

УДК 534.12

doi: 10.18698/0536-1044-2023-5-112-122

Динамика плоского движения космического крана-манипулятора типа руки с учетом изгиба звеньев*

С.В. Русских^{1,2}, Ф.Н. Шклярчук^{2,1}¹ ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»² ФГБУН «Институт прикладной механики Российской академии наук»

Plane motion dynamics of a space-based crane-manipulator of the arm type taking into account the links' bending

S.V. Russkikh^{1,2}, F.N. Shklyarchuk^{2,1}¹ Moscow Aviation Institute (National Research University)² Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences

Рассмотрена динамика плоского движения трехзвенного крана-манипулятора, состоящего из двух упругих на изгиб стержней и присоединенного к ним на конце массивного твердого тела (захвата с грузом). Все звенья связаны между собой шарнирными узлами с заданными (управляемыми) относительными углами поворота. Первое звено также соединено с подвижным основанием. Разработана математическая модель системы для расчета ее нестационарных колебаний и динамического нагружения звеньев при произвольных по времени и больших относительных углах поворота звеньев как твердых тел. Изгибные деформации стержней (упругие поперечные перемещения и углы поворота осей) считаются малыми (линейными). Изгиб каждого стержня представлен по методу Ритца двумя заданными функциями формы с неизвестными коэффициентами, которые приняты за обобщенные координаты. При этом использованы консольные формы изгиба каждого стержня с заданным поперечным перемещением и углом поворота на их концах. Рассмотрен упрощенный вариант: изгиб каждого стержня представлен только одной заданной формой его изгиба единичным моментом, приложенным на конце. Уравнения колебаний системы получены на основе принципа возможных перемещений в обобщенных координатах (четыре или два уравнения в упрощенном варианте). Так как углы поворота на концах упругих стержней складываются с задаваемыми углами поворота недеформируемых стержней, суммарные углы для удобства вычислений и повышения точности оставлены под знаками синусов и косинусов без линеаризации. В результате такие уравнения нестационарных колебаний являются нелинейными и интегрированы численными методами с использованием стандартных программ в одном из комплексов компьютерной алгебры. Приведены примеры расчета со сравнительными оценками результатов, полученных в дву- и одночленном приближениях функции формы изгиба стержневых звеньев системы.

Ключевые слова: кран-манипулятор типа руки, динамика плоского движения, упругие колебания, уравнения в обобщенных координатах

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 22-29-01206).

The paper considers the plane motion dynamics of a three-link crane-manipulator consisting of two rods elastic in bending and a massive solid body attached to them at their end (load capture). All links are interconnected by hinge joints with the given (controlled) relative rotation angles. The first link is also connected to the mobile base. The system mathematical model was developed to calculate its non-stationary oscillations and dynamic loading of links at arbitrary in time and large relative angles of the links rotation as the solid bodies. The rods bending deformations (elastic transverse displacements and rotation angles of the axes) were considered to be insignificant (linear). Each rod ending was represented by the Ritz method using two given shape functions with the unknown coefficients, which were taken as the generalized coordinates. In this case, the “cantilever” bending forms of each rod with the given transverse displacement and angle of rotation at their ends were used. A simplified version was considered: each rod bending was represented by only one given form of its bending by a single moment applied at the end. System oscillation equations were obtained based on the principle of probable displacements in the generalized coordinates (four equations or two in a simplified form). Since rotation angles at the ends of the elastic rods were added to the given rotation angles of the non-deformable rods, total angles were left under the signs of sines and cosines without linearization for convenience of calculations and increasing accuracy. As a result, such equations of non-stationary oscillations remained non-linear. They were integrated by numerical methods using standard programs in one of the computer algebra systems. Examples are provided with the comparative results estimates obtained in the two-term and one-term approximations of the function in regard to the bending form of the system bending rod joints.

Keywords: crane-manipulator of the arm type, plane motion dynamics, elastic oscillations, equations in generalized coordinates

Задачам математического моделирования динамики манипуляционных роботов различного типа и назначения с учетом упругости их звеньев посвящено много публикаций.

Космические манипуляторы, предназначенные для работы в условиях невесомости, способны перемещать при плавном, медленном ходе массивные грузы на большие расстояния. Например, манипулятор ERA на Международной космической станции, имеющий два звена в виде тонкостенных стержней общей массой 630 кг, может выдвигаться до 10 м и переносить 8-тонный груз со скоростью до 10 см/с при точности позиционирования до 5 мм [1–3].

Для сборки крупногабаритных космических конструкций, силовым каркасом которых являются регулярные фермы, образованные большим количеством однотипных элементов, могут потребоваться космические роботы-манипуляторы, чтобы выполнять однотипные быстрые операции с высокой точностью позиционирования и устранением упругих колебаний после каждой операции [4–6].

Подходы и методы моделирования динамики манипуляторов с упругими звеньями рассмотрены в работах [7–11]. Многие из этих методов отражены и реализованы на примерах расчета в монографии [12]. Там же подробно

исследована динамика пространственного движения манипулятора с двумя упругими звеньями в виде стержней, работающих на растяжение-сжатие, изгиб в двух плоскостях и кручение при допущении, что масса звеньев пренебрежимо мала по сравнению с таковой перемещаемого груза.

В статье [13] для моделирования двухзвеного манипулятора со звеньями в виде стержней постоянного поперечного сечения использованы разложения по их собственным формам колебаний с условиями сопряжения в подвижном шарнире.

В работах [14–17] для системы упругих стержней, моделирующих многозвенные манипуляторы, усовершенствован подход, основанный на численном решении по методу конечных разностей связанной системы дифференциальных уравнений в частных производных (по координатам и времени), описывающих продольные, поперечные в двух плоскостях и крутильные колебания стержней с учетом их кинематических и динамических условий сопряжения в подвижных соединениях.

Многие задачи динамики упругих составных систем можно решать с помощью общих подходов и методов, изложенных в монографиях [18–20].

Постановка задачи. Рассмотрим плоское движение космического крана-манипулятора типа руки, состоящего из трех шарнирно связанных звеньев (рис. 1). Относительные углы поворота соединяемых в шарнирных узлах 0, 1, 2 звеньев $\theta_0(t)$, $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ и перемещения основания $x_0(t)$, $y_0(t)$ будем считать заданными (управляемыми).

