

# Машиностроение и машиноведение

УДК 539.6.013.42

doi: 10.18698/0536-1044-2023-5-3-13

## Устойчивость стержня с упругим шарниром при нагружении распределенной неконсервативной нагрузкой

В.П. Радин, В.П. Чирков, Е.В. Позняк, О.В. Новикова

НИУ «МЭИ»

## Stability of a rod with the elastic joint exposed to distributed non-conservative load

V.P. Radin, V.P. Chirkov, E.V. Poznyak, O.V. Novikova

National Research University — Moscow Power Engineering Institute

Многочисленные особенности неконсервативных механических систем, обнаруженные при исследовании их устойчивости, определяют большой теоретический и практический интерес к рассмотрению различных вариантов расчетных схем. Исследована устойчивость прямолинейного стержня, связанного на одном конце с шарниром и нагруженного равномерно распределенными по длине стержня следящей и потенциальной нагрузками. Шарнир обладал жесткостью по отношению к повороту торца стержня. В целях применения метода разложения решения уравнения возмущенного движения в ряд по собственным формам колебаний решена задача об определении собственных частот и форм системы. Рассмотрены случаи раздельного и совместного действия следящей и потенциальной нагрузок. Проведено исследование влияния жесткости шарнирного закрепления стержня и демпфирования в системе на критические значения нагрузок и положение границ области устойчивости на плоскости параметров нагружения.

**Ключевые слова:** стержень с упругим шарниром, потенциальная и следящая нагрузки, устойчивость прямолинейного стержня, критические нагрузки, границы области устойчивости

Numerous features of non-conservative mechanical systems identified in studying their stability determine significant theoretical and practical interest to analyze various options of the calculation schemes. The paper considers stability of a rectilinear rod connected at one end to a joint and loaded with follower and potential loads uniformly distributed along the rod length. The joint was rigid with respect to rotation of the rod end. In order to apply the method of expanding solution to the perturbed motion equation into a series in terms of eigenmodes, the problem of determining the system eigenfrequencies and modes was solved. The cases of separate and combined action of the follower and potential loads were considered. A study was made on the influence of rigidity of the rod fastening and damping in the system on the loads critical values and on the position of the stability region boundaries on the loading parameters plane.

**Keywords:** rod with the elastic joint, potential and follower loads, rectilinear rod stability, critical loads, stability region boundaries

Развитие машино-, авиа-, ракетостроения и робототехники существенно расширило класс нагрузок, подлежащих изучению в механике деформируемого твердого тела. Особое место при исследовании устойчивости элементов конструкций и деталей машин занимают неконсервативные силы, в частности следящие.

Характерной особенностью таких сил является то, что перемещаясь вместе с точками приложения в процессе движения и деформирования упругого тела, углы между направлениями сил и его поверхностью в местном лагранжевом базисе остаются неизменными.

Несмотря на временные сомнения в их существовании [1, 2], в работе [3] дано исчерпывающее обоснование их присутствия и необходимости учета при исследовании устойчивости различных механических систем. Классическим примером неконсервативной задачи теории упругой устойчивости является задача об устойчивости консольного стержня при сжатии следящей силой, приложенной к его свободно-му концу и направленной вдоль оси стержня при любых его отклонениях от прямолинейной формы равновесия [4].

Именно на этой задаче, решенной в середине прошлого столетия, окончательно утвердился динамический метод исследования устойчивости [5].

В работе [6] утверждалось о неограниченной устойчивости указанной системы. К такому выводу приводили результаты применения статического метода для исследования устойчивости

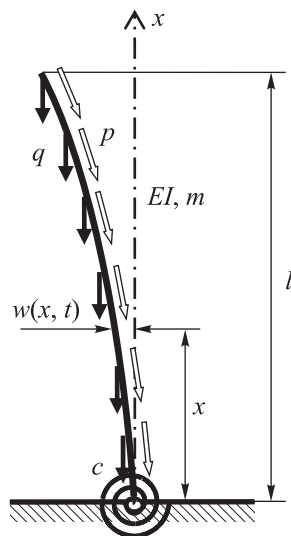


Рис. 1. Схема стержня, находящегося под действием следящей и потенциальной распределенных нагрузок

при решении данной задачи. Статический метод определения критических значений нагрузок основан на отыскании условий существования смежных форм равновесия по отношению к исследуемой на устойчивость форме равновесия.

Однако при нагружении системы неконсервативными силами смежные формы равновесия могут отсутствовать, а потеря устойчивости связана с тем, что равновесие системы сменяется движением. Это обстоятельство отмечено еще в 20-е годы прошлого столетия для стержня при действии тангенциального или аксиального скручивающего момента [7].

В последние годы задачи устойчивости механических систем, находящихся в условиях нагружения неконсервативными силами, ориентированы на усложнение расчетных схем [8–11], расчет на сочетание потенциальных и неконсервативных нагрузок с построением границ областей устойчивости в пространстве параметров нагружения [12], дальнейшее изучение влияния различных факторов на критические значения неконсервативных сил, в частности демпфирования [13].

Так, в работе [14] с помощью метода дифференциальных квадратур рассмотрены варианты изменения распределенной следящей нагрузки на стержень с различными граничными условиями.

Проведем исследование устойчивости прямолинейного стержня жесткостью  $EI$ , погонной массой  $m$  и длиной  $l$ , связанного на одном конце с упругим шарниром и находящегося под действием равномерно распределенных по длине потенциальной и следящей нагрузок (рис. 1).

Шарнир обладает жесткостью  $c$  по отношению к повороту крайнего сечения стержня, которую выразим через жесткость стержня следующим образом:

$$c = \gamma \frac{EI}{l},$$

где  $\gamma$  — безразмерная жесткость шарнирного закрепления стержня.

Практический интерес представляет исследование влияния жесткости шарнира и, что обычно для неконсервативных систем, рассеяния энергии на критические значения параметров нагружения. Для потенциальной и следящей сил, приложенных к свободному концу стержня, аналогичная задача рассмотрена в работе [15].

