

Машиностроение и машиноведение

УДК 539.42

doi: 10.18698/0536-1044-2023-11-3-11

Построение матриц жесткости объемных конечных элементов методом двойной аппроксимации и верификация программного обеспечения

П.П. Гайджуров

Донской государственный технический университет

Construction of stiffness matrices of volumetric finite elements by the double approximation method and software verification

P.P. Gaidzhurov

Don State Technical University

При численном решении задач теории упругости в трехмерной постановке методом конечных элементов применяются конечные элементы в форме параллелепипедов, призм и тетраэдров. Построение матриц жесткости объемных конечных элементов, как правило, основано на принципе изопараметричности. В расчетной практике наибольшее распространение получили полилинейные изопараметрические конечные элементы с линейным законом аппроксимации геометрических характеристик и перемещений. Главный недостаток таких элементов заключается в так называемом эффекте запирания при моделировании изгибных деформаций. Причем погрешность численного решения существенно возрастает, если конструкция по сравнению с обычными деформациями претерпевает значительные смещения как жесткое целое. Построены (на базе метода двойной аппроксимации) и протестированы объемные полилинейные конечные элементы, позволяющие моделировать поведение конструкций при различных видах внешнего воздействия.

Ключевые слова: метод конечных элементов, метод двойной аппроксимации, объемные конечные элементы, тестирование конечных элементов

Numerical solution to problems of the theory of elasticity in the three-dimensional formulation with the finite element method envisages the finite elements introduction in the form of parallelepipeds, prisms and tetrahedra. As a rule, construction of the volumetric finite elements stiffness matrices is based on the isoparametricity principle. In calculation practice, the so-called multilinear isoparametric finite elements with linear law of the geometric characteristics and displacement approximation are most widely used. The main disadvantage of such elements lies in the locking effect when simulating the flexural deformations. Moreover, the numerical solution error increases significantly, if the structure compared to con-

ventional deformations undergoes significant displacement as a rigid whole. The volumetric multilinear finite elements were constructed (based on the double approximation method) and tested making it possible to simulate the structure behavior under various types of the external influences.

Keywords: finite element method, double approximation method, volumetric finite elements, finite element testing

При конечно-элементном моделировании напряженно-деформированного состояния массивных тел применяются объемные конечные элементы (КЭ) в форме параллелепипедов (гексаэдров), призм и тетраэдров. Построение матриц жесткости объемных КЭ выполняют, как правило, по изопараметрической технологии [1–5].

Вместе с тем известно [6, 7], что полилинейные изопараметрические КЭ при использовании однослойной схемы неудовлетворительно моделируют изгибные деформации даже при существенном сгущении сетки. Это связано с так называемым эффектом запирания КЭ вследствие деформации ложного сдвига [8, 9].

Для «улучшения» изопараметрических КЭ применяют аппарат несовместных элементов, созданных введением дополнительных неузловых степеней свободы или вспомогательных аппроксимирующих полиномов [8].

Наиболее эффективным способом решения проблемы запирания КЭ является использование моментной схемы метода конечных элементов (МКЭ), теоретические основы которой разработаны А.С. Сахаровым [7]. В последующем такой способ получил название метода двойной аппроксимации (МДА) [6]. Концептуально МДА базируется на раздельном представлении функций распределения перемещений и деформаций внутри КЭ.

Рассмотрим семейство объемных КЭ, состоящее из восьми- и шестиузловых элементов,

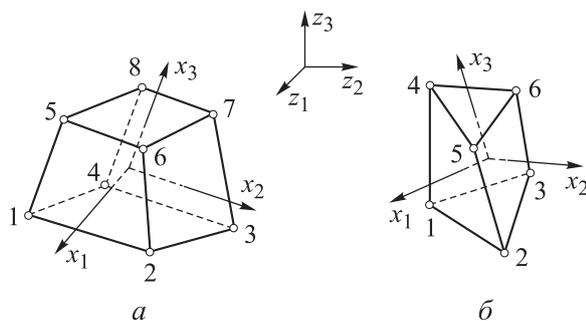


Рис. 1. Схемы восьми- (а) и шестиузловых (б) объемных КЭ

в глобальных декартовых осях z_m , $m = 1, 2, 3$ (рис. 1). Геометрические параметры КЭ z_m и его перемещения u_m представим в следующем виде:

$$z_m = \sum_{k=1}^{n_e} z_m^{(k)} \varphi_k(x_1, x_2, x_3);$$

$$u_m = \sum_{k=1}^{n_e} u_m^{(k)} \varphi_k(x_1, x_2, x_3),$$

где n_e — число узлов КЭ; $z_m^{(k)}$ и $u_m^{(k)}$ — узловые координаты и перемещения КЭ; $\varphi_k(x_1, x_2, x_3)$ — функции формы, представляющие собой произведение одномерных полиномов Лагранжа первой степени; x_1, x_2, x_3 — локальные в общем случае неортогональные координаты КЭ.