Первое и второе звенья принимаем упругими на изгиб стержнями с постоянными по длине жесткостями EI_i и переменными в общем случае погонными массами $m_i(\xi)$ ($i=1, 2$), поперечные перемещения, обусловленные изгибом стержней, — малыми, а их продольные перемещения — пренебрежимо малыми.

Третье звено, являющееся недеформируемым телом с массой M_3 и центральным моментом инерции J_3^0 в точке 3, моделирует хват с присоединенным твердым телом (грузом). Углы поворота звеньев как твердых тел — произвольные (большие).

Внутри первого и второго полых стержней расположены механизмы и приводы, осуществляющие заданное жесткое кинематическое управление изменением углов между соединяемыми звеньями $\theta_i(t)$ ($i=0, 1, 2$) с целью передвижения и позиционирования твердого тела 3.

Для вывода уравнений движения рассматриваемой системы использован принцип возможных перемещений (принцип Даламбера — Лагранжа)

$$\delta\Pi - \delta A_{\text{ин}} = 0, \quad (1)$$

где $\delta\Pi$ — вариация потенциальной энергии изгиба первого и второго звеньев; $\delta A_{\text{ин}}$ — вариация работы инерционных сил рассматрива-

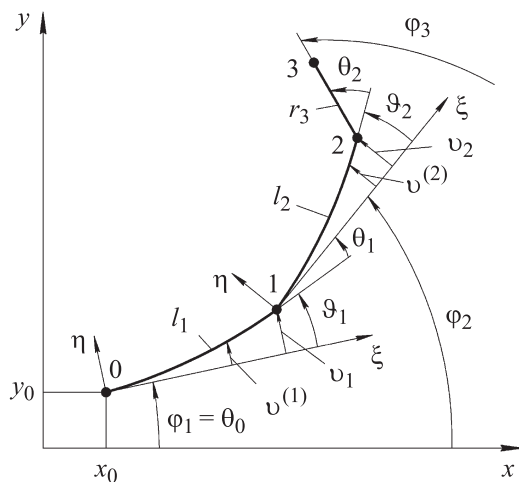


Рис. 1. Модель трехзвенного космического крана-манипулятора типа руки

емой системы (двух упругих звеньев в виде первого, второго стержней и третьего недеформируемого звена с центром масс в точке 3).

Рассмотрим слагаемые, входящие в состав формулы (1).

Первое звено. Координаты произвольной точки стержня $x^{(1)}(\xi, t)$ и $y^{(1)}(\xi, t)$ в неподвижной системе координат xu (см. рис. 1) определяются выражениями

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= x_0(t) + \xi \cos \varphi_1 - v^{(1)} \sin \varphi_1; \\ y^{(1)} &= y_0(t) + \xi \sin \varphi_1 + v^{(1)} \cos \varphi_1, \end{aligned} \quad (2)$$

где ξ — продольная координата местной, связанной с левым концом рассматриваемого стержня подвижной системы координат $\xi\eta$ ($0 \leq \xi \leq l_1$); $\varphi_1 = \theta_0(t)$ — угол поворота первого звена как твердого тела; $v^{(1)}(\xi, t)$ — поперечное перемещение первого стержня за счет изгиба.

Малый угол поворота оси стержня за счет его изгиба определяется как $dv^{(1)}/d\xi$. Прогиб $v_1(t) = v^{(1)}(l_1, t)$ и угол поворота $\vartheta_1(t)$ на конце стержня далее будем рассматривать как обобщенные координаты.

Вариация работы сил инерции первого звена, взятая с обратным знаком, имеет вид

$$\delta A_{\text{ин}}^{(1)} = \int_0^{l_1} m_1 [\ddot{x}^{(1)} \delta x^{(1)} + \ddot{y}^{(1)} \delta y^{(1)}] d\xi, \quad (3)$$

где с учетом формулы (2) выражение в квадратных скобках можно записать как

$$\begin{aligned} \delta y^{(1)} &= [(-\ddot{x}_0 \sin \varphi_1 + \ddot{y}_0 \cos \varphi_1) + A_1] \delta v^{(1)}; \\ A_1 &= \xi \ddot{\varphi}_1 + \ddot{v}^{(1)} - v^{(1)} \dot{\varphi}_1^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Второе звено. Координаты произвольной точки второго стержня $x^{(2)}(\xi, t)$ и $y^{(2)}(\xi, t)$ в неподвижной системе координат xu (см. рис. 1) определяются как

$$\begin{aligned} x^{(2)} &= x_1 + \xi \cos \varphi_2 - v^{(2)} \sin \varphi_2; \\ y^{(2)} &= y_1 + \xi \sin \varphi_2 + v^{(2)} \cos \varphi_2, \end{aligned} \quad (5)$$

где φ_2 — угол поворота второго звена; $v^{(2)}(\xi, t)$ — поперечное перемещение второго стержня за счет изгиба, $0 \leq \xi \leq l_2$; $x_1(t) = x^{(1)}(l_1, t)$; $y_1(t) = y^{(1)}(l_1, t)$.

Согласно рис. 1, угол поворота второго звена как твердого тела

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \vartheta_1 + \theta_1(t),$$

причем

$$\delta\varphi_2 = \delta\vartheta_1.$$

Прогиб $v_2(t) = v^{(2)}(l_2, t)$ и угол поворота $\vartheta_2(t)$ на правом конце второго стержня за счет его изгиба далее будем рассматривать в качестве обобщенных координат.

Вариация работы сил инерции второго звена, взятая с обратным знаком, имеет вид

$$-\delta A_{ин}^{(2)} = \int_0^{l_2} m_2 [\ddot{x}^{(2)} \delta x^{(2)} + \ddot{y}^{(2)} \delta y^{(2)}] d\xi, \quad (6)$$

где с учетом формулы (5) выражение в квадратных скобках можно записать как

$$\begin{aligned} & \ddot{x}^{(2)} \delta x^{(2)} + \ddot{y}^{(2)} \delta y^{(2)} = \\ & = \delta v_1 \{ (-\ddot{x}_0 \sin \varphi_1 + \ddot{y}_0 \cos \varphi_1) + A_1(l_1) + \\ & + A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - B_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \} + \\ & + (\delta v^{(2)} + \xi \delta \vartheta_1) \times \{ (-\ddot{x}_0 \sin \varphi_2 + \ddot{y}_0 \cos \varphi_2) + \\ & + A_1(l_1) \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + B_1(l_1) \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + A_2 \} + \\ & + (v^{(2)} \delta \varphi_2) \{ (-\ddot{x}_0 \cos \varphi_2 - \ddot{y}_0 \sin \varphi_2) - \\ & - A_1(l_1) \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + B_1(l_1) \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + B_2 \}. \quad (7) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_2 &= \xi \ddot{\varphi}_2 + \ddot{v}^{(2)} - v^{(2)} \dot{\varphi}_2^2; \\ B_2 &= \xi \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{v}^{(2)} \dot{\varphi}_2 + v^{(2)} \ddot{\varphi}_2; \\ B_1 &= \xi \dot{\varphi}_1^2 + 2\dot{v}^{(1)} \dot{\varphi}_1 + v^{(1)} \ddot{\varphi}_1. \end{aligned}$$