**Расчет собственных колебаний.** Подразумевая использование метода разложения решения уравнения возмущенного движения в ряд по формам собственных колебаний системы, исследуем их спектр. Пусть  $w(x, t)$  — нормальный прогиб сечений стержня, где  $x$  — продольная координата;  $t$  — время.

Решение уравнения собственных колебаний, записанное в общепринятых обозначениях,

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

представим в виде

$$w(x, t) = \varphi(x) \exp(i\omega t),$$

где  $\varphi(x)$  — формы собственных колебаний системы;  $i$  — мнимая единица;  $\omega$  — частота собственных колебаний системы.

Тогда для формы собственных колебаний  $\varphi(x)$  имеем

$$EI \frac{d^4 \varphi}{dx^4} - m\omega^2 \varphi = 0,$$

или в безразмерном виде

$$\frac{d^4 \varphi}{d\xi^4} - \chi^4 \varphi = 0, \tag{1}$$

где

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad \chi^4 = \frac{m\omega^2 l^4}{EI}.$$

Для заданного способа закрепления стержня граничные условия определяются выражениями

$$\varphi = 0; \quad EI \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - c \frac{d\varphi}{dx} = 0 \quad \text{при } x = 0;$$

$$EI \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0; \quad EI \frac{d^3 \varphi}{dx^3} = 0 \quad \text{при } x = l.$$

С учетом введенного обозначения для жесткости шарнирного закрепления граничные условия в безразмерной форме

$$\varphi = 0; \quad \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} - \gamma \frac{d\varphi}{d\xi} = 0 \quad \text{при } \xi = 0;$$

$$\frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} = 0; \quad \frac{d^3 \varphi}{d\xi^3} = 0 \quad \text{при } \xi = 1. \tag{2}$$

Решение уравнения (1) имеет вид

$$\varphi(\xi) = C_1 \sin \chi \xi + C_2 \cos \chi \xi + C_3 \operatorname{sh} \chi \xi + C_4 \operatorname{ch} \chi \xi,$$

где  $C_1 - C_4$  — постоянные интегрирования;  $\chi$  — частотный параметр консольного стержня.

Удовлетворяя решение уравнения (1) граничным условиям (2) и требуя выполнения

условия нетривиальности решения системы однородных уравнений для постоянных интегрирования  $C_1 - C_4$ , получаем уравнение для определения частотных параметров  $\chi_k$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \gamma & \chi & \gamma & -\chi \\ -\sin \chi & -\cos \chi & \operatorname{sh} \chi & \operatorname{ch} \chi \\ -\cos \chi & \sin \chi & \operatorname{ch} \chi & \operatorname{sh} \chi \end{bmatrix} = 0. \tag{3}$$

После нахождения корней  $\chi_k$  частоты собственных колебаний системы определяются как

$$\omega_k = \frac{\chi_k^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

Если жесткость шарнирного закрепления стержня  $\gamma = 0$ , то выражение (3) принимает вид  $\operatorname{tg} \chi = \operatorname{th} \chi$ , что соответствует частотному уравнению для стержня с шарнирным закреплением одного конца. При  $\gamma \rightarrow \infty$  частотные параметры консольного стержня, защемленного на одном конце, определяются выражением  $1 + \operatorname{ch} \chi \cos \chi = 0$ .

С учетом матрицы коэффициентов (3) при постоянных интегрирования  $C_1 - C_4$  для некоторого частотного параметра  $\chi_k$  принимаем  $C_{2k} = -C_{4k} = 1$ . Тогда для остальных констант получаем

$$C_{1k} = \frac{1}{\operatorname{ch} \chi_k + \cos \chi_k} \left( -\operatorname{sh} \chi_k + \sin \chi_k + \frac{2\chi_k}{\gamma} \operatorname{ch} \chi_k \right);$$

$$C_{3k} = \frac{1}{\operatorname{ch} \chi_k + \cos \chi_k} \left( \operatorname{sh} \chi_k - \sin \chi_k - \frac{2\chi_k}{\gamma} \cos \chi_k \right).$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$

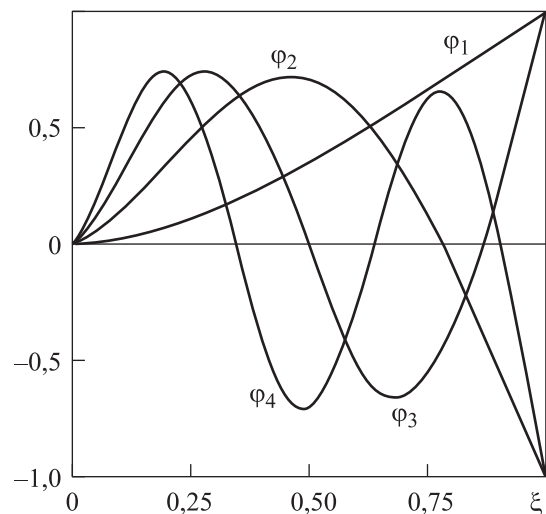


Рис. 2. Первые четыре формы собственных колебаний системы при жесткости шарнирного закрепления стержня  $\gamma = 50$

Первые четыре формы собственных колебаний системы при жесткости шарнирного закрепления стержня  $\gamma = 50$ , отмасштабированные для удобства представления к условию  $\varphi_k(\chi_k) = 1$ , приведены на рис. 2.

**Критические значения нагрузок.** Уравнение возмущенного движения (уравнение динамического метода) при совместном действии потенциальной и следящей распределенных нагрузок с соответствующими интенсивностями  $q$  и  $p$  имеет вид

$$EI \left( 1 + b_i \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + mb_e \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (q + p) \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] - p \frac{\partial w}{\partial x} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (4)$$

где  $b_i$  — коэффициент вязкости, описывающий внутреннее трение в материале стержня по модели Фойхта [16];  $b_e$  — коэффициент трения, описывающий стандартное внешнее трение, пропорциональное скорости движения стержня.

В уравнении (4) учтен линейный закон изменения сжимающего усилия по длине стержня. Как отмечено в публикациях [12, 13], для распределенных систем именно внутреннее трение отвечает за парадокс Циглера [17], обнаруженный для системы с двумя степенями свободы и получивший объяснение в работе [18].

