

УДК 531.8: 621.01

doi: 10.18698/0536-1044-2023-11-20-28

# Решение задачи о положениях и исследование рабочей зоны плоского кинематически избыточного механизма параллельной структуры\*

П.А. Ларюшкин<sup>1,2</sup>, Е.М. Исполов<sup>3</sup>, А.И. Долгих<sup>1</sup>

<sup>1</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана

<sup>2</sup> ФГБУН ИМАШ РАН им. А.А. Благовраова

<sup>3</sup> ОАО «Завод турбинных лопаток»

## Solving the working area positioning and studying problem in the kinematically redundant parallel structure mechanism

P.A. Laryushkin<sup>1,2</sup>, E.M. Ispolov<sup>3</sup>, A.I. Dolgikh<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Bauman Moscow State Technical University

<sup>2</sup> Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences

<sup>3</sup> JSC Turbine blade plant

Механизмы параллельной структуры находят широкое применение в различных отраслях науки и техники благодаря таким достоинствам, как высокая скорость работы, точность и жесткость, что обуславливает актуальность поиска и анализа новых схем подобных механизмов. Рассмотрен плоский механизм параллельной структуры с четырьмя кинематическими цепями типа PRR и раздвижной платформой. Показано, что он имеет кинематическую избыточность. Для такого механизма аналитически решены прямая и обратная задачи о положениях, а также с применением итерационного подхода исследована рабочая зона. Продемонстрирована принципиальная возможность использования дополнительной подвижности механизма для избегания особых положений.

**Ключевые слова:** механизм параллельной структуры, параллельная кинематика, плоский механизм, кинематическая избыточность, рабочая зона, особые положения

Parallel structure mechanisms are widely used in various branches of science and technology due to such advantages as high operation speed, accuracy and rigidity, which determines relevance of working to find and analyze new schemes for such mechanisms. Flat mechanism with parallel structure, four kinematic chains of the PRR type and a sliding platform was considered. It was shown that it had kinematic redundancy. For such mechanism, the direct and inverse position problems were analytically solved, and the working area was studied using the iterative approach. Fundamental possibility was demonstrated of using the additional mechanism mobility to avoid special situations.

**Keywords:** parallel structure mechanism, parallel kinematics, flat mechanism, kinematic redundancy, working area, special situations

\* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-29-00789, <https://rscf.ru/project/23-29-00789/>.

Механизмы параллельной структуры (МПС) все чаще находят применение в различных областях техники, таких как упаковочно-сортировочное оборудование, станки и устройства для механической обработки, медицинские приспособления и т. п. [1, 2]. По сравнению с механизмами последовательной структуры МПС обладают большей жесткостью, что позволяет использовать их в качестве механических систем перемещения заготовки и инструмента в станочных комплексах [3–7].

Такие многокоординатные комплексы предназначены для механической обработки сложных поверхностей, в том числе лопаток различных турбоагрегатов. Примерами станков с параллельной кинематикой являются модели HexaM 5-Axis, Okuma PM-600, Mikromat 6X, Urahe SX и прототип пятикоординатного станка Tetra, разработанного в МГТУ им. Н.Э. Баумана. Этот прототип построен на двух плоских модулях со структурой 3-PRR, позволяющих путем относительного манипулирования добиться пяти степеней свободы.

У таких механизмов, как правило, выше рабочая скорость и точность позиционирования, чем у аналогов с последовательной кинематикой. Указанные достоинства обеспечивают их успешное применение при манипуляциях небольшими объектами (например, в производстве микроэлектроники) с высокой точностью.

Одним из главных недостатков МПС является наличие так называемых особых положений (ОП) или сингулярностей, где происходит вырождение механизма, а его выходное звено изменяет подвижность [8, 9]. Попадание МПС в ОП является нежелательным, а во многих случаях недопустимым.