Для базового восьмиузловых КЭ (рис. 1, а) $n_e = 8$ выражение для функции формы запишем как

$$\varphi_k(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{8} \prod_{r=1}^3 (1 + p_{rk} x_r), \quad (1)$$

где p_{rk} — координаты узлов в локальных осях.

Координаты узлов в локальных осях p_{rk} зададим в форме матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Зависимость между ковариантными компонентами тензора деформаций в локальном базисе и перемещениями в глобальных осях имеет вид [7]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (z_{mj} u_{mi} + z_{mi} u_{mj}),$$

где

$$z_{ms} = \partial z_m / \partial x_s; \quad u_{ms} = \partial u_m / \partial x_s, \quad s = i, j.$$

Связь между вектором деформаций $\{\varepsilon\}$ и вектором узловых перемещений $\{w\}$ представим в матричной форме

$$\{\varepsilon\} = [D]\{w\}.$$

Здесь $[D]$ — блочная матрица,

$$[D] = \underset{(6 \times n_e)}{[[D]_1 [D]_2 \dots [D]_{n_e}]},$$

где $[D]_k$ — субматрица,

$$[D]_k = \underset{(6 \times 3)}{[\{D^{(1)}\}_k \{D^{(2)}\}_k \{D^{(3)}\}_k]}, \quad k = 1, 2, \dots, n_e.$$

Выражения для векторов-столбцов рассматриваемых КЭ, имеют следующий вид [10]:
для восьмиузлового КЭ (см. рис. 1, а)

$$\{D^{(m)}\}_k = \frac{1}{8} \left\{ \begin{array}{l} p_{1k} [\tilde{z}_{m1} + (\tilde{z}_{m12} + \tilde{z}_{m1} p_{2k}) x_2 + \\ + (\tilde{z}_{m13} + \tilde{z}_{m1} p_{3k}) x_3 + (\tilde{z}_{m123} + \tilde{z}_{m12} p_{3k} + \\ + \tilde{z}_{m13} p_{2k} + \tilde{z}_{m1} p_{2k} p_{3k}) x_2 x_3] \\ \hline p_{2k} [\tilde{z}_{m2} + (\tilde{z}_{m12} + \tilde{z}_{m2} p_{1k}) x_1 + \\ + (\tilde{z}_{m23} + \tilde{z}_{m2} p_{3k}) x_3 + (\tilde{z}_{m123} + \tilde{z}_{m12} p_{3k} + \\ + \tilde{z}_{m23} p_{1k} + \tilde{z}_{m2} p_{1k} p_{3k}) x_1 x_3] \\ \hline p_{3k} [\tilde{z}_{m3} + (\tilde{z}_{m13} + \tilde{z}_{m3} p_{1k}) x_1 + \\ + (\tilde{z}_{m23} + \tilde{z}_{m3} p_{2k}) x_2 + (\tilde{z}_{m123} + \tilde{z}_{m13} p_{2k} + \\ + \tilde{z}_{m23} p_{1k} + \tilde{z}_{m3} p_{1k} p_{2k}) x_1 x_2] \\ \hline \tilde{z}_{m1} p_{2k} + \tilde{z}_{m2} p_{1k} + (\tilde{z}_{m13} p_{2k} + \tilde{z}_{m1} p_{2k} p_{3k} + \\ + \tilde{z}_{m23} p_{1k} + \tilde{z}_{m2} p_{1k} p_{3k}) x_3 \\ \hline \tilde{z}_{m1} p_{3k} + \tilde{z}_{m3} p_{1k} + (\tilde{z}_{m12} p_{3k} + \tilde{z}_{m1} p_{2k} p_{3k} + \\ + \tilde{z}_{m23} p_{1k} + \tilde{z}_{m3} p_{1k} p_{2k}) x_2 \\ \hline \tilde{z}_{m2} p_{3k} + \tilde{z}_{m3} p_{2k} + (\tilde{z}_{m12} p_{3k} + \tilde{z}_{m2} p_{1k} p_{3k} + \\ + \tilde{z}_{m13} p_{2k} + \tilde{z}_{m3} p_{1k} p_{2k}) x_1 \end{array} \right\}; \quad (2)$$

для шестиузлового КЭ (рис. 1, б)