Дополнительно введем безразмерное время  $\tau$  с помощью некоторой характерной частоты  $\omega_0$ , безразмерные коэффициенты внутреннего  $\varepsilon_i$  и внешнего  $\varepsilon_e$  демпфирования, безразмерные интенсивности потенциальной  $\alpha$  и следящей  $\beta$  (в каждом сечении направленной по касательной к изогнутой оси стержня) распределенных нагрузок на стержень:

$$\begin{aligned} \tau = \omega_0 t; \quad \omega_0 = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}; \quad \varepsilon_i = b_i \omega_0; \\ \varepsilon_e = \frac{b_e}{\omega_0}; \quad \alpha = \frac{ql^3}{EI}; \quad \beta = \frac{pl^3}{EI}. \end{aligned} \quad (5)$$

С учетом безразмерных параметров (5) уравнение возмущенного движения стержня (4) в окрестности исследуемого на устойчивость вертикального прямолинейного положения равновесия стержня принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \varepsilon_i \frac{\partial^5 w}{\partial \xi^4 \partial \tau} + \varepsilon_e \frac{\partial w}{\partial \tau} + (\alpha + \beta) \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (1 - \xi) \frac{\partial w}{\partial \xi} \right] + \\ + \beta \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Исследование устойчивости проведем методом разложения решения уравнения (6) по формам собственных колебаний [19].

Представим решение  $w(\xi, \tau)$  уравнения возмущенного движения в виде ряда по формам собственных колебаний стержня с упругой опорой

$$w(\xi, \tau) = \mathbf{q}^T(\tau) \boldsymbol{\varphi}(\xi);$$

$$\mathbf{q}(\tau) = \begin{bmatrix} q_1(\tau) \\ q_2(\tau) \\ \dots \\ q_n(\tau) \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varphi}(\xi) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\xi) \\ \varphi_2(\xi) \\ \dots \\ \varphi_n(\xi) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где  $\mathbf{q}$  — вектор обобщенных координат;  $\boldsymbol{\varphi}$  — вектор форм собственных колебаний;  $n$  — размер векторов  $\mathbf{q}$  и  $\boldsymbol{\varphi}$ , равный числу удерживаемых членов ряда.

В скалярной форме уравнение (7) имеет вид

$$w(\xi, \tau) = \sum_{j=1}^n q_j(\tau) \varphi_j(\xi).$$

Подставляя выражение (7) в уравнение (6) и применяя стандартную процедуру метода Бубнова — Галеркина, получаем матричное уравнение

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} + (\varepsilon_e \mathbf{A} + \varepsilon_i \mathbf{C}) \dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{C} + (\alpha + \beta)(\mathbf{D} - \mathbf{B}) + \beta \mathbf{B}] \mathbf{q} = 0, \quad (8)$$

где  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  — матрицы размера  $n \times n$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \int_0^1 \boldsymbol{\varphi}(\xi) \boldsymbol{\varphi}^T(\xi) d\xi; \\ \mathbf{C} &= \int_0^1 \frac{d^4 \boldsymbol{\varphi}(\xi)}{d\xi^4} \boldsymbol{\varphi}(\xi)^T d\xi; \\ \mathbf{D} &= \int_0^1 (\xi - 1) \frac{d^2 \boldsymbol{\varphi}(\xi)}{d\xi^2} \boldsymbol{\varphi}(\xi)^T d\xi; \\ \mathbf{B} &= \int_0^1 \frac{d \boldsymbol{\varphi}(\xi)}{d\xi} \boldsymbol{\varphi}(\xi)^T d\xi. \end{aligned} \quad (9)$$

В силу свойства ортогональности форм собственных колебаний матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{C}$  — диагональные.

Представляя вектор обобщенных координат в виде

$$\mathbf{q}(\tau) = \mathbf{q}_0 \exp(\lambda \tau)$$

и подставляя это выражение в уравнение (8) относительно характеристических показателей  $\lambda$ , получаем алгебраическую проблему собственных значений в виде матричного полинома

$$P_2\lambda^2 + P_1\lambda + P_0 = 0,$$

где  $P_0 = C + (\alpha + \beta)(D - B) + \beta B$ ;  $P_1 = \epsilon_e A + \epsilon_i C$ ;  $P_2 = A$ .

Применение метода разложения по формам собственных колебаний сводит систему с распределенными параметрами к системе с конечным числом степеней свободы.

Если на систему действует только потенциальная нагрузка ( $\beta = 0$  и  $\alpha \neq 0$ ), то уравнение (8) принимает вид

$$A\ddot{q} + (\epsilon_e A + \epsilon_i C)\dot{q} + [C + \alpha(D - B)]q = 0. \quad (10)$$

Критическое значение интенсивности потенциальной нагрузки  $\alpha_*$  определим с помощью статического метода исследования устойчивости, для которого справедливо уравнение относительно отклонений  $w(\xi)$ , уже не зависящих от времени,

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + \alpha \frac{d}{d\xi} \left[ (1 - \xi) \frac{dw}{d\xi} \right] = 0. \quad (11)$$

Путем несложных преобразований уравнение (11) сведем к уравнению Бесселя [19], для чего введем ось  $O\xi$ , направленную вниз, с началом в верхнем сечении стержня. Возмущенное состояние, смежное с прямолинейным, будет характеризоваться углом поворота сечений  $\theta = dw/d\xi$ . Тогда вместо уравнения (11) имеем

$$\frac{d^2 \theta}{d\xi^2} + \alpha \xi \theta = 0. \quad (12)$$

При жесткости шарнирного закрепления стержня  $\gamma \rightarrow \infty$ , т. е. для консольного стержня с жестко закрепленным нижним сечением, уравнение (12) дополняем граничными условиями

$$\begin{aligned} d\theta/d\xi &= 0 \text{ при } \xi = 0; \\ \theta &= 0 \text{ при } \xi = 1. \end{aligned}$$

Удовлетворение решения уравнения (12), выраженное через функции Бесселя, этим условиям и использование свойств функций Бесселя определяют критическое значение интенсивности потенциальной нагрузки  $\alpha_* = 7,84$ . Для конечных значений жесткости шарнира  $\gamma$  граничное условие при  $\xi = 1$  заменим на  $d\theta/d\xi - \gamma\theta = 0$ .