Третье звено. Координаты центра масс твердого тела в неподвижной системе координат $xу$ (см. рис. 1) определяются следующим образом:

$$x_3 = x_2 + r_3 \cos \varphi_3; \quad y_3 = y_2 + r_3 \sin \varphi_3, \quad (8)$$

где φ_3 — угол поворота твердого тела.

С учетом формулы (5)

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x^{(2)}(l_2, t); \quad y_2(t) = y^{(2)}(l_2, t); \\ \varphi_3 &= \varphi_2 + \vartheta_2 + \theta_2(t); \\ \delta \varphi_3 &= \delta \vartheta_1 + \delta \vartheta_2. \end{aligned}$$

Вариация работы сил инерции с обратным знаком для третьего звена (как для абсолютно твердого тела) определяется выражением

$$-\delta A_{ин}^{(3)} = (\ddot{x}_3 \delta x_3 + \ddot{y}_3 \delta y_3) M_3 + J_3^0 \ddot{\varphi}_3 (\delta \vartheta_1 + \delta \vartheta_2),$$

которое с учетом соотношения (8) можно записать как

$$\begin{aligned} -\delta A_{ин}^{(3)} &= [(\ddot{x}_2 \delta x_2 + \ddot{y}_2 \delta y_2) + C_3 r_3] M_3 + \\ &+ [M_3 r_3 (-\ddot{x}_2 \sin \varphi_3 + \ddot{y}_2 \cos \varphi_3) + J_3 \ddot{\varphi}_3] \times \\ &\times (\delta \vartheta_1 + \delta \vartheta_2), \quad (9) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} C_3 &= \delta v_1 [\dot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) - \dot{\varphi}_3^2 \sin(\varphi_3 - \varphi_1)] + \\ &+ (\delta v_2 + l_2 \delta \vartheta_1) [\dot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_2) - \dot{\varphi}_3^2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)] + \end{aligned}$$

$$+ v_2 \delta \vartheta_1 [\dot{\varphi}_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) + \dot{\varphi}_3^2 \cos(\varphi_3 - \varphi_2)]; \quad (10)$$

$$J_3 = J_3^0 + M_3 r_3^2.$$

Дифференциальные уравнения движения.

Изгиб каждого упругого звена крана-манипулятора описывается по методу Ритца с помощью одной или двух заданных функций формы с неизвестными коэффициентами, рассматриваемыми как обобщенные координаты.

При двучленной аппроксимации прогиба стержня как консоли в местной связанной системе координат $\xi\eta$ использованы точные решения квазистатической задачи изгиба k -го стержня, удовлетворяющие кинематическим условиям соединения стержней в узлах 0, 1, 2 (см. рис. 1):

$$\begin{aligned} v^{(k)} &= v_k v_k + \vartheta_k \psi_k, \quad k = 1, 2; \\ v_k(\xi) &= 3 \frac{\xi^2}{l_k^2} - 2 \frac{\xi^3}{l_k^3}; \quad \psi_k(\xi) = \frac{\xi^3}{l_k^2} - \frac{\xi^2}{l_k}; \quad (11) \\ v_k(l_k) &= 1; \quad \psi_k(l_k) = 0; \quad v'_k(l_k) = 0; \quad \psi'_k(l_k) = 1. \end{aligned}$$

С учетом выражения (11) потенциальная энергия изгиба k -го стержня

$$\begin{aligned} \Pi_k &= \frac{1}{2} EI_k \int_0^{l_k} (v^{(k)})''^2 d\xi = \\ &= \frac{1}{2} \frac{12EI_k}{l_k^3} \left(v_k^2 - l_k v_k \vartheta_k + \frac{1}{3} l_k^2 \vartheta_k^2 \right). \quad (12) \end{aligned}$$

Потенциальная энергия двух связанных между собой упругих звеньев

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2.$$

С учетом соотношений (3), (6), (9), (4), (7) и (10) выражение для вариации работы инерционных сил рассматриваемой системы в обобщенных координатах $v_1, \vartheta_1, v_2, \vartheta_2$ принимает вид

$$\begin{aligned} -\delta A_{ин} &= -\delta A_{ин}^{(1)} - \delta A_{ин}^{(2)} - \delta A_{ин}^{(3)} = \\ &= L_1 \delta v_1 + L_2 \delta \vartheta_1 + L_3 \delta v_2 + L_4 \delta \vartheta_2, \quad (13) \end{aligned}$$

где L_i — нелинейные дифференциальные операторы заданных функций $x_0(t), y_0(t), \theta_0(t), \theta_1(t), \theta_2(t)$ и неизвестных функций $v_1(t), \vartheta_1(t), v_2(t), \vartheta_2(t), i = 1, 2, 3, 4$; ввиду громоздкости выражения для них не приведены.

С учетом выражений (1), (11)–(13) система дифференциальных уравнений плоского движения и упругих колебаний трехзвенного крана-манипулятора имеет вид

$$\begin{cases} L_1 + \frac{12EI_1}{l_1^3} v_1 - \frac{6EI_1}{l_1^2} \vartheta_1 = 0; \\ L_2 - \frac{6EI_1}{l_1^2} v_1 + \frac{4EI_1}{l_1} \vartheta_1 = 0; \\ L_3 + \frac{12EI_2}{l_2^3} v_2 - \frac{6EI_2}{l_2^2} \vartheta_2 = 0; \\ L_4 - \frac{6EI_2}{l_2^2} v_2 + \frac{4EI_2}{l_2} \vartheta_2 = 0. \end{cases} \quad (14)$$

При одночленной аппроксимации прогиба k -го стержня как консоли в местной связанной системе координат $\xi\eta$ можно использовать выражение

$$v^{(k)} = v_k \alpha_k; \quad \alpha_k(\xi) = \frac{\xi^2}{l_k^2}, \quad k = 1, 2. \quad (15)$$

В этом случае изгибающий момент в k -м стержне принят постоянным, и угол поворота на его конце определяется как

$$\vartheta_k = v_k \frac{2}{l_k}. \quad (16)$$

Здесь обобщенной координатой для k -го стержня будет только $v_k(t)$.