$$\{D^{(m)}\}_k = \frac{1}{8} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{z}_{m1} \tilde{\Phi}_{k1} + (\tilde{z}_{m13} \tilde{\Phi}_{k1} + \tilde{z}_{m1} \tilde{\Phi}_{k13}) x_3 \\ \hline \tilde{z}_{m2} \tilde{\Phi}_{k2} + (\tilde{z}_{m23} \tilde{\Phi}_{k2} + \tilde{z}_{m2} \tilde{\Phi}_{k23}) x_3 \\ \hline \tilde{z}_{m3} \tilde{\Phi}_{k3} + (\tilde{z}_{m13} \tilde{\Phi}_{k3} + \tilde{z}_{m3} \tilde{\Phi}_{k13}) x_1 + \\ + (\tilde{z}_{m23} \tilde{\Phi}_{k3} + \tilde{z}_{m3} \tilde{\Phi}_{k23}) x_2 \\ \hline \tilde{z}_{m1} \tilde{\Phi}_{k2} + \tilde{z}_{m2} \tilde{\Phi}_{k1} + (\tilde{z}_{m13} \tilde{\Phi}_{k2} + \tilde{z}_{m1} \tilde{\Phi}_{k23} + \\ + \tilde{z}_{m23} \tilde{\Phi}_{k1} + \tilde{z}_{m2} \tilde{\Phi}_{k13}) x_3 \\ \hline \tilde{z}_{m1} \tilde{\Phi}_{k3} + \tilde{z}_{m3} \tilde{\Phi}_{k1} \\ \hline \tilde{z}_{m2} \tilde{\Phi}_{k3} + \tilde{z}_{m3} \tilde{\Phi}_{k2} \end{array} \right\}. \quad (3)$$

Здесь

$$\tilde{z}_{m\alpha} = \left. \frac{\partial z_m}{\partial x_\alpha} \right|_{x_1=x_2=x_3=0}, \quad \alpha = 1, 2, 3;$$

$$\tilde{z}_{m123} = \left. \frac{\partial^3 z_m}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} \right|_{x_1=x_2=x_3=0}, \quad \beta = 1, 2, 3;$$

$$\tilde{\Phi}_{k\alpha} = \left. \frac{\partial \tilde{\Phi}_k}{\partial x_\alpha} \right|_{x_1=x_2=x_3=0}; \quad \tilde{\Phi}_{k\alpha\beta} = \left. \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_k}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right|_{x_1=x_2=x_3=0}.$$

Выражения для функций формы $\tilde{\Phi}_k(x_1, x_2, x_3)$ шестиузлового КЭ, полученные на основании полинома (1) с помощью принципа вырождения, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1 &= \frac{1}{8} (1 + p_{11} x_1) (1 + p_{21} x_2) (1 + p_{31} x_3); \\ \tilde{\Phi}_2 &= \frac{1}{8} (1 + p_{12} x_1) (1 + p_{22} x_2) (1 + p_{32} x_3); \\ \tilde{\Phi}_3 &= \frac{1}{8} [(1 + p_{13} x_1) (1 + p_{23} x_2) (1 + p_{33} x_3) + \\ &+ (1 + p_{14} x_1) (1 + p_{24} x_2) (1 + p_{34} x_3)]; \\ \tilde{\Phi}_4 &= \frac{1}{8} (1 + p_{15} x_1) (1 + p_{25} x_2) (1 + p_{35} x_3); \\ \tilde{\Phi}_5 &= \frac{1}{8} (1 + p_{16} x_1) (1 + p_{26} x_2) (1 + p_{36} x_3); \\ \tilde{\Phi}_6 &= \frac{1}{8} [(1 + p_{17} x_1) (1 + p_{27} x_2) (1 + p_{37} x_3) + \\ &+ (1 + p_{18} x_1) (1 + p_{28} x_2) (1 + p_{38} x_3)]. \end{aligned}$$

Формулы (2) и (3) являются основой для построения матриц жесткости рассматриваемых КЭ. Соответствующее программное обеспечение разработано на базе вычислительной платформы Microsoft Visual Studio и компилятора Intel Parallel Studio XE со встроенным текстовым редактором Intel Visual Fortran Composer XE. Процессы хранения и обработки глобальной матрицы жесткости реализованы в терминах разреженных матриц [11]. Для визуализации результатов расчетов использована дескрипторная графика компьютерной системы MATLAB.

Исследование точности и сходимости разработанного конечно-элементного алгоритма выполнено на тестовых примерах, имеющих аналитическое решение. В тестовых примерах приведены численные решения, полученные с применением разработанных объемных КЭ (МДА) и элемента SOLID185 программного комплекса ANSYS Mechanical [5, 12–15]. Далее приведены примеры, подобранные так, чтобы в них изгибные деформации и смещения сочетались как жесткое целое.

Пример 1. Разрезное кольцо, жестко закрепленное в одном сечении и нагруженное сосредоточенной силой на свободном конце. Рас-

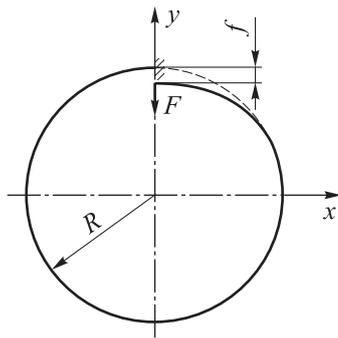


Рис. 2. Расчетная схема разрезного кольца

четная схема разрезного кольца показана на рис. 2. Исходные данные: средний радиус $R = 0,2$ м; размеры поперечного сечения — $0,2 \times 0,2$ см; модуль упругости $E = 10^{11}$ Н/м²; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; сосредоточенная сила $F = 10$ Н; момент инерции $J = 8,333 \cdot 10^{-10}$.