На основе уравнения (10) применим динамический метод для определения критического значения интенсивности потенциальной нагрузки  $\alpha_*$  при различных значениях  $\gamma$ . Для контроля правильности предыдущих вычисле-

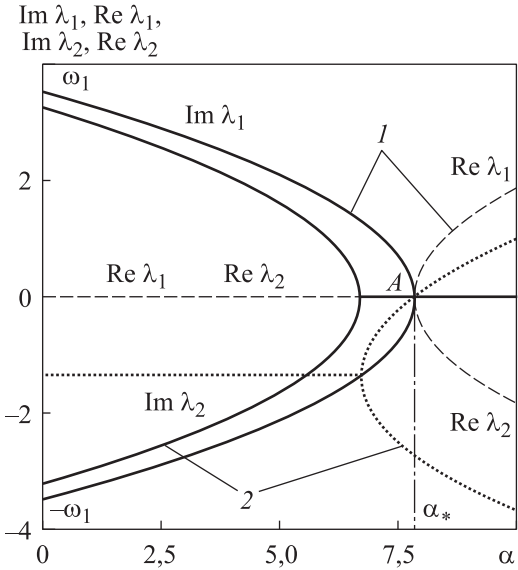


Рис. 3. Зависимости мнимых  $Im \lambda_1, Im \lambda_2$  и действительных  $Re \lambda_1, Re \lambda_2$  частей характеристических показателей  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  от интенсивности потенциальной нагрузки  $\alpha$  при коэффициентах демпфирования  $\epsilon_e = \epsilon_i = 0$  (1) и  $\epsilon_e = \epsilon_i = 0,2$  (2)

ний рассмотрим случай  $\gamma \rightarrow \infty$  при числе членов ряда в разложении (7)  $n = 8$ .

Зависимости минимальных по модулю комплексно-сопряженных характеристических показателей  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , ответственных за устойчивость системы, от интенсивности потенциальной нагрузки  $\alpha$  приведены на рис. 3.

Если в уравнении (11) демпфирование отсутствует ( $\epsilon_e = \epsilon_i = 0$ ), то с ростом  $\alpha$  первая частота собственных колебаний  $\omega_1$  как мнимая часть  $Im \lambda_1$  уменьшается и в точке  $A$  обращается в нуль. До точки  $A$  действительные части  $Re \lambda_1$  и  $Re \lambda_2$  первого  $\lambda_1$  и второго  $\lambda_2$  характеристических показателей равны нулю (штриховая линия), а после точки  $A$  действительная часть  $Re \lambda_1$  становится положительной, что соответствует потере устойчивости системы по типу дивергенции.

Критическое значение интенсивности потенциальной нагрузки  $\alpha_*$  с точностью до трех значащих цифр равно 7,84, т. е. совпадает с данными литературных источников. Интересно рассмотреть, каким образом, существенно завися от демпфирования, поведение характеристических показателей не изменяет критическое значение интенсивности потенциальной нагрузки  $\alpha_* = 7,84$ .

Для иллюстрации этого факта на рис. 3 построены траектории мнимых и действительных частей характеристических показателей  $\lambda_1$

и  $\lambda_2$  при наличии диссипации энергии ( $\varepsilon_e = \varepsilon_i = 0,2$ ).

Здесь, как и в предыдущем случае, низшая частота как мнимая часть  $\text{Im}\lambda_1$  с ростом интенсивности потенциальной нагрузки становится равной нулю при некотором значении  $\alpha$ , а действительные части характеристических показателей (пунктирная линия) — отрицательными. Затем одна из действительных частей получает положительное значение в точке  $A$  при том же значении  $\alpha_*$ , реализуя потерю устойчивости по типу дивергенции.

Если на систему действует только следящая нагрузка ( $\alpha = 0$  и  $\beta \neq 0$ ), то уравнение (8) принимает вид

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + (\varepsilon_e \mathbf{A} + \varepsilon_i \mathbf{C})\dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{C} + \beta \mathbf{D}]\mathbf{q} = 0.$$

Как и в предыдущем случае, рассмотрим консольный стержень ( $\gamma \rightarrow \infty$ ) и два варианта диссипации энергии. Пусть диссипация энергии в системе отсутствует ( $\varepsilon_e = \varepsilon_i = 0$ ). Возрастание интенсивности следящей нагрузки  $\beta$  (рис. 4) сближает мнимые части первого  $\text{Im}\lambda_1$  и второго  $\text{Im}\lambda_2$  характеристических показателей (сплошные линии), которые вплоть до совпадения первой  $\omega_1$  и второй  $\omega_2$  частот собственных колебаний остаются чисто мнимыми, т. е. их действительные части  $\text{Re}\lambda_1$  и  $\text{Re}\lambda_2$  равны нулю.

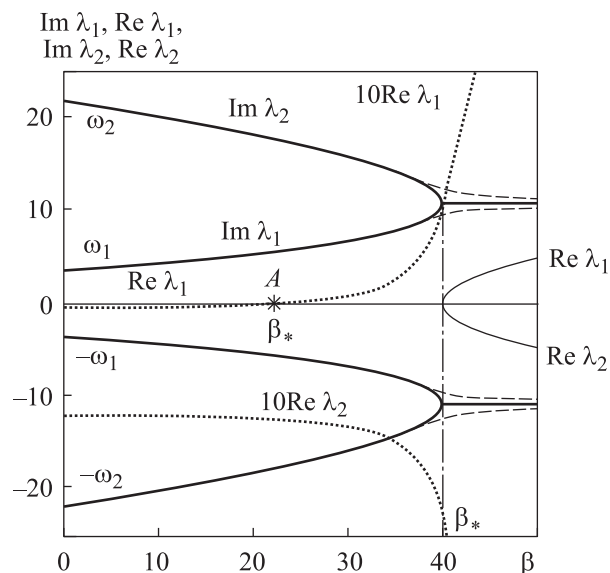


Рис. 4. Зависимости мнимых  $\text{Im}\lambda_1$ ,  $\text{Im}\lambda_2$  и действительных  $\text{Re}\lambda_1$ ,  $\text{Re}\lambda_2$  частей характеристических показателей  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  от интенсивности следящей нагрузки  $\beta$  при коэффициентах демпфирования  $\varepsilon_e = \varepsilon_i = 0$  (сплошные линии) и  $\varepsilon_e = \varepsilon_i = 0,005$  (штриховые и пунктирные линии)

При критическом значении интенсивности следящей нагрузки  $\beta_* = 40,0$  первая и вторая частоты собственных колебаний становятся равными, определяя тем самым частоту колебательного типа потери устойчивости, т. е. частоту флаттера. Рост амплитуды колебаний системы определяется положительным значением одного из характеристических показателей.

