулы Эйлера.

Штриховой линией на рис. 2 показана зависимость частоты флаттера  $\omega_f$  от параметра  $\alpha$  как мнимая часть характеристического показателя, который первым переходит в правую полуплоскость комплексной плоскости  $\lambda$ .

**Параметрические колебания системы.** Рассмотрим случай непостоянного значения следящей силы. Пусть  $\beta(t) = \beta(1 + \mu \cos \theta t)$ , где  $\mu$  и  $\theta$  — амплитуда и частота отклонений следящей силы от среднего значения  $\beta$  соответственно. При некоторых фиксированных значениях  $\mu$  и  $\theta$  построим границы области устойчивости на

плоскости параметров нагружения  $\alpha-\beta$  методами теории Флоке.

Известно [12], что система линейных дифференциальных уравнений (7) с периодическими коэффициентами  $\mathbf{G}(\tau)$  имеет  $N = 2n$  линейно независимых решений, образующих фундаментальную матрицу  $\mathbf{X}(\tau)$  размера  $N \times N$ . Если она удовлетворяет условию  $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}$ , то  $\mathbf{X}(\tau)$  называют фундаментальной матрицей Коши или матрицантом.

Значение матрицанта в конце первого периода  $\mathbf{X}(T) = \mathbf{R}$  есть матрица перехода или матрица монодромии. Корни уравнения  $\det(\mathbf{R} - \rho\mathbf{E}) = 0$  называют мультипликаторами. Свойства решений уравнения (7) полностью определяются свойствами мультипликаторов [12]. Для каждого мультипликатора  $\rho$  найдется хотя бы одно решение  $x_{jk}(\tau)$ , удовлетворяющее условию  $x_{jk}(\tau + T) = \rho x_{jk}(\tau)$ , где  $x_{jk}(\tau)$  — элемент матрицы  $\mathbf{X}(\tau)$ .

Решение уравнения (7)  $\mathbf{q} \equiv 0$  будет устойчивым по Ляпунову, если все мультипликаторы  $\rho_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 2n$ ) лежат внутри или на границе единичного круга:  $|\rho| \leq 1$ . Если все мультипликаторы находятся внутри единичного круга ( $|\rho| < 1$ ), то имеет место асимптотическая устойчивость.

Решение будет неустойчивым, если среди мультипликаторов найдется хотя бы один по модулю больший единицы:  $|\rho| > 1$ . Таким образом, граница области устойчивости тривиального решения уравнения (7) на плоскости параметров нагружения определяется выходом хотя бы одного мультипликатора за единичную окружность.

Существуют методы, позволяющие определять границы областей параметрического резонанса. Среди них весьма эффективным является метод матриц монодромии (метод матриц перехода), в основу которого положена теория устойчивости Флоке — Ляпунова.

Применение этого метода заключается в вычислении матрицы монодромии  $\mathbf{R}$  и ее собственных значений, являющихся мультипликаторами данной задачи [12]. Чтобы построить матрицу  $\mathbf{R}$ , необходимо  $N$  раз решить задачу Коши с начальными условиями, совпадающими со столбцами единичной матрицы размера  $N \times N$ . После определения мультипликаторов как собственных значений матрицы  $\mathbf{R}$  проверяют условие  $|\rho| \leq 1$ .

По изложенному алгоритму построены границы области устойчивости на плоскости нагружения  $\alpha-\beta$  при амплитуде  $\mu = 0,1$  и частоте отклонений следящей силы  $\theta = 5$  (рис. 3, а) и  $\theta = 10$  (рис. 3, б). Значения коэффициентов внутреннего  $\varepsilon_i$  и внешнего  $\varepsilon_e$  демпфирования были те же, что и при построении границы области устойчивости (см. рис. 2).

Пунктирными линиями на рис. 3, а и б для сравнения показаны границы флаттера и дивергенции при постоянных по значению потенциальной и следящей силах. Видно, что параметрическое воздействие, не меняя положение границ дивергенции  $EF$  (см. рис. 3, а) и  $FG$  (см. рис. 3, б), отодвигает основную часть границы динамической неустойчивости в область больших значений  $\beta$ .