Согласно теории кривых стержней (точное решение) [7], прогиб в точке приложения силы

$$f = \frac{FR^3}{EJ} = \frac{10 \cdot 3,14 \cdot 0,2^3}{1 \cdot 10^{11} \cdot 8,333 \cdot 10^{-10}} = -0,00302 \text{ м.}$$

Результаты исследования сходимости решений для разрезного кольца, полученных с использованием МДА и ANSYS, приведены в таблице, где δ — относительная погрешность.

Поля вертикальных перемещений u_y разрезного кольца, построенные с использованием МДА и ANSYS для сетки $2 \times 2 \times 64$, приведены на рис. 3, а и б. Поле вертикальных перемещений разрезного кольца, смоделированное с помощью ANSYS, не отражает зоны с экстремальным значением $u_y = -0,00314$ м, показанной на рис. 3, а стрелкой.

В первом примере особенно отчетливо прослеживается важность учета жестких смещений.

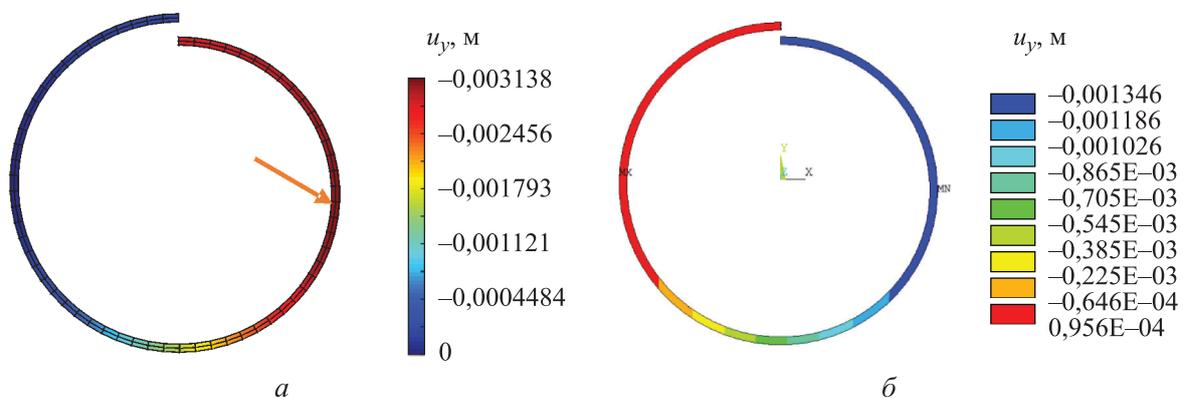


Рис. 3. Поля вертикальных перемещений u_y разрезного кольца, полученные с использованием МДА (а) и ANSYS (б) для сетки $2 \times 2 \times 64$

Результаты исследования сходимости решений для разрезного кольца

Сетка	f/δ , м/%	
	МДА	ANSYS
$2 \times 2 \times 32$	-0,00170/44,0	-0,000433/86
$2 \times 2 \times 64$	-0,00292/3,3	-0,00125/59
$2 \times 2 \times 128$	-0,00293/3,0	-0,00251/17

Пример 2. Квадратная пластина, жестко заземленная по контуру и нагруженная равномерно распределенной нагрузкой. Исходные данные: длина стороны $a = 1$ м; толщина $h = 0,01$ м; модуль упругости $E = 10^5$ Н/м²; коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$.

Точное значение прогиба в центре пластины определяется выражением [16]

$$u_q = \alpha \frac{qa^4}{D},$$

где $\alpha = 0,00126$; q — интенсивность распределенной нагрузки, $q = 0,00888889$ Н/м²; D — цилиндрическая жесткость,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Точное значение u_q (в метрах) равно коэффициенту α .

Рассмотрена одна четвертая часть квадратной пластины с учетом условий симметрии. Результаты исследования сходимости решений в виде графиков $u_q \sim s$ для одно- и двухслойной схем разбивки, полученные с использованием КЭ SOLID185 и МДА, приведены на рис. 4, а и б.

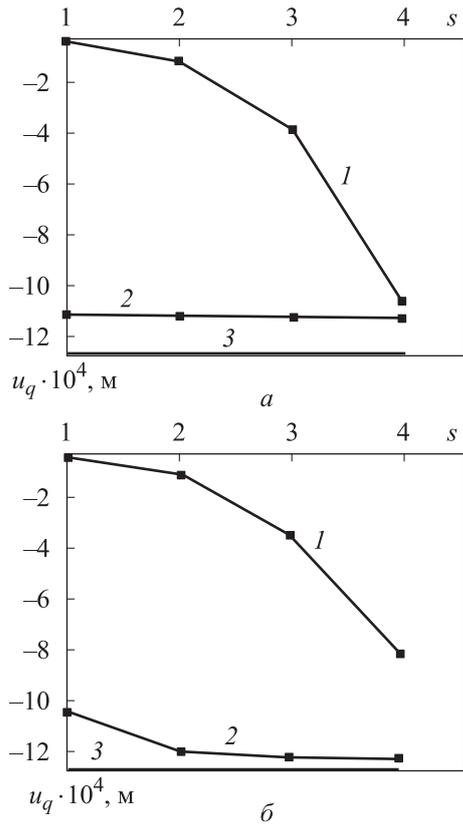


Рис. 4. Результаты исследования сходимости решений, полученных с использованием КЭ SOLID185 (1) и МДА (2), к аналитическому (3) при расчете прогиба u_q одной четвертой части квадратной пластины для одно- (а) и двухслойной (б) схем разбивки