Наличие демпфирования, хотя и весьма малого ( $\varepsilon_e = \varepsilon_i = 0,005$ ), практически не меняет характер зависимости мнимых частей характеристических показателей, за исключением окрестности  $\beta_* = 40,0$  (штриховые линии). Слияния частот в этом случае не происходит. Пунктирными линиями показаны зависимости действительных частей первого характеристического показателя, значения которых для наглядности увеличены в 10 раз ( $10\text{Re}\lambda_1$ ,  $10\text{Re}\lambda_2$ ).

Верхняя кривая пересекает ось абсцисс в точке  $A$ , принимая при этом положительное значение. Критическое состояние системы в этом случае, а именно флаттер системы, наступает при  $\beta_* = 22,4$ , что в 1,79 меньше, чем при отсутствии демпфирования. Это есть проявление парадокса Циглера. Причем обнуление коэффициента внешнего демпфирования  $\varepsilon_e$  оставляет рис. 4 без изменения, практически не влияя на критическое значение интенсивности следящей нагрузки.

Таким образом, поведение характеристических показателей определяет критические значения параметров нагрузок  $\alpha_*$  и  $\beta_*$  при варьировании различных параметров системы.

Построим зависимости критических значений параметров нагрузок  $\alpha_*$  и  $\beta_*$  от жесткости шарнирного закрепления стержня  $\gamma$ , определяющей форму собственных колебаний системы  $\varphi_j(\chi_k)$ . Через эти функции и их производные вычисляются матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  (9), являющиеся коэффициентами алгебраических уравнений для определения характеристических показателей. Решая эти уравнения при варьировании параметров нагрузки по значениям действительных частей характеристических показателей, находим критические значения нагрузок.

Зависимости критических значений интенсивностей потенциальной  $\alpha_*$  и следящей  $\beta_*$  нагрузок от жесткости шарнирного закрепления стержня  $\gamma$  при различных значениях коэффициентов демпфирования приведены на

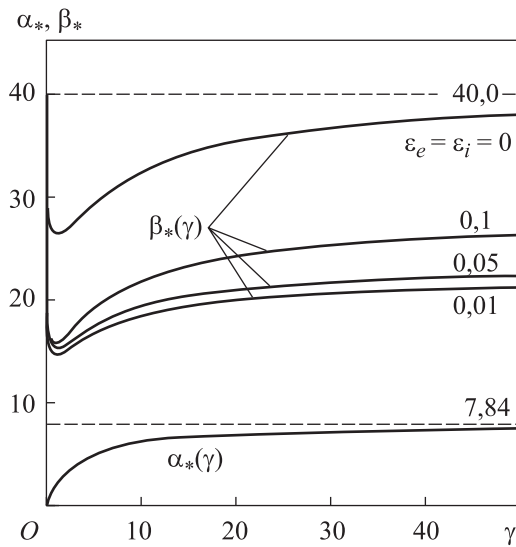


Рис. 5. Зависимости критических значений интенсивностей потенциальной  $\alpha_*$  и следящей  $\beta_*$  нагрузок от жесткости шарнирного закрепления стержня  $\gamma$

рис. 5. Характер протекания кривой  $\alpha_*(\gamma)$  и ее стремление к горизонтальной асимптоте 7,84 являются вполне очевидными.

Особенность кривых  $\beta_*(\gamma)$  заключается в том, что случай  $\gamma=0$  для следящей нагрузки является вырожденным и противоречащим постановке задачи устойчивости. Очевидно, что этим объясняется немонотонность кривых  $\beta_*(\gamma)$  и наличие локального минимума в окрестности начала координат.

После «провала» критических значений интенсивности следящей нагрузки вследствие парадокса Циглера зависимость  $\beta_*$  от коэффициентов трения становится более естественной. Кривые  $\beta_*(\gamma)$  на рис. 5 построены при различных значениях коэффициентов внешнего  $\epsilon_e$  и внутреннего  $\epsilon_i$  демпфирования, которые приняты одинаковыми ( $\epsilon_e = \epsilon_i$ ). Более подробно влияние демпфирования на критические значения неконсервативных нагрузок изложено в работах [12, 13].

**Построение границ области устойчивости.**

Для исследования устойчивости систем с конечным числом степеней свободы используют критерии, позволяющие судить о расположении характеристических показателей на комплексной плоскости и строить границы областей устойчивости в пространстве параметров без вычисления самих показателей.

Наиболее удобным представляется критерий Рауса — Гурвица. Соответствующая матрица

Гурвица составлена из коэффициентов характеристического полинома матрицы

$$G = \begin{bmatrix} O & E \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix},$$

где  $O$  и  $E$  — нулевая и единичная матрица размера  $n \times n$  соответственно;

$$G_{21} = -A^{-1}[C + (\alpha + \beta)(D - B) + \beta V];$$

$$G_{22} = -A^{-1}(\epsilon_e A + \epsilon_i C).$$

Матрица  $G$  появляется в случае преобразования уравнения (8) к нормальной форме Коши.

Равенство нулю главного минора матрицы Гурвица порядка  $2n-1$ , т. е.  $\Delta_{2n-1} = 0$ , определяет границу области флаттера на плоскости параметров нагружения  $\alpha$  и  $\beta$ . Границу области дивергенции можно определить из условия равенства нулю определителя матрицы Гурвица или (что то же самое) равенства нулю свободного члена характеристического полинома  $b_0 = 0$ .