С учетом выражений (15) и (16) потенциальная энергия изгиба k -го стержня

$$\Pi_k = \frac{1}{2} EI_k \int_0^{l_k} (v^{(k)''})^2 d\xi = \frac{1}{2} \frac{4EI_k}{l_k^3} v_k^2. \quad (17)$$

Тогда вместо выражения (13) запишем

$$-\delta A_{\text{ин}} = \left(\tilde{L}_1 + \frac{2}{l_1} \tilde{L}_2 \right) \delta v_1 + \left(\tilde{L}_3 + \frac{2}{l_2} \tilde{L}_4 \right) \delta v_2. \quad (18)$$

С учетом соотношений (1), (16)–(18) система дифференциальных уравнений управляемого движения и сопровождающих упругих колебаний приобретает вид

$$\begin{cases} \tilde{L}_1 + \frac{2}{l_1} \tilde{L}_2 + \frac{4EI_1}{l_1^3} v_1 = 0; \\ \tilde{L}_3 + \frac{2}{l_2} \tilde{L}_4 + \frac{4EI_2}{l_2^3} v_2 = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Численные решения начальных задач с анализом точности и сходимости для системы, состоящей из четырех (14) и двух (19) дифференциальных уравнений, в обобщенных координатах получены с использованием стандартных программ, реализующих методы Адамса, Рунге — Кутты, Булирша — Штера, в программном комплексе компьютерной алгебры РТС Mathcad.

Пример расчета. Проведем численное сравнение результатов интегрирования двух нелинейных систем дифференциальных уравнений второго порядка (14) и (19) на двух модельных примерах расчета.

Во всех примерах расчета программное изменение углов $\theta_0(t)$, $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ взято идентичным и показано на рис. 2:

$$\theta_0(t) = \begin{cases} \theta_{0T} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right) \right] & \text{при } 0 \leq t \leq T; \\ \theta_{0T} & \text{при } t > T; \end{cases}$$

$$\theta_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t < T; \\ \theta_{1T} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\pi \frac{t-T}{T}\right) \right] & \text{при } T \leq t \leq 2T; \\ \theta_{1T} & \text{при } t > 2T; \end{cases}$$

$$\theta_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t < 2T; \\ \theta_{2T} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\pi \frac{t-2T}{T}\right) \right] & \text{при } 2T \leq t \leq 3T; \\ \theta_{2T} & \text{при } t > 3T, \end{cases}$$

где

$$\theta_{0T} = \frac{3\pi}{8}; \quad \theta_{1T} = \frac{\pi}{3}; \quad \theta_{2T} = -\frac{3\pi}{4}; \quad T = 15 \text{ с.}$$

Узел 0 считаем неподвижным, поэтому $x_0(t) = 0$, $y_0(t) = 0$.

Общие для обоих примеров расчета исходные данные: $l_1 = l_2 = 5$ м; $m_1 = m_2 = 5$ кг/м; $r_3 = 2$ м; $M_3 = 600$ кг; $J_3^0 = 100$ кг·м². Численное интегрирование выполнялось по методу Адамса в интервале времени от $t_0 = 0$ до $t_k = 4T = 60$ с, шаг интегрирования — 10^{-4} с.

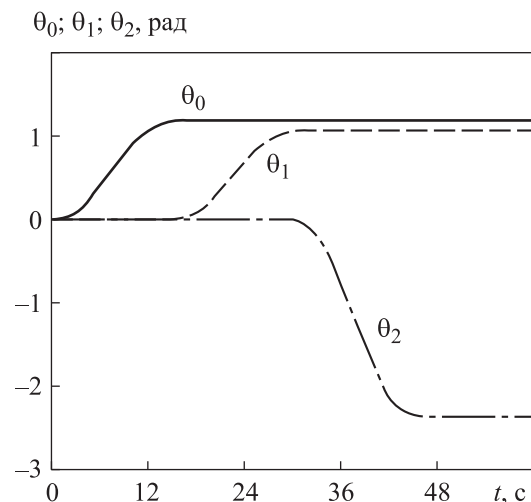


Рис. 2. Изменение во времени t управляемых углов поворота стержней θ_0 , θ_1 и θ_2

В начальном положении стержни и схват находятся в покое и вытянуты вдоль оси x ($\theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = 0$). В первом примере изгибная жесткость обоих упругих звеньев составляла $10^5 \text{ Па}\cdot\text{м}^4$, во втором примере — $EI_1 = EI_2 = 2 \cdot 10^6 \text{ Па}\cdot\text{м}^4$.

Расчетные зависимости прогибов v_1, v_2 и углов поворота ϑ_1, ϑ_2 стержней от времени t при изгибной жесткости $EI_1 = EI_2 = 10^5 \text{ Па}\cdot\text{м}^4$ приведены на рис. 3, а при $EI_1 = EI_2 =$

$2 \cdot 10^6 \text{ Па}\cdot\text{м}^4$ — на рис. 4. Здесь сплошными линиями показаны решения для одночленной аппроксимации прогиба, а штриховыми — для двучленной.

Как видно из рис. 4, в пределах масштабов графиков результаты расчета по одно- и двучленной модели во втором примере (с более жесткими звеньями) практически совпадают. При этом существенно снижаются амплитуды упругих колебаний, и увеличивается их частота.