Здесь и далее под слоями подразумевается разбивка пластины на КЭ по толщине. Значения параметра $s = 1, 2, 3$ и 4 соответствуют сеткам $4 \times 4, 8 \times 8, 16 \times 16$ и 32×32 . Для более наглядного представления результатов расчетные точки на рис. 4 соединены линиями.

Анализ полученных графиков показывает, что при однослойной схеме разбивки пластины на сетке 32×32 (см. рис. 4, а) относительная

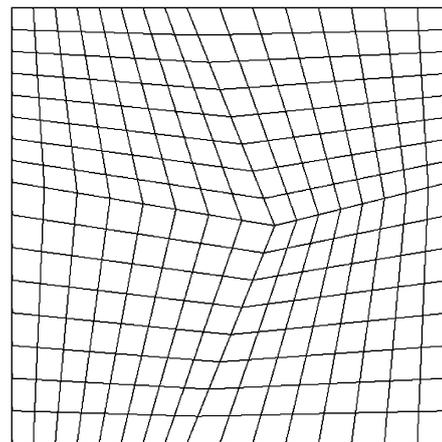


Рис. 5. Схема разбивки квадратной пластины для патч-теста

погрешность расчета прогиба с помощью КЭ SOLID185 и МДА составляет соответственно 16,0 и 10,5 %, а при двухслойной схеме (см. рис. 4, б) — 36,0 и 2,8 %.

Патч-тестирование КЭ выполнено для схемы разбивки $16 \times 16 \times 2$ с искажением сетки (рис. 5).

Результаты патч-теста в виде полей прогиба одной четвертой части квадратной пластины u_z приведены на рис. 6, а и б. Видно, что искажение сетки при использовании КЭ SOLID185 приводит к более заметной асимметрии поля прогиба квадратной пластины u_z , чем при применении МДА. Максимальное значение прогиба пластины для КЭ МДА $u_q = 0,001263$ м совпадает с точным решением.

Пример 3. Круглая пластина, жестко заземленная по контуру и нагруженная равномерно распределенной нагрузкой. Исходные данные: радиус: $R = 1$ м; толщина $h = 0,01$ м; механические константы аналогичны указанным в примере 2.

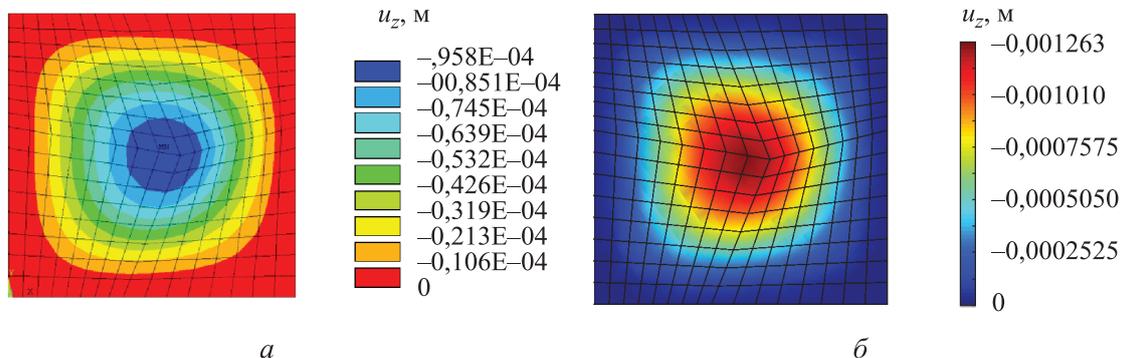


Рис. 6. Поля прогиба одной четвертой части квадратной пластины u_z , полученные с использованием КЭ SOLID185 (а) и МДА (б)

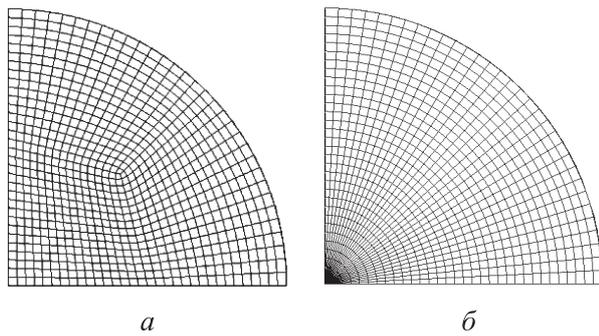


Рис. 7. Первый (а) и второй (б) варианты дискретизации сектора круглой пластины на КЭ

Точное значение прогиба в центре круглой пластины определяется выражением [16]

$$u_q = \frac{1}{64} \frac{q a^4}{D}.$$

При интенсивности распределенной нагрузки $q = 0,00888889 \text{ Н/м}^2$ аналитическое значение прогиба $u_q = 0,01563 \text{ м}$.