Некоторые результаты определения границ области устойчивости для числа членов ряда  $n=8$  на плоскости параметров нагружения  $\alpha$  и  $\beta$  приведены на рис. 6, а-в.

При жесткости шарнирного закрепления стержня  $\gamma \rightarrow \infty$  и отсутствии демпфирования ( $\epsilon_e = \epsilon_i = 0$ ) на плоскости параметров нагружения  $\alpha$  и  $\beta$  построены границы области устойчивости  $OABC$ , примыкающей к началу координат (см. рис. 6, а). Часть границы  $AB$ , на которой обращается в нуль главный минор матрицы Гурвица ( $\Delta_{2n-1} = 0$ ), определяет границу флаттера (потери устойчивости колебательного типа). На части границы  $BC$  обращается в нуль свободный член характеристического полинома  $b_0$ . Здесь один из характеристических показателей переходит в правую полуплоскость через начало координат, и потеря устойчивости происходит по типу дивергенции.

При жесткости шарнирного закрепления стержня  $\gamma=25$ , коэффициентах демпфирования  $\epsilon_i=0$  и  $\epsilon_e=0$  построена область устойчивости  $ABCO$  (см. рис. 6, б), которая демонстрирует ее уменьшение при добавлении в систему внутреннего трения  $\epsilon_i=0,001$ . Иллюстрируя парадокс Циглера, ординаты верхней границы области устойчивости  $AB$ , смещаясь в положение  $A'B'$ , во втором случае уменьшаются почти в 2 раза.

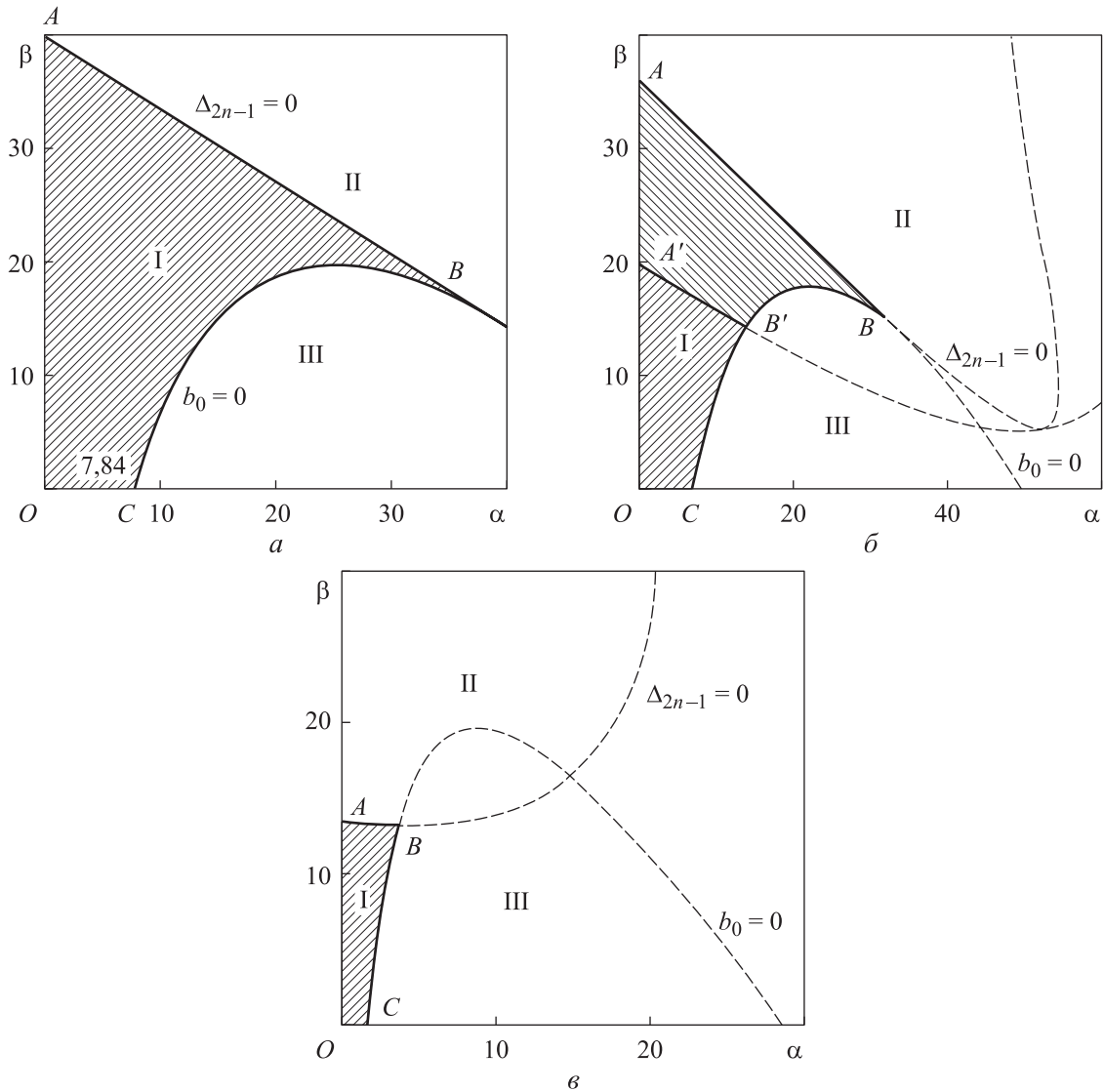


Рис. 6. Границы области устойчивости при различных значениях жесткости шарнирного закрепления стержня, коэффициентов внешнего и внутреннего демпфирования:  
 а —  $OABC$  при  $\gamma \rightarrow \infty$  и  $\varepsilon_e = \varepsilon_i = 0$ ; б —  $ABCO$  при  $\varepsilon_i = 0$  и  $A'B'CO$  при  $\varepsilon_i = 0,001$  для  $\gamma = 25$ ;  
 в —  $ABCO$  при  $\gamma = 1$  и  $\varepsilon_i = 0,001$ ;  
 I — устойчивость; II — флаттер; III — дивергенция

При жесткости упругой опоры  $\gamma = 1$  и коэффициенте внутреннего демпфирования  $\varepsilon_i = 0,001$  (т. е. при малых значениях этих параметров) границы области устойчивости построены на рис. 6, в.