Для решения этой проблемы применяют три основных подхода: структурный синтез схем МПС без ОП, введение ограничений на перемещение выходного звена (конструктивно или программно в системе управления) и использование так называемой избыточности. Избыточные МПС, оснащенные дополнительными приводами, могут иметь или не иметь дополнительную подвижность выходного звена.

Первый случай соответствует приводной избыточности, второй — кинематической [10]. Помимо борьбы с ОП механизмы с кинематической избыточностью можно использовать для решения других задач: увеличения размера рабочей зоны или использования дополни-

тельной подвижности для таких вспомогательных операций, как захват объекта.

Цель работы — рассмотреть новую схему плоского МПС с кинематической избыточностью, решить прямую и обратную задачи о положениях и исследовать рабочую зону этого механизма.

В качестве базы рассматриваемого механизма выступали модуль плоского перемещения пятикоординатного станка Tetra и его модифицированный вариант с приводной избыточностью [11, 12].

**Структура механизма.** Рассматриваемый плоский МПС (рис. 1) состоит из четырех кинематических цепей со структурой PRR, где буква «P» обозначает призматическую кинематическую пару (шарнир), «R» — вращательную, а подчеркивание буквы «P» указывает на то, что пара является приводной.

Каждая кинематическая цепь содержит одну призматическую пару (точка  $A_{ij}$ ) и две вращательных (точки  $B_{ij}$  и  $C_{ij}$ ), где  $i = 1, 2$ ;  $j = 1, 2$ . Призматические пары всех цепей имеют общую ось, а оси вращательных шарниров, расположенных на выходном звене, попарно совпадают (точки  $C_i$ ). Выходное звено представляет собой раздвижную платформу, т. е. можно считать, что между кинематическими парами  $C_1$  и  $C_2$  находится дополнительная призматическая пара.

Подвижность механизма можно оценить по известной формуле Чебышева

$$W = 3n - 2p_1 - p_2,$$

где  $n$  — число подвижных звеньев;  $p_1$  и  $p_2$  — число одно- и двухподвижных кинематических пар.

Число подвижных звеньев в рассматриваемом механизме равно десяти: четыре звена  $A_{ij}B_{ij}$ , четыре звена  $B_{ij}C_i$  и две части раздвижной платформы. Количество одноподвижных пар равно тринадцати, так как в точках  $C_1$  и  $C_2$

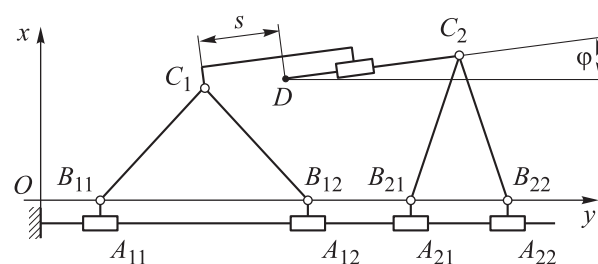


Рис. 1. Схема рассматриваемого плоского МПС

находятся по два вращательных шарнира с совпадающими осями. Двухподвижные пары в механизме отсутствуют.

После подстановки указанных значений в формулу Чебышева получаем

$$W = 3 \cdot 10 - 2 \cdot 13 - 0 = 4.$$

Таким образом, рассматриваемый МПС имеет четыре степени свободы, но может совершать только плоское движение, а значит, является кинематически избыточным. Основные степени свободы механизма — перемещение раздвижной платформы в плоскости  $Oxy$ , описываемое координатами  $x$ ,  $y$  точки  $D$ , и ее поворот вокруг оси, перпендикулярной указанной плоскости, задаваемый углом  $\varphi$ . Этот угол отсчитывают от прямой, параллельной оси  $Ox$  против хода часовой стрелки. Дополнительной степенью свободы будет являться раздвижение платформы, которое можно описать расстоянием  $s$  между точками  $C_1$  и  $D$ .