В процессе тестирования использованы два варианта дискретизации одной четвертой части

круглой пластины (сектора) на КЭ. В первом варианте три стороны сектора делились на равное число отрезков. Второй вариант базировался на радиальной регулярной схеме разбивки сектора. Число элементов вдоль радиуса и циркульной части сектора принято одинаковым. Рассмотренные варианты дискретизации сектора для сетки 32×32 приведены на рис. 7.

Результаты исследования сходимости решений, полученных с использованием КЭ SOLID185 и МДА, к аналитическому, при расчете прогиба одной четвертой части круглой пластины в виде графиков $u_q \sim s$ для одно- и двухслойной схем разбивки по первому и второму вариантам дискретизации приведены на рис. 8, а и б. Для более наглядного представления результатов расчетные точки на соединены линиями.

Как видно из графиков, элемент, построенный по МДА, на сетке $32 \times 32 \times 2$ для второго варианта имеет относительную погрешность 4 %.

Поля вертикальных перемещений u_z одной четвертой части круглой пластины, полученные

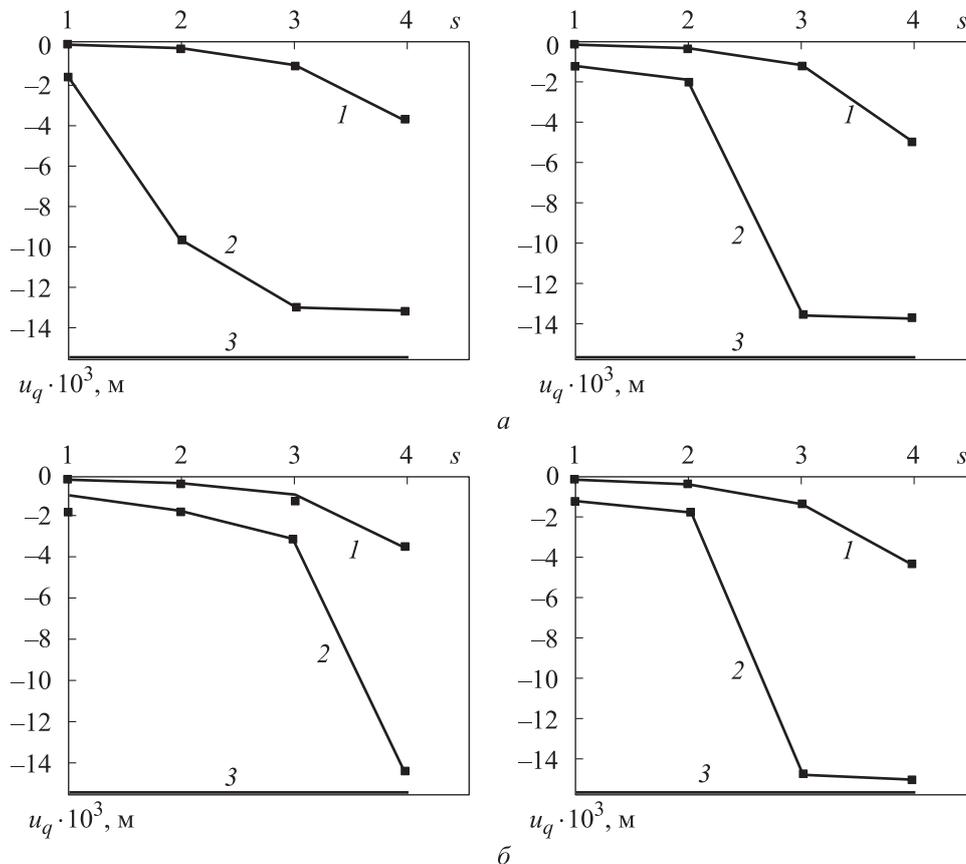


Рис. 8. Результаты исследования сходимости решений, полученных с использованием КЭ SOLID185 (1) и МДА (2), к аналитическому (3), при расчете прогиба одной четвертой части круглой пластины u_q с одно- (а) и двухслойной (б) схемами разбивки по первому (слева) и второму (справа) вариантам