## Выводы

1. Показано, что метод разложения решения уравнения возмущенного движения в ряд по формам собственных колебаний эффективен для изучения устойчивости положения равновесия систем при сложном неконсервативном нагружении.

2. Результаты исследования влияния коэффициентов внешнего и внутреннего демпфирования на критические значения нагрузок, приводящих к колебательной форме потери устойчивости (флаттеру), подтверждают, что ответственным за парадокс Циглера является внутреннее трение в материале системы.

3. Установлено, что при определении границ областей устойчивости удобно применять критерий Гурвица, для реализации которого достаточно построить соответствующую матрицу из коэффициентов характеристического полинома, нулевой уровень главного минора матрицы и свободного члена.



## Литература

- [1] Koiter W.T. Unrealistic follower forces. *J. Sound Vib.*, 1996, vol. 194, no. 4, pp. 636–638, doi: <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0383>
- [2] Sugiyama Y., Langthjem M.A., Ryu B.J. Realistic follower forces. *J. Sound Vib.*, 1999, vol. 225, no. 4, pp. 779–782, doi: <https://doi.org/10.1006/jsvi.1998.2290>
- [3] Elishakoff I. Controversy associated with the so-called «follower forces»: critical overview. *Appl. Mech. Rev.*, 2005, vol. 58, no. 2, pp. 117–142, doi: <https://doi.org/10.1115/1.1849170>
- [4] Beck M. Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stabes. *ZAMP*, 1952, vol. 3, no. 3, pp. 225–228, doi: <https://doi.org/10.1007/BF02008828>
- [5] Болотин В.В. *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*. Москва, Физматгиз, 1961. 340 с.
- [6] Pflüger A. *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*. Springer, 1964. 473 p.
- [7] Николаи Е.Л. Об устойчивости прямолинейной формы равновесия сжатого и скрученного стержня. *Изв. Ленингр. политехн. ин-та*, 1928, № 31, с. 1–26.
- [8] Bigoni D.N., Kirillov O.N., Misseroni D. et al. Flutter and divergence instability in the Pflüger column: experimental evidence of the Ziegler destabilization paradox. *J. Mech. Phys. Solids*, 2018, vol. 116, pp. 99–116, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2018.03.024>
- [9] Elishakoff I. *Resolution of the 20th century conundrum in elastic stability*. World Scientific, 2014. 352 p.
- [10] Sotoudeh Z., Hosking N.S. Stability analysis of columns with imperfection. *AIAA J.*, 2017, vol. 55, no. 4, pp. 1417–1424, doi: <https://doi.org/10.2514/1.J055136>
- [11] Rastgoo M., Fazelzadeh S.A., Eftekhari M. et al. Flow-induced flutter instability of functionally graded cantilever pipe. *Int. J. Acoust. Vib.*, 2017, vol. 22, no. 3, pp. 320–325, doi: <https://doi.org/10.20855/ijav.2017.22.3477>
- [12] Радин В.П., Самогин Ю.Н., Чирков В.П. и др. *Решение неконсервативных задач теории устойчивости*. Москва, Физматлит, 2017. 236 с.
- [13] Радин В.П., Чирков В.П., Новикова О.В. и др. Влияние демпфирования на критические значения неконсервативных нагрузок. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2020, № 2, с. 46–53, doi: <https://doi.org/10.31857/S0235711920020121>
- [14] Fazelzadeh S.A., Tashakorian M., Ghavanloo E. Nonconservative stability analysis of columns with various loads and boundary conditions. *AIAA J.*, 2019, vol. 57, no. 10, doi: <https://doi.org/10.2514/1.J057501>
- [15] Радин В.П., Чирков В.П., Щугорев А.В. и др. Устойчивость стержня с упругим шарниром при непотенциальном нагружении. *Справочник. Инженерный журнал*, 2017, № 10, с. 36–41.
- [16] Пановко Я.Г. *Внутреннее трение при колебаниях упругих систем*. Москва, Физматгиз, 1960. 194 с.
- [17] Циглер Г. *Основы теории устойчивости конструкций*. Москва, Мир, 1971. 192 с.
- [18] Bolotin V.V., Zhinzher N.I. Effects of damping on stability of elastic systems subjected to nonconservative forces. *Int. J. Solids Struct.*, 1969, vol. 5, no. 9, pp. 965–989, doi: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(69\)90082-1](https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90082-1)
- [19] Вольмир А.С. *Устойчивость деформируемых систем*. Москва, Наука, 1967. 984 с.

## References

- [1] Koiter W.T. Unrealistic follower forces. *J. Sound Vib.*, 1996, vol. 194, no. 4, pp. 636–638, doi: <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0383>
- [2] Sugiyama Y., Langthjem M.A., Ryu B.J. Realistic follower forces. *J. Sound Vib.*, 1999, vol. 225, no. 4, pp. 779–782, doi: <https://doi.org/10.1006/jsvi.1998.2290>
- [3] Elishakoff I. Controversy associated with the so-called «follower forces»: critical overview. *Appl. Mech. Rev.*, 2005, vol. 58, no. 2, pp. 117–142, doi: <https://doi.org/10.1115/1.1849170>
- [4] Beck M. Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stabes. *ZAMP*, 1952, vol. 3, no. 3, pp. 225–228, doi: <https://doi.org/10.1007/BF02008828>
- [5] Bolotin V.V. *Nekonservativnye zadachi teorii uprugoy ustoychivosti* [Nonconservative problems of elastic stability theory]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961. 340 p. (In Russ.).