Аналогичное явление встречается в панельном флаттере, когда параметрическая продоль-

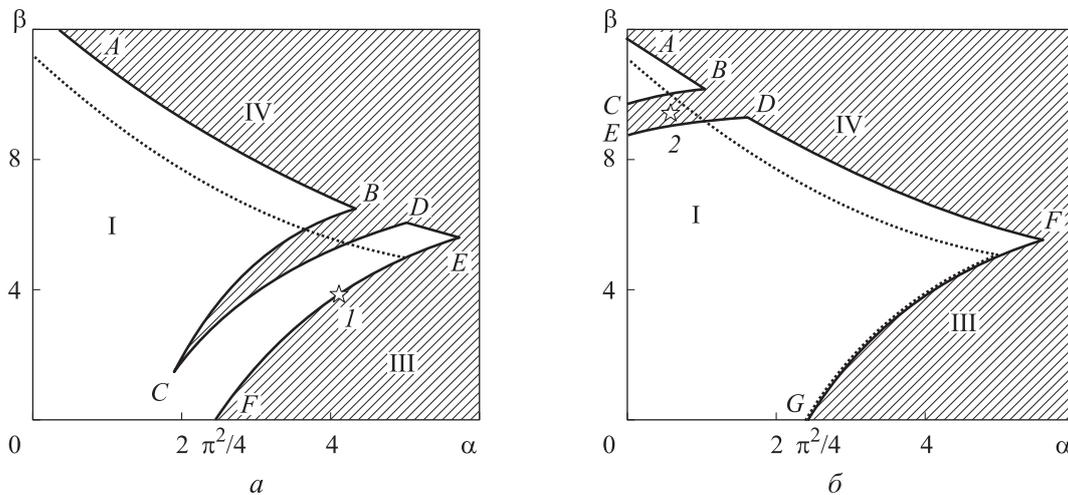


Рис. 3. Границы области устойчивости при амплитуде  $\mu = 0,1$  и частоте отклонений следящей силы  $\theta = 5$  (а) и  $10$  (б)  
 I — устойчивость; III — дивергенция; IV — параметрический резонанс

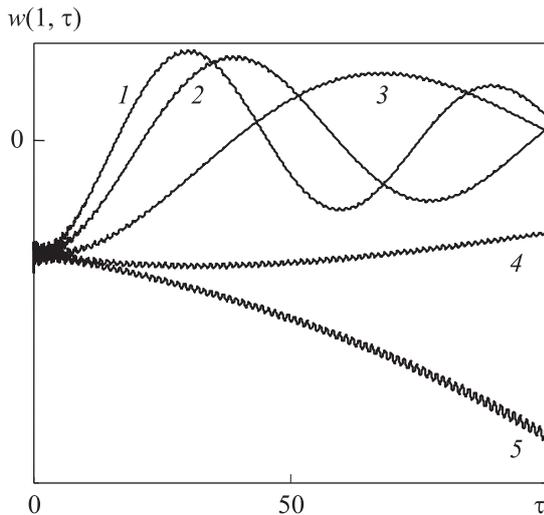


Рис. 4. Законы движения концевое сечения в окрестности точки 1 на границе дивергенции (см. рис. 3, а) при параметре  $\alpha = 4,147$  (1), 4,148 (2), 4,149 (3), 4,150 (4) и 4,151 (5)

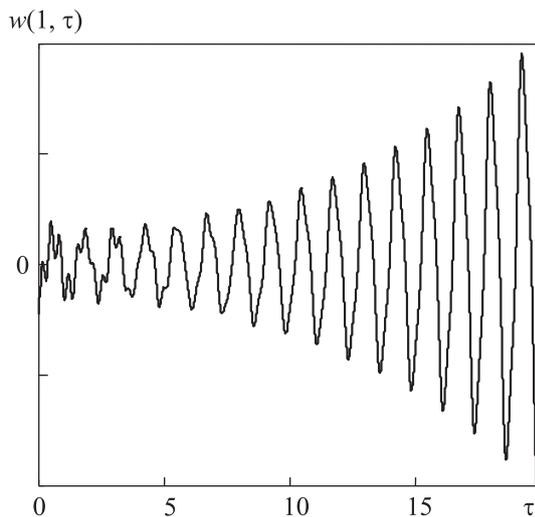


Рис. 5. Закон движения концевое сечения при параметрах нагружения  $\alpha = 0,5$ ,  $\beta = 9,5$  и частоте отклонений следящей силы  $\theta = 10$

ная сила стабилизирует систему при аэродинамическом воздействии сверхзвукового потока газа [16, 17].

Как показали многочисленные вычисления характера движения системы при пересечении участков границы  $AB$  и  $DE$  (см. рис. 3, а), а также  $AB$  и  $DF$  (см. рис. 3, б) в системе реализован параметрический резонанс. Таким образом, названные участки служат границами не флаттера, а параметрического резонанса.