Параметры  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$  и  $s$  представляют собой так называемые выходные координаты механизма. Входными координатами плоского МПС служат перемещения входных кинематических пар, т. е. координаты  $x_{Aij} = x_{Bij}$ . Решение задачи о положениях подразумевает установление зависимости между входными и выходными координатами, которые позволяют при заданных входных координатах определить выходные (прямая задача) и наоборот (обратная задача).

**Обратная задача о положениях.** Для МПС, в отличие от последовательных механизмов, обратная задача о положениях, как правило, имеет аналитическое решение, поэтому сначала рассмотрим ее.

Для решения обратной задачи о положениях механизма найдем координаты точек  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\begin{aligned} x_{C1} &= x - s \cos \varphi; \quad y_{C1} = y - s \sin \varphi; \\ x_{C2} &= x + l_{C2D} \cos \varphi; \quad y_{C2} = y + l_{C2D} \sin \varphi, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $l_{C2D}$  — длина звена  $C_2D$ .

Рассмотрим пару кинематических цепей с общей осью второго вращательного шарнира отдельно от основного механизма (рис. 2).

Так как длина любого из звеньев  $B_{ij}C_i$  является неизменной, координату  $x_{Aij}$  точки  $A_{ij}$  можно определить как координату точки пересечения оси  $Ox$  и окружности, радиус которой равен длине звена  $B_{ij}C_i$ , а центр находится в точке  $C_i$ . В общем случае имеются две такие точки, а значит, для каждой кинематической

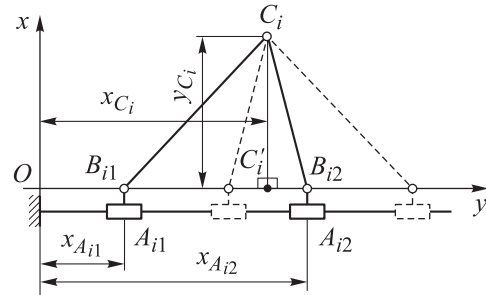


Рис. 2. Расчетная схема двух цепей с общей осью второго вращательного шарнира для решения обратной задачи о положениях плоского МПС

цепи будет существовать два решения обратной задачи о положениях.

Для любого из двух возможных вариантов расположения точки  $A_{ij}$  в отдельной кинематической цепи можно выделить прямоугольный треугольник, гипотенузой которого будет служить звено  $B_{ij}C_i$ , одним из катетов — отрезок, проведенный из точки  $C_i$  до пересечения с осью в некоторой точке  $C'_i$ , а вторым катетом — отрезок  $C'_iB_{ij}$ . При этом для одной цепи решения будут симметричны относительно оси, задаваемой отрезком  $C'_iB_{ij}$  (альтернативные варианты решений показаны штриховыми линиями на рис. 2).

Используя теорему Пифагора для указанных прямоугольных треугольников, запишем

$$\begin{aligned} x_{A_{i1}} &= x_{C_i} \mp \sqrt{l_{B_{i1}C_i}^2 - y_{C_i}^2}; \\ x_{A_{i2}} &= x_{C_i} \pm \sqrt{l_{B_{i2}C_i}^2 - y_{C_i}^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $l_{B_{i1}C_i}$  и  $l_{B_{i2}C_i}$  — длины звеньев  $B_{i1}C_i$  и  $B_{i2}C_i$ .

Знак «минус» или «плюс» перед корнем в выражении (2) определяет выбор решения обратной задачи о положениях для конкретной цепи. При этом каждый из вариантов имеет свои достоинства и недостатки. Так, вариант, изображенный на рис. 2, соответствует знаку «минус» в выражении для  $x_{A_{i1}}$  и знаку «плюс» в выражении для  $x_{A_{i2}}$ . Этот вариант, как и симметричный ему, представляется более удачным для реального применения, так как позволяет получить большую жесткость цепей в вертикальном направлении.