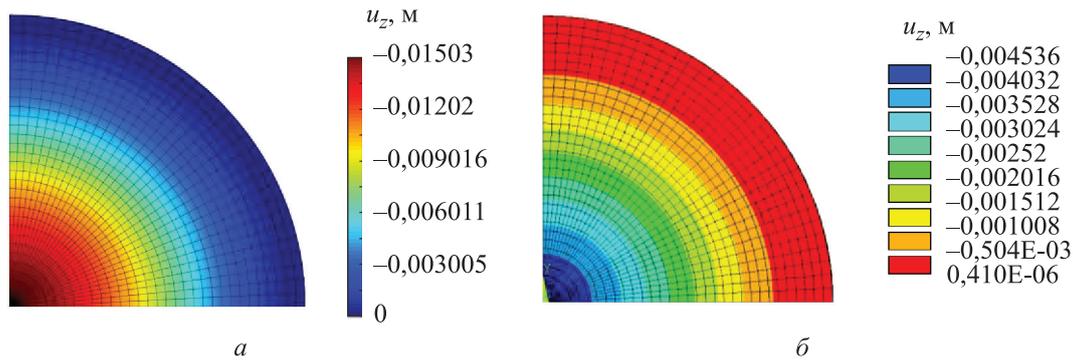


Рис. 9. Поля вертикальных перемещений u_z одной четвертой части круглой пластины, полученные с использованием КЭ МДА (а) и SOLID185 (б) при радиальной схеме разбивки

с использованием КЭ МДА и SOLID185 при радиальной схеме разбивки (сетка $32 \times 32 \times 2$), показаны соответственно на рис. 9, а и б.

Несмотря на качественное совпадение полей u_z , полученных с использованием КЭ МДА и SOLID185, в первом случае относительная погрешность максимального прогиба составляет 3,8 %, во втором — 71,0 %.

Такая значительная погрешность при использовании SOLID185 объясняется тем, что разработчики этого КЭ использовали для аппроксимации геометрических характеристик и перемещений шестиузловой КЭ функции формы, аналогичные таковым для восьмиузловой КЭ, т. е. без принципа вырождения [7].

Выводы

1. Построены и протестированы матрицы жесткости объемных КЭ, позволяющих учитывать смещения как жесткое целое.

2. На тестовых примерах показано, что предлагаемые КЭ успешно конкурируют с КЭ аналогичного типа SOLID185 вычислительного комплекса ANSYS Mechanical.

3. Разработанное математическое обеспечение может быть внедрено в отечественные импортозамещающие программные комплексы, реализующие МКЭ в форме метода перемещений.

Литература

- [1] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element method*. Vol. 1. *The basis*. Butterworth-Heinemann, 2000. 689 p.
- [2] Hutton D.V. *Fundamentals of finite element analysis*. McGraw-Hill, 2004. 494 p.
- [3] Logan D.L. *A first course in the finite element method*. University of Wisconsin-Platteville, 2011. 976 p.
- [4] Секулович М. *Метод конечных элементов*. Москва, Стройиздат, 1993. 664 с.
- [5] Moaveni S. *Finite element analysis*. Prentice Hall, 1999. 527 p.
- [6] Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. *Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций*. Москва, Физматлит, 2006. 392 с.
- [7] Сахаров А.С., Альгенбах И., ред. *Метод конечных элементов в механике твердых тел*. Киев, Вища школа, 1982. 480 с.
- [8] Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. *Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов*. Москва, Высшая школа, 1985. 392 с.
- [9] Еременко С.Ю. *Методы конечных элементов в механике деформируемых тел*. Харьков, Основа, 1991. 272 с.
- [10] Гайджуров П.П. Конечные элементы повышенной точности для решения трехмерных задач теории упругости. *Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки*, 2003, № 1, с. 54–57.
- [11] Писсанецки С. *Технология разреженных матриц*, Москва, Мир, 1988. 410 с.
- [12] Чигарев А.В., Кравчук А.С., Смалюк А.Ф. *ANSYS для инженеров*. Москва, Машиностроение, 2004. 512 с.

- [13] Басов К.А. *ANSYS для конструкторов*. Москва, ДМК Пресс, 2008. 248 с.
- [14] Басов К.А. *ANSYS справочник пользователя*. Москва, ДМК Пресс, 2018. 640 с.
- [15] Морозов Е.М., Муйземнек А.Ю., Шадский А.С. *ANSYS в руках инженера. Механика разрушения*. Москва, URSS, 2008. 453 с.
- [16] Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. *Пластинки и оболочки*. Москва, Наука, 1966. 636 с.