Проведем исследование законов движения системы в окрестности точек границы дивергенции. Некоторые результаты проиллюстрированы на рис. 4 для точки 1, отмеченной на рис. 3, а. Здесь для  $\beta(\tau) = \beta(1 + 0,1 \cos \theta \tau)$  построены законы движения при параметре нагружения  $\alpha = 4,147$  (кривая 1) с добавлением к этому значению по 0,001.

С переходом через границу, за исключением высокочастотных шумов с весьма малой амплитудой, поведение системы аналогично случаю постоянных по значению  $\alpha$  и  $\beta$ . С ростом параметра нагружения  $\alpha$  частота затухающих движений (кривые 1–4) убывает, и при пересечении границы устойчивость теряется квазистатическим образом (кривая 5). Следовательно, за границами  $EF$  (см. рис. 3, а) и  $FG$  (см. рис. 3, б) можно оставить название «границы дивергенции».

Параметрическая нагрузка принятого типа способствует появлению дополнительных областей неустойчивости, существенно снижая критические значения параметров нагружения. Это касается сопряженных с зоной параметрических резонансов областей  $BCD$  (см. рис. 3, а) и  $BCED$  (см. рис. 3, б).

Границы этих областей по характеру потери устойчивости внутри них можно назвать границами флаттера, что подтверждает характер закона движения. Для точки 2 внутри области  $BCED$  закон движения, характерный для флаттера, показан на рис. 5.

## Выводы

1. Одной из основных задач теории упругой устойчивости является определение границ области устойчивости в пространстве параметров внешних нагрузок. Выбор метода расчета определяется характером нагрузок и в первую очередь ее изменением во времени.

2. Преобразование неконсервативной механической системы в параметрически возбуждаемую даже при малом изменении значений нагрузок может существенно изменить границы области устойчивости как в сторону стабилизации системы, так и в сторону значительного снижения критических значений параметров нагружения.

## Литература

- [1] Beck M., Angew. Z. Die knicklast des einseitig eingespannten tangential gedruckten stabes. *Z. Angew. Math. Phys.*, 1952, vol. 3, no. 3, pp. 225–228, doi: <https://doi.org/10.1007/BF02008828>
- [2] Elishakoff I. Controversy associated with the so-called “follower forces”: critical overview. *Appl. Mech. Rev.*, 2005, vol. 58, no. 2, pp. 117–142, doi: <https://doi.org/10.1115/1.1849170>
- [3] Реут В.И. О теории упругой устойчивости. *Тр. Одесского ин-та инж. гражд. и комм. стр-ва*, 1939, № 1, с. 115–190.
- [4] Николаи Е.Л. Об устойчивости прямолинейной формы равновесия сжатого и скрученного стержня. *Изв. Ленингр. политехн. ин-та*, 1928, № 31, с. 1–26.
- [5] Paidoussis M.P. Dynamics of tubular cantilevers conveying fluid. *J. Mech. Eng. Sci.*, 1970, vol. 12, no. 2, pp. 85–103, doi: [https://doi.org/10.1243%2FJMES\\_JOUR\\_1970\\_012\\_017\\_02](https://doi.org/10.1243%2FJMES_JOUR_1970_012_017_02)
- [6] Болотин В.В. *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*. Москва, Физматгиз, 1961. 340 с.
- [7] Лагозинский С.А., Соколов А.И. Устойчивость прямолинейных стержней, нагруженных следящими силами. В: *Проблемы прикладной механики, динамики и прочности машин*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005, с. 244–259.
- [8] Болотин В.В., Чирков В.П., Радин В.П. и др. Параметрические колебания в неконсервативных системах. В: *Проблемы прикладной механики, динамики и прочности машин*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005, с. 22–31.
- [9] Окопный Ю.А., Радин В.П., Чирков В.П. и др. Исследование устойчивости консольного стержня при параметрическом воздействии потенциальной и следящих сил. *Справочник. Инженерный журнал*, 2008, № 9, с. 28–32.
- [10] Радин В.П., Чирков В.П., Щугорев А.В. и др. Устойчивость и параметрические резонансы в системе Реута. *Справочник. Инженерный журнал*, 2018, № 11, с. 20–27, doi: [https://doi.org/10.14489/hb.2018.11\\_pp.020-027](https://doi.org/10.14489/hb.2018.11_pp.020-027)
- [11] Радин В.П., Чирков В.П., Щугорев А.В. и др. Влияние непостоянства скорости потока на границы устойчивости трубопровода. *Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика*, 2022, № 1, с. 48–54.
- [12] Болотин В.В., ред. *Вибрации в технике*. Т. 1. Колебания линейных систем. Москва, Машиностроение, 1978. 352 с.
- [13] Пановко Я.Г. *Внутреннее трение при колебаниях упругих систем*. Москва, Физматгиз, 1960. 193 с.
- [14] Ziegler H. Die Stabilitats kriterien der elastomechanik. *Ing. Arch.*, 1952, vol. 20, no. 1, pp. 49–56, doi: <https://doi.org/10.1007/BF00536796>
- [15] Радин В.П., Самогин Ю.Н., Чирков В.П. и др. *Решение неконсервативных задач теории устойчивости*. Москва, Физматлит, 2017. 236 с.
- [16] Болотин В.В., Воробьев В.И., Семенов В.А. и др. О параметрической стабилизации неустойчивых форм равновесия механических систем. *Известия АН СССР. Механика твердого тела*, 1979, № 1, с. 36–44.
- [17] Петровский А.В. *Нелинейная динамика и устойчивость неконсервативных систем*. Москва, Изд-во МЭИ, 2003. 112 с.