Вариант, при котором обе цепи окажутся с одной стороны от отрезка  $C'_iB_{ij}$ , теоретически может обеспечить большее возможное сближение кареток противопоставленных пар цепей, а значит, увеличить рабочую зону механизма. В частном случае, при котором  $l_{B_{i1}C_i} = l_{B_{i2}C_i}$  выбор решения обратной задачи не имеет прин-

ципального значения, так как треугольник  $B_{i1}C_iB_{i2}$  будет равнобедренным, а решения двух рассматриваемых цепей — эквивалентными.

Подставляя выражение (1) в формулу (2) для каждого  $i$  и  $j$  получаем следующие выражения для решения обратной задачи о положениях для всех цепей:

$$\begin{aligned} x_{A_{i1}} &= x - s \cos \varphi \mp \sqrt{l_{B_{i1}C_i}^2 - (y - s \sin \varphi)^2}; \\ x_{A_{i2}} &= x - s \cos \varphi \pm \sqrt{l_{B_{i2}C_i}^2 - (y - s \sin \varphi)^2}; \\ x_{A_{21}} &= x + l_{C_2D} \cos \varphi \mp \sqrt{l_{B_{21}C_2}^2 - (y + l_{C_2D} \sin \varphi)^2}; \\ x_{A_{22}} &= x + l_{C_2D} \cos \varphi \pm \sqrt{l_{B_{22}C_2}^2 - (y + l_{C_2D} \sin \varphi)^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, выражение (3) является аналитическим решением обратной задачи о положениях плоского МПС.

**Прямая задача о положениях.** Для решения этой задачи также рассмотрим две цепи с общей осью второго вращательного шарнира (рис. 3).

Видно, что для заданного положения точек  $B_{ij}$  точка  $C_i$  может находиться на пересечении двух окружностей с центрами в точках  $B_{ij}$  и радиусами  $l_{B_{i1}C_i}$  и  $l_{B_{i2}C_i}$ . При этом одна из точек пересечения будет располагаться под направляющей, по которой движутся каретки призматических кинематических пар, что в реальном механизме, как правило, невозможно, так как для этого потребуются, чтобы звенья  $B_{ij}C_i$  пересекали его основание. По этой причине такую конфигурацию звеньев (показанную штриховыми линиями на рис. 3) в дальнейшем можно не рассматривать.

Запишем уравнения указанных окружностей в виде системы с учетом того, что  $y_{B_{ij}} = 0$ . Ре-

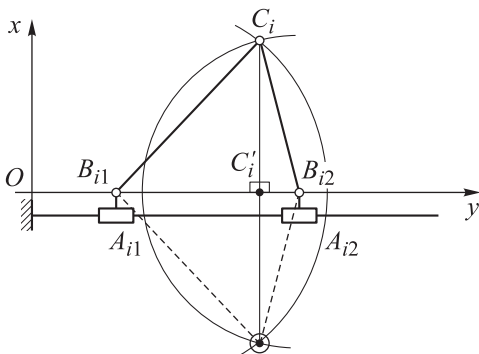


Рис. 3. Расчетная схема двух цепей с общей осью второго вращательного шарнира для решения прямой задачи о положениях плоского МПС

шением этой системы будут искомые координаты точки  $C_i$ :

$$\begin{cases} (x_{C_i} - x_{A_{i1}})^2 + y_{C_i}^2 = l_{B_{i1}C_i}^2; \\ (x_{C_i} - x_{A_{i2}})^2 + y_{C_i}^2 = l_{B_{i2}C_i}^2. \end{cases} \quad (4)$$

После вычитания второго уравнения из первого имеем

$$(x_{C_i} - x_{A_{i1}})^2 - (x_{C_i} - x_{A_{i2}})^2 = l_{B_{i1}C_i}^2 - l_{B_{i2}C_i}^2.$$

Раскрывая скобки, приводя подобные слагаемые и выражая  $x_{C_i}$ , получаем следующую формулу для вычисления этой координаты:

$$x_{C_i} = \frac{l_{B_{i1}C_i}^2 - l_{B_{i2}C_i}^2 - x_{A_{i1}}^2 + x_{A_{i2}}^2}{2(x_{A_{i2}} - x_{A_{i1}})}. \quad (5)$$

После определения  $x_{C_i}$  координату  $y_{C_i}$  можно найти, используя любое из двух уравнений системы (4). В общем виде запишем

$$y_{C_i}^2 = \pm \sqrt{l_{B_{ij}C_i}^2 - (x_{C_i} - x_{A_{ij}})^2}. \quad (6)$$

При этом знак «минус» перед корнем будет означать, что точка  $C_i$  находится ниже основания механизма, что, как уже отмечалось, невозможно.