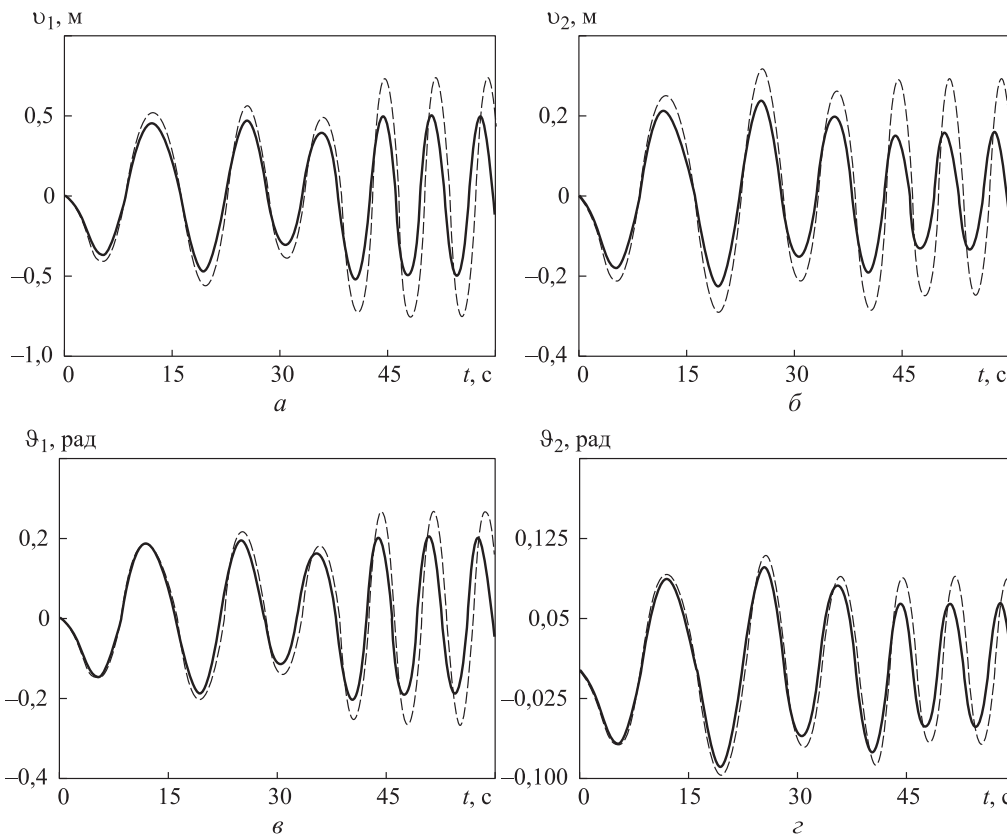


Рис. 3. Расчетные зависимости прогибов v_1 (а), v_2 (б) и углов поворота ϑ_1 (в), ϑ_2 (г) стержней от времени t при изгибной жесткости $EI_1 = EI_2 = 10^5 \text{ Па}\cdot\text{м}^4$

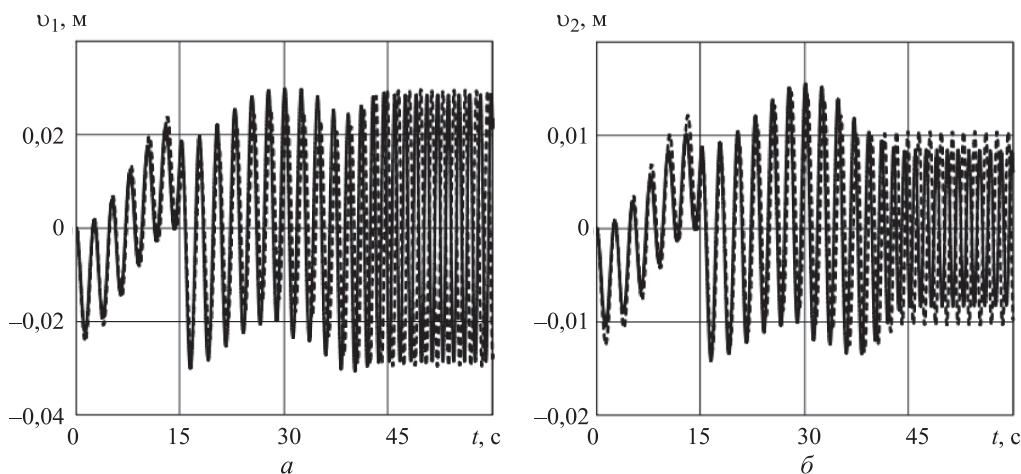


Рис. 4 (начало). Расчетные зависимости прогибов v_1 (а), v_2 (б) и углов поворота ϑ_1 (в), ϑ_2 (г) стержней от времени t при изгибной жесткости $EI_1 = EI_2 = 2 \cdot 10^6 \text{ Па}\cdot\text{м}^4$

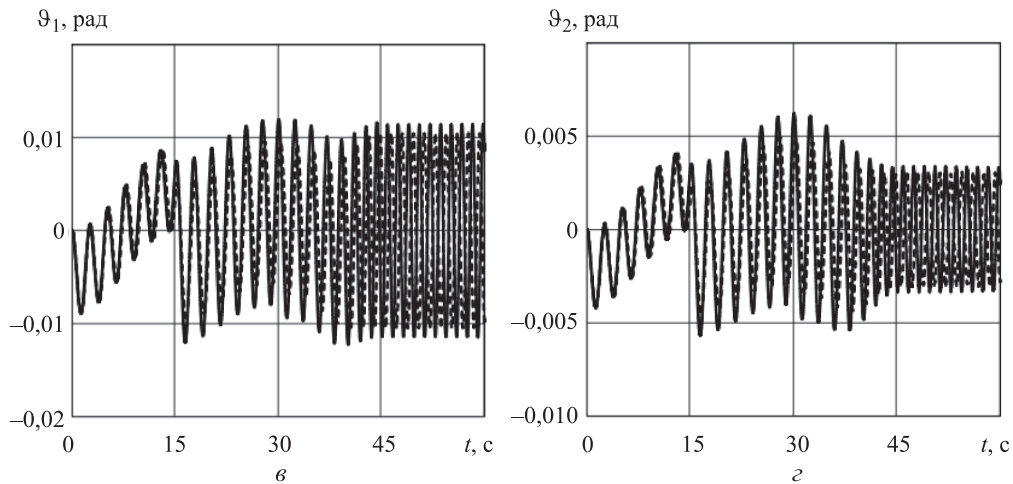


Рис. 4 (окончание). Расчетные зависимости прогибов v_1 (а), v_2 (б) и углов поворота ϑ_1 (в), ϑ_2 (г) стержней от времени t при изгибной жесткости $EI_1 = EI_2 = 2 \cdot 10^6$ Па·м⁴