## References

- [1] Beck M., Angew. Z. Die knicklast des einseitig eingespannten tangential gedruckten stabes. *Z. Angew. Math. Phys.*, 1952, vol. 3, no. 3, pp. 225–228, doi: <https://doi.org/10.1007/BF02008828>
- [2] Elishakoff I. Controversy associated with the so-called “follower forces”: critical overview. *Appl. Mech. Rev.*, 2005, vol. 58, no. 2, pp. 117–142, doi: <https://doi.org/10.1115/1.1849170>
- [3] Reut V.I. On theory of elastic stability. *Tr. Odesskogo in-ta inzh. grazhd. i komm. str-va*, 1939, no. 1, pp. 115–190. (In Russ.).
- [4] Nikolai E.L. On stability of straight equilibrium position of a compressed and twisted bar. *Izv. Leningr. politekhn. in-ta*, 1928, no. 31, pp. 1–26. (In Russ.).

- [5] Paidoussis M.P. Dynamics of tubular cantilevers conveying fluid. *J. Mech. Eng. Sci.*, 1970, vol. 12, no. 2, pp. 85–103, doi: [https://doi.org/10.1243%2FJMES\\_JOUR\\_1970\\_012\\_017\\_02](https://doi.org/10.1243%2FJMES_JOUR_1970_012_017_02)
- [6] Bolotin V.V. *Nekonservativnye zadachi teorii uprugoy ustoychivosti* [Unconservative problems of elastic stability theory]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961. 340 p. (In Russ.).
- [7] Lagozinskiy S.A., Sokolov A.I. Ustoychivost' pryamolineynykh sterzhney, nagruzhennykh sledyashchimi silami [Stability of a straight rod loaded by following forces]. V: *Problemy prikladnoy mekhaniki, dinamiki i prochnosti mashin* [In: Problems of applied mechanics dynamics and strength of machines]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2005, pp. 244–259. (In Russ.).
- [8] Bolotin V.V., Chirkov V.P., Radin V.P. et al. Parametricheskie kolebaniya v nekonservativnykh sistemakh [Parametric oscillations in nonconservative systems]. V: *Problemy prikladnoy mekhaniki, dinamiki i prochnosti mashin* [In: Problems of applied mechanics dynamics and strength of machines]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2005, pp. 22–31. (In Russ.).
- [9] Okopnyy Yu.A., Radin V.P., Chirkov V.P. et al. Analysis of stability of cantilever beam subjected to parametric excitation by conservative and nonconservative forces. *Spravochnik. Inzhenernyy zhurnal* [Handbook. An Engineering Journal], 2008, no. 9, pp. 28–32. (In Russ.).
- [10] Radin V.P., Chirkov V.P., Shchugorev A.V. et al. The stability and parametric resonances in the system of Reut. *Spravochnik. Inzhenernyy zhurnal* [Handbook. An Engineering Journal], 2018, no. 11, pp. 20–27, doi: <https://doi.org/10.14489/hb.2018.11.pp.020-027> (in Russ.).
- [11] Radin V.P., Chirkov V.P., Shugorev A.V. et al. Influence of flow velocity impermanence on limits of pipeline stability. *Vestnik MGU. Seriya 1. Matematika. Mekhanika*, 2022, no. 1, pp. 48–54. (In Russ.).
- [12] Bolotin V.V., ed. *Vibratsii v tekhnike*. T. 1. Kolebaniya lineynykh sistem [Vibrations in technics. Vol. 1. Oscillations in linear systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1978. 352 p. (In Russ.).
- [13] Panovko Ya.G. *Vnutrennee trenie pri kolebaniyakh uprugikh sistem* [Internal friction at elastic system oscillations]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1960. 193 p. (In Russ.).
- [14] Ziegler H. Die Stabilitats kriterien der elastomechanik. *Ing. Arch.*, 1952, vol. 20, no. 1, pp. 49–56, doi: <https://doi.org/10.1007/BF00536796>
- [15] Radin V.P., Samogin Yu.N., Chirkov V.P. et al. *Reshenie nekonservativnykh zadach teorii ustoychivosti* [Solving nonconservative problems of elasticity theory]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2017. 236 p. (In Russ.).
- [16] Bolotin V.V., Vorob'yev V.I., Semenov V.A. et al. On parametric stabilization of instable equilibrium in mechanical systems. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1979, no. 1, pp. 36–44. (In Russ.).
- [17] Petrovskiy A.V. *Nelineynaya dinamika i ustoychivost' nekonservativnykh sistem* [Nonlinear dynamics and stability of nonconservative systems]. Moscow, Izd-vo MEI Publ., 2003. 112 p. (In Russ.).