Используя выражения (5) и (6), можно однозначно (при условии, что точка  $C_i$  находится выше оси  $Ox$ ) определить координаты точек  $C_1$  и  $C_2$ . Это, в свою очередь, позволяет однозначно вычислить выходные координаты механизма.

Сначала найдем расстояние между точками  $C_1$  и  $D$

$$s = l_{C_1C_2} - l_{C_2D}, \quad (7)$$

где

$$l_{C_1C_2} = \sqrt{(x_{C_2} - x_{C_1})^2 + (y_{C_2} - y_{C_1})^2}.$$

Затем рассчитаем угол наклона платформы

$$\varphi = \text{atan2}(y_{C_2} - y_{C_1}, x_{C_2} - x_{C_1}). \quad (8)$$

Функция  $\text{atan2}$  широко распространена в вычислительной математике и программировании, а ее область значений характеризуется интервалом  $(-\pi, \pi]$ , в отличие от классической функции арктангенса с областью значений  $(-\pi/2, \pi/2]$ .

При известных параметрах  $s$  и  $\varphi$  координаты  $x$  и  $y$  можно определить из выражения (1) следующим образом:

$$x = x_{C_i} + s \cos \varphi; \quad y = y_{C_i} + s \sin \varphi. \quad (9)$$

Таким образом, выражения (7)–(9) позволяют решить прямую задачу о положениях для рассматриваемого механизма аналитически,

что для МПС, особенно обладающих тем или иным типом избыточности, является редкостью. Если точки  $C_i$  могут находиться только строго выше оси  $Ox$ , то такое решение — единственное. В противном случае количество теоретических решений этой задачи будет равно четырем.

**Рабочая зона.** Размер и форма рабочей зоны — важнейшие характеристики любого манипуляционного устройства. Для оценки рабочей зоны механизма применяют различные подходы, наиболее простым из которых является итерационный. При его использовании определяют некоторый объем (в общем случае), внутри которого с определенным шагом перебирают точки, в каждой из них проверяют возможность решения обратной задачи о положениях в действительных числах.

Рассмотрим пример анализа рабочей зоны механизма со следующими геометрическими параметрами, м:  $l_{B_{11}C_1} = l_{B_{22}C_2} = 0,25$ ;  $l_{B_{12}C_1} = l_{B_{21}C_2} = 0,18$ ;  $l_{C_2B} = 0,20$ ; пределы перемещения кареток  $[0; 1,50]$ . Перебор проводили с шагом  $0,005$  м по координате  $x$  и  $0,0025$  м по коор-