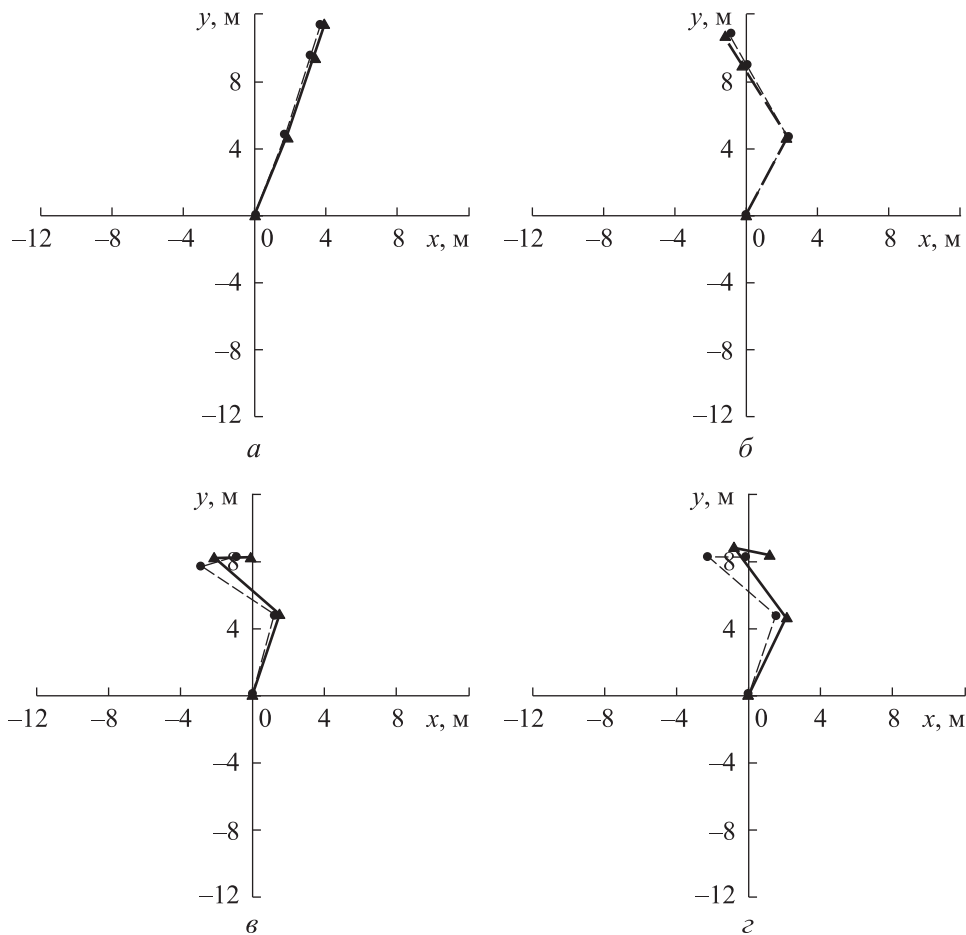


Рис. 5. Формы крана-манипулятора при изгибной жесткости $EI_1 = EI_2 = 10^5$ Па·м⁴ в разные моменты времени:
а — $t = T = 15$ с; б — $t = 2T = 30$ с; в — $t = 3T = 45$ с; г — $t = 4T = 60$ с

Формы крана-манипулятора в различные моменты времени для первого и второго расчетных случаев приведены соответственно на рис. 5 и 6.

Интегрирование по времени системы нелинейных дифференциальных уравнений (19) для одночленной аппроксимации прогиба стержней идет в среднем на 40...70 % быстрее,

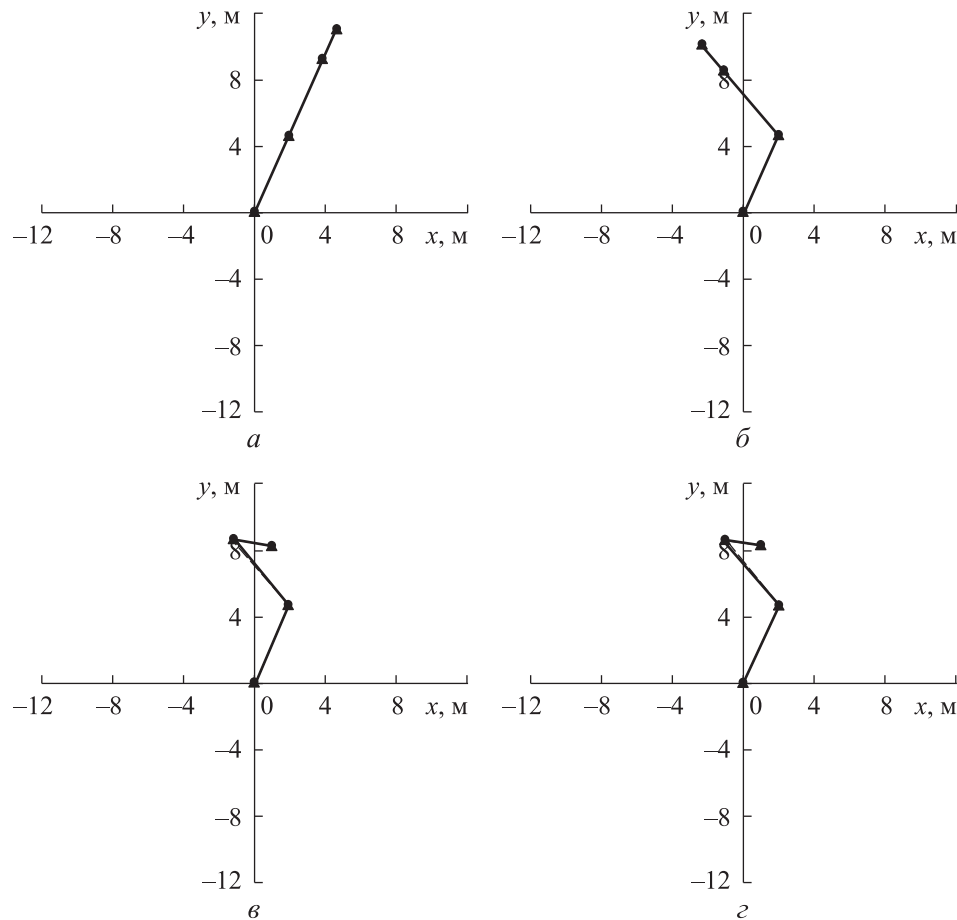


Рис. 6. Формы крана-манипулятора при изгибной жесткости $EI_1 = EI_2 = 2 \cdot 10^6$ Па·м⁴ в разные моменты времени:
 $a - t = T = 15$ с; $б - t = 2T = 30$ с; $в - t = 3T = 45$ с; $г - t = 4T = 60$ с

чем системы (14) для двучленной аппроксимации.