Статья поступила в редакцию 01.04.2022

## Информация об авторах

**РАДИН Владимир Павлович** — кандидат технических наук, профессор кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». НИУ «МЭИ» (111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14, e-mail: [radinvp@gmail.com](mailto:radinvp@gmail.com)).

## Information about the authors

**RADIN Vladimir Pavlovich** — Candidate of Science (Eng.), Professor, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines. National Research University — Moscow Power Engineering Institute (111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14, e-mail: [radinvp@gmail.com](mailto:radinvp@gmail.com)).

**ЧИРКОВ Виктор Петрович** — доктор технических наук, профессор кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». НИУ «МЭИ» (111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14, e-mail: victor.p.chirkov@gmail.com).

**CHIRKOV Victor Petrovich** — Doctor of Science (Eng.), Professor, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines. National Research University — Moscow Power Engineering Institute (111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14, e-mail: victor.p.chirkov@gmail.com).

**ЩУГОРЕВ Алексей Владимирович** — кандидат технических наук, доцент кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». НИУ «МЭИ» (111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14, e-mail: alexey.salut@gmail.com).

**SHCHUGOREV Alexey Vladimirovich** — Candidate of Science (Eng.), Associate Professor, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines. National Research University — Moscow Power Engineering Institute (111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14, e-mail: alexey.salut@gmail.com).

**ЩУГОРЕВ Владимир Николаевич** — кандидат технических наук, доцент кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». НИУ «МЭИ» (111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14, e-mail: shchugorev.vn@gmail.com).

**SHCHUGOREV Vladimir Nikolaevich** — Candidate of Science (Eng.), Associate Professor, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines. National Research University — Moscow Power Engineering Institute (111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14, e-mail: shchugorev.vn@gmail.com).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Радин В.П., Чирков В.П., Щугорев А.В., Щугорев В.Н. Задача Бека с пульсирующей следящей силой. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2022, № 11, с. 3–11, doi: 10.18698/0536-1044-2022-11-3-11

**Please cite this article in English as:**

Radin V.P., Chirkov V.P., Shchugorev A.V., Shchugorev V.N. Beck's Task with a Pulsating Tracking Force. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2022, no. 11, pp. 3–11, doi: 10.18698/0536-1044-2022-11-3-11



**Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана  
предлагает читателям учебное пособие  
под редакцией И.В. Балабина  
«Механика колеса мобильной машины»**

**Авторы: И.В. Балабин, И.С. Чабунин**

Представлены основные этапы развития колес мобильных машин. Рассмотрены устройство колеса и пневматической шины, вопросы кинематики и динамики колеса в сборе с шиной, даны основные расчетные зависимости для определения напряженного состояния их элементов. Приведены варианты конструкций вентиля и удлинителей для шин. Описаны методы испытаний колес и шин.

Для студентов, обучающихся по направлению подготовки 23.04.02 «Наземные транспортно-технологические комплексы», магистерская программа «Колесные машины», дисциплина «Механика колеса мобильной машины».

**По вопросам приобретения обращайтесь:**

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, к. 1.  
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;  
press@bmstu.ru; <https://bmstu.press>