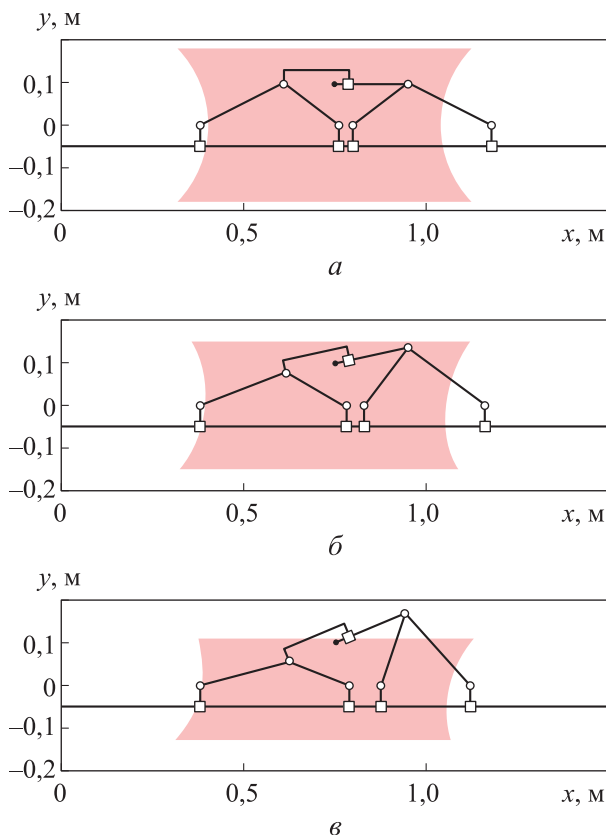


Рис. 4. Рабочие зоны исследуемого МПС при расстоянии  $s = 0,14$  м и угле наклона платформы  $\varphi = 0$  (а),  $10$  (б) и  $20^\circ$  (в)

динате  $y$  при постоянном расстоянии  $s = 0,14$  м и угле наклона платформы  $\varphi = 0, 10$  и  $20^\circ$  (рис. 4). Все расчеты и визуализацию выполняли с использованием системы компьютерной алгебры MATLAB.

Как видно из рис. 4, по габаритным размерам рабочая зона близка к подвижным частям механизма, что является хорошим результатом для МПС данного класса. Форма механизма также является довольно близкой к прямоугольной даже при увеличении угла наклона платформы, что положительно сказывается на потенциальных возможностях его применения.

Следует отметить, что на рис. 4 показана теоретическая рабочая зона без учета конструктивных ограничений, в том числе касающихся возможности расположения звеньев механизма ниже основания.

Как уже отмечалось, одним из главных недостатков МПС является наличие ОП. Несмотря на то, что классическая теория синтеза и анализа плоских рычажных механизмов была достаточно хорошо развита еще в начале второй половины прошлого века [13], ОП плоских МПС можно исследовать только с помощью специально разработанных методов [14].

Воспользуемся методом, основанным на свойствах матрицы Якоби механизма и других матриц, связанных с ней [15].

Запишем уравнения (3) в виде следующих неявных функций (уравнений связи):

$$F_{11} = (x_{A_{11}} - x + s \cos \varphi)^2 + (y - s \sin \varphi)^2 - l_{B_{11}C_1}^2 = 0;$$

$$F_{12} = (x_{A_{12}} - x + s \cos \varphi)^2 + (y - s \sin \varphi)^2 - l_{B_{12}C_1}^2 = 0;$$

$$F_{21} = (x_{A_{21}} - x - l_{C_2D} \cos \varphi)^2 + (y + l_{C_2D} \sin \varphi)^2 - l_{B_{21}C_2}^2 = 0;$$

$$F_{22} = (x_{A_{22}} - x - l_{C_2D} \cos \varphi)^2 + (y + l_{C_2D} \sin \varphi)^2 - l_{B_{22}C_2}^2 = 0.$$

Для анализа ОП будем использовать две матрицы [15]

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{11}}{\partial x} & \frac{\partial F_{11}}{\partial y} & \frac{\partial F_{11}}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_{11}}{\partial s} \\ \frac{\partial F_{12}}{\partial x} & \frac{\partial F_{12}}{\partial y} & \frac{\partial F_{12}}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_{12}}{\partial s} \\ \frac{\partial F_{21}}{\partial x} & \frac{\partial F_{21}}{\partial y} & \frac{\partial F_{21}}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_{21}}{\partial s} \\ \frac{\partial F_{22}}{\partial x} & \frac{\partial F_{22}}{\partial y} & \frac{\partial F_{22}}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_{22}}{\partial s} \end{pmatrix};$$