- [6] Pflüger A. *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*. Springer, 1964. 473 p.
- [7] Nikolai E.L. On the stability of the rectilinear equilibrium form of a compressed and twisted rod. *Izv. Leningr. politekhn. in-ta*, 1928, no. 31, pp. 1–26. (In Russ.).
- [8] Bigoni D.N., Kirillov O.N., Misseroni D. et al. Flutter and divergence instability in the Pflüger column: experimental evidence of the Ziegler destabilization paradox. *J. Mech. Phys. Solids*, 2018, vol. 116, pp. 99–116, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2018.03.024>
- [9] Elishakoff I. *Resolution of the 20th century conundrum in elastic stability*. World Scientific, 2014. 352 p.
- [10] Sotoudeh Z., Hosking N.S. Stability analysis of columns with imperfection. *AIAA J.*, 2017, vol. 55, no. 4, pp. 1417–1424, doi: <https://doi.org/10.2514/1.J055136>
- [11] Rastgoo M., Fazelzadeh S.A., Eftekhari M. et al. Flow-induced flutter instability of functionally graded cantilever pipe. *Int. J. Acoust. Vib.*, 2017, vol. 22, no. 3, pp. 320–325, doi: <https://doi.org/10.20855/ijav.2017.22.3477>
- [12] Radin V.P., Samogin Yu.N., Chirkov V.P. et al. *Reshenie nekonservativnykh zadach teorii ustoychivosti* [Solving nonconservative problems of stability theory]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2017. 236 p. (In Russ.).
- [13] Radin V.P., Chirkov V.P., Novikova O.V. et al. The damping effect on critical values of non-conservative loads. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*, 2020, no. 2, pp. 46–53, doi: <https://doi.org/10.31857/S0235711920020121> (in Russ.). (Eng. version: *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2020, vol. 49, no. 2, pp. 122–128, doi: <https://doi.org/10.3103/S1052618820020120>)
- [14] Fazelzadeh S.A., Tashakorian M., Ghavanloo E. Nonconservative stability analysis of columns with various loads and boundary conditions. *AIAA J.*, 2019, vol. 57, no. 10, doi: <https://doi.org/10.2514/1.J057501>
- [15] Radin V.P., Chirkov V.P., Shchugorev A.V. et al. Stability of bar with flexure hinge under nonconservative loading. *Spravochnik. Inzhenernyy zhurnal* [Handbook. An Engineering Journal], 2017, no. 10, pp. 36–41. (In Russ.).
- [16] Panovko Ya.G. *Vnutrennee trenie pri kolebaniyakh uprugikh sistem* [Internal friction at oscillations of elastic systems]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1960. 194 p. (In Russ.).
- [17] Ziegler H. *Principles of structural stability*. Blaisdell, 1968. 150 p. (Russ. ed.: *Osnovy teorii ustoychivosti konstruktsiy*. Moscow, Mir Publ., 1971. 192 p.)
- [18] Bolotin V.V., Zhinzher N.I. Effects of damping on stability of elastic systems subjected to nonconservative forces. *Int. J. Solids Struct.*, 1969, vol. 5, no. 9, pp. 965–989, doi: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(69\)90082-1](https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90082-1)
- [19] Volmir A.S. *Ustoychivost deformiruemyykh sistem* [Stability of deformed systems]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 984 p. (In Russ.).

Статья поступила в редакцию 14.11.2022

## Информация об авторах

**РАДИН Владимир Павлович** — кандидат технических наук, профессор кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». НИУ «МЭИ» (111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14, e-mail: [radinvp@gmail.com](mailto:radinvp@gmail.com)).

**ЧИРКОВ Виктор Петрович** — доктор технических наук, профессор кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». НИУ «МЭИ» (111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14, e-mail: [victor.p.chirkov@gmail.com](mailto:victor.p.chirkov@gmail.com)).

## Information about the authors

**RADIN Vladimir Pavlovich** — Candidate of Science (Eng.), Professor, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines. National Research University — Moscow Power Engineering Institute (111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14, e-mail: [radinvp@gmail.com](mailto:radinvp@gmail.com)).

**CHIRKOV Victor Petrovich** — Doctor of Science (Eng.), Professor, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines. National Research University — Moscow Power Engineering Institute (111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14, e-mail: [victor.p.chirkov@gmail.com](mailto:victor.p.chirkov@gmail.com)).

**ПОЗНЯК Елена Викторовна** — доктор технических наук, профессор кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». НИУ «МЭИ» (111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14, e-mail: PozniakYV@mpei.ru).

**POZNYAK Elena Viktorovna** — Doctor of Science (Eng.), Professor, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines. National Research University — Moscow Power Engineering Institute (111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14, e-mail: PozniakYV@mpei.ru).

**НОВИКОВА Ольга Валерьевна** — кандидат технических наук, доцент кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». НИУ «МЭИ» (111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14, e-mail: NovicovaOV@mpei.ru).

**NOVIKOVA Olga Valeryevna** — Candidate of Science (Eng.), Associate Professor, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines. National Research University — Moscow Power Engineering Institute (111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14, e-mail: NovicovaOV@mpei.ru).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Радин В.П., Чирков В.П., Позняк Е.В., Новикова О.В. Устойчивость стержня с упругим шарниром при нагружении распределенной неконсервативной нагрузкой. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2023, № 5, с. 3–13, doi: 10.18698/0536-1044-2023-5-3-13

**Please cite this article in English as:**

Radin V.P., Chirkov V.P., Poznyak E.V., Novikova O.V. Stability of a rod with the elastic joint exposed to distributed non-conservative load. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2023, no. 5, pp. 3–13, doi: 10.18698/0536-1044-2023-5-3-13



**Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана  
предлагает читателям монографию  
«Виртуальные частицы и взаимодействия»**

**Авторы: А.И. Круглов, В.С. Окунев**

На основе расширения понятия физического вакуума анализируются свойства частиц обменных фундаментальных взаимодействий и свободных виртуальных частиц. Туннелирование рассматривается как переход реальных частиц в виртуальные состояния. Делается попытка объяснить некоторые несоответствия экспериментальных фактов современной физики. Исследуются фотон-фотонные взаимодействия, расширяется механизм образования массы во Вселенной. Обсуждается возможность спонтанной мультифрагментации космологической сингулярности (фундаментальной частицы — максимона).

Для специалистов, занимающихся фундаментальными и прикладными задачами специальной и общей теории относительности, для студентов вузов, изучающих курсы общей физики.

**По вопросам приобретения обращайтесь:**

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.  
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;  
press@bmstu.ru; <https://bmstu.press>