References

- [1] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element method*. Vol. 1. *The basis*. Butterworth-Heinemann, 2000. 689 p.
- [2] Hutton D.V. *Fundamentals of finite element analysis*. McGraw-Hill, 2004. 494 p.
- [3] Logan D.L. *A first course in the finite element method*. University of Wisconsin-Platteville, 2011. 976 p.
- [4] Sekulovich M. *Metod konechnykh elementov* [The finite element method]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1993. 664 p. (In Russ.).
- [5] Moaveni S. *Finite element analysis*. Prentice Hall, 1999. 527 p.
- [6] Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F. *Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruksiy* [The finite element method in statics and dynamics of thin-walled constructions]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 392 p. (In Russ.).
- [7] Sakharov A.S., Altenbakh I., eds. *Metod konechnykh elementov v mekhanike tverdykh tel* [The finite element method in solid mechanics]. Kiev, Vishcha shkola Publ., 1982. 480 p. (In Russ.).
- [8] Obraztsov I.F., Savelyev L.M., Khazanov Kh.S. *Metod konechnykh elementov v zadachakh stroitelnoy mekhaniki letatelnykh apparatov* [The finite element method in problems of structural mechanics of aircraft]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1985. 392 p. (In Russ.).
- [9] Eremenko S.Yu. *Metody konechnykh elementov v mekhanike deformiruemyykh tel* [The finite element method in mechanics of deformable bodies]. Kharkov, Osnova Publ., 1991. 272 p. (In Russ.).
- [10] Gaydzhurov P.P. Finite elements of increased accuracy for the solution of three-dimensional problems of elasticity theory. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Tekhnicheskie nauki* [Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Technical Sciences], 2003, no. 1, pp. 54–57. (In Russ.).
- [11] Pissanetzky S. *Sparse matrix technology*. Academic Press, 1984. 321 p. (Russ. ed.: *Tekhnologiya razrezhennykh matrits*, Moscow, Mir Publ., 1988. 410 p.)
- [12] Chigarev A.V., Kravchuk A.S., Smalyuk A.F. *ANSYS dlya inzhenerov* [ANSYS for engineers]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2004. 512 p. (In Russ.).
- [13] Basov K.A. *ANSYS dlya konstruktorov* [ANSYS for designers]. Moscow, DMK Press Publ., 2008. 248 p. (In Russ.).
- [14] Basov K.A. *ANSYS spravochnik polzovatelya* [ANSYS user guide]. Moscow, DMK Press Publ., 2018. 640 p. (In Russ.).
- [15] Morozov E.M., Muzyemnek A.Yu., Shadskiy A.S. *ANSYS v rukakh inzhenera. Mekhanika razrusheniya* [ANSYS in hands of an engineer. Destruction mechanics]. Moscow, URSS Publ., 2008. 453 p. (In Russ.).
- [16] Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. *Theory of plates and shells*. McGraw-Hill, 1959. 580 p. (Russ. ed.: *Plastinki i obolochki*. Moscow, Nauka Publ., 1966. 636 p.)

Статья поступила в редакцию 06.04.2023

Информация об авторе

ГАЙДЖУРОВ Петр Павлович — доктор технических наук, профессор кафедры «Строительная механика и теория сооружений». Донской государственный технический университет (344003, Ростов-на-Дону, Российская Федерация, пл. Гагарина, д. 1, e-mail: gpp-161@yandex.ru).

Information about the author

GAIDZHUROV Petr Pavlovich — Doctor of Science (Eng.), Professor, Department of Structural Mechanics and Theory of Structures. Don State Technical University (344003, Rostov-on-Don, Russian Federation, Gagarin Sq., Bldg. 1, e-mail: gpp-161@yandex.ru).

Просьба сослаться на эту статью следующим образом:

Гайджуров П.П. Построение матриц жесткости объемных конечных элементов методом двойной аппроксимации и верификация программного обеспечения. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2023, № 11, с. 3–11, doi: 10.18698/0536-1044-2023-11-3-11

Please cite this article in English as:

Gaidzhurov P.P. Construction of stiffness matrices of volumetric finite elements by the double approximation method and software verification. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2023, no. 11, pp. 3–11, doi: 10.18698/0536-1044-2023-11-3-11



**Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
предлагает читателям учебник**

«Теория и проектирование газотурбинных и комбинированных установок»

**Авторы: А.Н. Арбеков, А.Ю. Варакин, В.Л. Иванов,
Э.А. Манушин, В.Д. Моляков, И.Г. Суровцев,
Н.И. Троицкий, Р.З. Тумашев**

Рассмотрены вопросы термодинамической эффективности газотурбинных и комбинированных установок. Изложены основы проектирования стационарных и транспортных газотурбинных и комбинированных установок, газотурбинных установок на нетрадиционных источниках энергии (солнечных, ветровых). Даны примеры проектирования основных элементов авиационных газотурбинных двигателей. Представлены современные тенденции развития стационарных и транспортных газотурбинных установок и газотурбинных двигателей, сформулированы технико-экономические требования, необходимые при проектировании установок различных типов.

В пятом издании (первое — 1977 г.) значительно расширен раздел о парогазовых установках и установках на возобновляемых источниках энергии, добавлен материал по теории и проектированию авиационных двигателей и их применению в энергетических и транспортных установках, а также по использованию в газотурбинных установках вторичных энергоресурсов. Сокращен материал по комбинированным установкам с магнетогидродинамическими генераторами и уменьшен объем материала по установкам периодического сгорания. В пятое издание внесены исправления.

Содержание учебника соответствует курсам лекций, которые авторы читают в МГТУ им. Н.Э. Баумана студентам, обучающимся по специальности «Проектирование авиационных и ракетных двигателей».

Для студентов энергетических и авиационных вузов, а также инженерно-технических работников, занимающихся проектированием стационарных, транспортных и авиационных двигателей и установок.

По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;
press@bmstu.ru; <https://bmstu.press>