Выводы

1. Разработана математическая модель плоского движения трехзвенного крана-манипулятора типа руки с двумя упругими на изгиб стержневыми звеньями при кинематическом воздействии трех управляемых относительных углов поворота в соединительных шарнирных узлах. Изгиб каждого стержня описан заданными одно- или двучленными функциями

с неизвестными коэффициентами, которые приняты за обобщенные координаты.

2. Выполнены расчеты разворачивания и упругих колебаний системы с использованием четырех и двух дифференциальных уравнений при различных параметрах системы.

3. Показано, что упрощенная двухстепенная модель дает достаточно точные оценки и вполне применима для анализа динамического нагружения и колебаний крана-манипулятора на этапе проектирования системы и выбора ее параметров.

Литература

- [1] Афанасьев И. Начало новой «Эры». *Русский космос*, 2021, № 10, с. 54–57.
- [2] Яскевич А.В., Мирхайдаров В.М., Андреев О.С. Моделирование в реальном времени сборочных операций, выполняемых на МКС манипулятором Era. *Экстремальная робототехника*, 2021, т. 1, № 1, с. 19–29.
- [3] Голубев Ю.Ф., Яскевич А.В., Мирхайдаров В.М. Оценка динамики причаливания на компьютерном стенде моделирования в реальном времени. *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*, 2020, № 84, doi: <https://doi.org/10.20948/prepr-2020-84>

- [4] Сомов Е.И., Бутырин С.А. Наведение и управление свободнолетающим роботом при завершении сближения с пассивным объектом в Дальнем космосе. *Известия Самарского научного центра РАН*, 2017, т. 19, № 4, с. 81–90.
- [5] Тебуева Ф.Б., Петренко В.И., Антонов В.О. и др. Методика определения взаимоположения суставов руки оператора для управления антропоморфным космическим манипулятором. *Экстремальная робототехника*, 2018, т. 1, № 1, с. 69–81.
- [6] Даляев И.Ю., Кузнецова Е.М., Шардыко И.В. Перспектива создания роботизированных сервисных спутников для технического обслуживания и продления сроков активного существования космических аппаратов. *Робототехника и техническая кибернетика*, 2015, № 3, с. 27–31.
- [7] Акуленко Л.Д., Михайлов С.А., Черноусько Ф.Л. Моделирование динамики манипулятора с упругими звеньями. *Известия АН СССР. МТТ*, 1981, № 3, с. 118–124.
- [8] Михайлов С.А., Черноусько Ф.Л. Исследование динамики манипулятора с упругими звеньями. *Известия АН СССР. МТТ*, 1984, № 2, с. 51–58.
- [9] Черноусько Ф.Л. Динамика управляемых движений упругого манипулятора. *Известия АН СССР. Техн. кибернетика*, 1981, № 5, с. 142–152.
- [10] Рахманов Е.В., Стрелков А.Н., Шведов В.Н. Разработка математической модели упругого манипулятора на подвижном основании. *Известия АН СССР. Техн. кибернетика*, 1981, № 4, с. 109–114.
- [11] Гукасян А.А. Исследование управляемых движений упругого манипулятора с тремя степенями подвижности. *Известия АН АрмССР. Механика*, 1983, т. 36, № 3, с. 12–20.
- [12] Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. *Манипуляционные роботы*. Москва, Наука, 1989. 363 с.
- [13] Morris A.S., Madani A. Static and dynamic modelling of a two-flexible-link robot manipulator. *Robotica*, 1996, vol. 14, no. 3, pp. 289–300, doi: <https://doi.org/10.1017/S0263574700019603>
- [14] Гуляев В.И., Завражина Т.В. Динамическое управление плоскими движениями упругого двухзвенного космического робота-манипулятора. *Проблемы управления и информатики*, 1998, № 1, с. 140–154.
- [15] Гуляев В.И., Завражина Т.В. Динамика управляемых движений упругого робота-манипулятора. *Известия АН. МТТ*, 1998, № 5, с. 19–28.
- [16] Гуляев В.И., Завражина Т.В. Динамика робота-манипулятора с упругоподатливыми звеньями и приводными механизмами. *Известия АН. МТТ*, 2003, № 6, с. 18–30.
- [17] Завражина Т.В. Влияние упругой податливости звеньев на динамику и точность позиционирования робота-манипулятора с вращательными и поступательными сочленениями. *Известия АН. МТТ*, 2008, № 6, с. 17–32.
- [18] Лурье А.И. *Аналитическая механика*. Москва, Физматлит, 1961. 824 с.
- [19] Докучаев Л.В. *Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами*. Москва, Машиностроение, 1987. 232 с.
- [20] Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. *Динамика упругих управляемых конструкций*. Москва, Изд-во МАИ, 2007. 328 с.

References

- [1] Afanasyev I. Beginning of new “Era”. *Russkiy kosmos*, 2021, no. 10, pp. 54–57. (In Russ.).
- [2] Yaskevich A.V., Mirkhaydarov V.M., Andreev O.S. Real time simulation of assembly operations executing on ISS by Era robotic arm. *Ekstremalnaya robototekhnika* [Extreme Robotics], 2021, vol. 1, no. 1, pp. 19–29. (In Russ.).
- [3] Golubev Yu.F., Yaskevich A.V., Mirkhaydarov V.M. Berthing dynamic estimation by using real time computer simulator. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha* [KIAM Preprint], 2020, no. 84, doi: <https://doi.org/10.20948/prepr-2020-84> (in Russ.).
- [4] Somov E.I., Butyrin S.A. Guidance and control of free-flying robot during completion of the rendezvous with a passive object in deep space. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra RAN* [Izvestia RAS SamSC], 2017, vol. 19, no. 4, pp. 81–90. (In Russ.).
- [5] Tebueva F.B., Petrenko V.I., Antonov V.O. et al. A method of determining the mutual position of operator's arm joints for anthropomorphic space manipulator control. *Ekstremalnaya robototekhnika* [Extreme Robotics], 2018, vol. 1, no. 1, pp. 69–81. (In Russ.).

- [6] Dalyaev I.Yu., Kuznetsova E.M., Shardyko I.V. Development prospects of robotic service satellites for maintenance purposes and active lifetime extension of spacecraft. *Robototekhnika i tekhnicheskaya kibernetika* [Robotics and Technical Cybernetics], 2015, no. 3, pp. 27–31. (In Russ.).
- [7] Akulenko L.D., Mikhaylov S.A., Chernousko F.L. Modeling of manipulator dynamics with elastic linkages. *Izvestiya AN SSSR. MTT*, 1981, no. 3, pp. 118–124. (In Russ.).
- [8] Mikhaylov S.A., Chernousko F.L. Study on manipulator dynamics with elastic linkages. *Izvestiya AN SSSR. MTT*, 1984, no. 2, pp. 51–58. (In Russ.).
- [9] Chernousko F.L. Dinamika upravlyaemykh dvizheniy uprugogo manipulyatora. *Izvestiya AN SSSR. Tekhn. kibernetika*, 1981, no. 5, pp. 142–152. (In Russ.).
- [10] Rakhmanov E.V., Strelkov A.N., Shvedov V.N. Dynamics of controlled motions of an elastic manipulator. *Izvestiya AN SSSR. Tekhn. kibernetika*, 1981, no. 4, pp. 109–114. (In Russ.).
- [11] Gukasyan A.A. Study on controlled motion of an elastic manipulator with three degrees of freedom. *Izvestiya AN ArmSSR. Mekhakanika*, 1983, vol. 36, no. 3, pp. 12–20. (In Russ.).
- [12] Chernousko F.L., Bolotnik N.N., Gradetskiy V.G. Manipulyatsionnye roboty [Manipulation robots]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 363 p. (In Russ.).
- [13] Morris A.S., Madani A. Static and dynamic modelling of a two-flexible-link robot manipulator. *Robotica*, 1996, vol. 14, no. 3, pp. 289–300, doi: <https://doi.org/10.1017/S0263574700019603>
- [14] Gulyaev V.I., Zavrzhina T.V. Dynamic control of planar motions of an elastic two-link space robot-manipulator. *Problemy upravleniya i informatiki*, 1998, no. 1, pp. 140–154. (In Russ.).
- [15] Gulyaev V.I., Zavrzhina T.V. Controlled motion dynamics of an elastic manipulator robot. *Izvestiya AN. MTT*, 1998, no. 5, pp. 19–28. (In Russ.).
- [16] Gulyaev V.I., Zavrzhina T.V. Dynamics of a robot manipulator with elastic-fit links and drive mechanisms. *Izvestiya AN. MTT*, 2003, no. 6, pp. 18–30. (In Russ.).
- [17] Zavrzhina T.V. Influence of elastic compliance of links on the dynamics and accuracy of a manipulating robot with rotational and translational joints. *Izvestiya AN. MTT*, 2008, no. 6, pp. 17–32. (In Russ.). (Eng. version: *Mech. Solids*, 2008, vol. 43, no. 6, pp. 850–862, doi: <https://doi.org/10.3103/S0025654408060034>)
- [18] Lurye A.I. *Analiticheskaya mekhanika* [Analytic mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1961. 824 p. (In Russ.).
- [19] Dokuchaev L.V. *Nelineynaya dinamika letatelnykh apparatov s deformiruemymi elementami* [Nonlinear dynamics of aircraft with deformable elements]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1987. 232 p. (In Russ.).
- [20] Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N. *Dinamika uprugikh upravlyaemykh konstruksiy* [Dynamics of elastic controlled constructions]. Moscow, Izd-vo MAI Publ., 2007. 328 p. (In Russ.).

Статья поступила в редакцию 14.11.2022

Информация об авторах

РУССКИХ Сергей Владимирович — доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры 602 «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий». ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»; старший научный сотрудник. ФГБН «Институт прикладной механики Российской академии наук» (125040, Москва, Российская Федерация, Ленинградский проспект, д. 7, e-mail: sergey.russkih@rambler.ru).

Information about the authors

RUSSIKIKH Sergey Vladimirovich — Doctor of Science (Physics and Math), Associate Professor, Professor of Department 602 — Design and Durability of Aircraft, Rocket and Space Products. Moscow Aviation Institute (National Research University); Senior Researcher. Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences (125040, Moscow, Russian Federation, Leningradskiy Ave., Bldg. 7, e-mail: sergey.russkih@rambler.ru).

ШКЛЯРЧУК Федор Николаевич — доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник. ФГБУН «Институт прикладной механики Российской академии наук»; профессор кафедры 602 «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий». ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (125993, Москва, Российская Федерация, Волоколамское шоссе, д. 4, e-mail: shklyarchuk@list.ru).

SHKLYARCHUK Fyodor Nikolaevich — Doctor of Science (Eng.), Professor, Chief Researcher. Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences; Professor of Department 602 — Design and Durability of Aviation-Rocket and Space Products. Moscow Aviation Institute (National Research University) (125993, Moscow, Russian Federation, Volokolamskoye Shosse, Bldg. 4, e-mail: shklyarchuk@list.ru).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Динамика плоского движения космического крана-манипулятора типа руки с учетом изгиба звеньев. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2023, № 5, с. 112–122, doi: 10.18698/0536-1044-2023-5-112-122

Please cite this article in English as:

Russkikh S.V., Shklyarchuk F.N. Plane motion dynamics of a space-based crane-manipulator of the arm type taking into account the links' bending. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2023, no. 5, pp. 112–122, doi: 10.18698/0536-1044-2023-5-112-122



**Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
предлагает читателям монографию
«Алгоритмы повышения точности
предпосадочной подготовки беспилотных
летательных аппаратов
авианосного базирования»**

**Авторы: Л. Чжан, К.А. Неусыпин, М.С. Селезнева,
А.В. Пролетарский**

Исследованы алгоритмы обработки информации современных навигационных систем и комплексов беспилотных летательных аппаратов. Представлены наиболее популярные численные критерии степени наблюдаемости, управляемости и идентифицируемости, используемые для определения качественных характеристик моделей. Разработан оригинальный численный критерий степени наблюдаемости переменных состояния одного класса нелинейных моделей с применением SDC-метода. Приведен способ оценки степени управляемости переменных состояния моделей критерия степени наблюдаемости и принципа дуальности. Разработана методика выбора используемого в НК информационного поля и навигационных систем НК для проведения коррекции ИНС с учетом условий функционирования БЛА. Предложены критерии формирования динамической рабочей структуры НК в процессе полета БЛА в меняющейся помеховой обстановке, базирующиеся на анализе оценок дисперсий приведенных измеряемых шумов.

Монография предназначена для специалистов в области навигации и систем управления летательными аппаратами.

По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;
press@bmstu.ru; <https://bmstu.press>