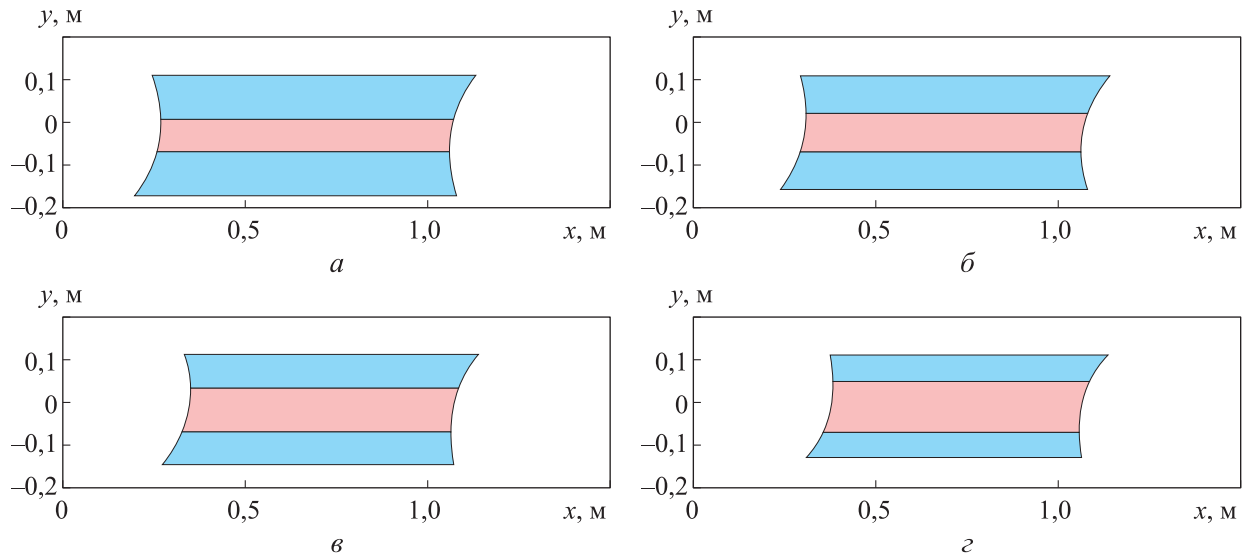


Рис. 5. Рабочие зоны исследуемого механизма с положительным (красный) и отрицательным (синий) значениями определителя матрицы **A** при угле наклона платформы  $\varphi = 20^\circ$  и расстоянии  $s = 0,02$  (а),  $0,06$  (б),  $0,10$  (в) и  $0,14$  м (г)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{11}}{\partial x_{A11}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_{12}}{\partial x_{A12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_{21}}{\partial x_{A21}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F_{22}}{\partial x_{A22}} \end{pmatrix}$$

В зависимости от того, какая из матриц возникает, ОП подразделены на три типа. Для ОП первого типа ( $\det(\mathbf{B}) = 0$ ) характерна потеря степени свободы выходным звеном, для ОП второго типа ( $\det(\mathbf{A}) = 0$ ) — потеря управляемости (неконтролируемая подвижность) выходного звена. Третий тип ОП совмещает свойства двух первых. При этом ОП первого типа почти всегда расположены только на краю теоретической рабочей зоны, а ОП третьего типа встречаются крайне редко. Наибольшую опасность и, соответственно, интерес для МПС представляют ОП второго типа, поэтому рассмотрим именно их.

Для анализа ОП, как и ранее, воспользуемся итерационным подходом. В каждой анализируемой точке рабочей зоны необходимо вычислить определитель матрицы **A**. Если в двух соседних точках знак определителя разный, то между ними существует ОП второго типа.

В качестве примера рассмотрим изменение знака определителя матрицы **A** при угле наклона платформы  $\varphi = 20^\circ$ . Как уже отмечалось, ки-

нематическую избыточность в механизмах такого типа можно применять для избегания ОП. В связи с этим целесообразно проводить итерационный анализ при нескольких значениях расстояния между точками  $C_1$  и  $D$ :  $s = 0,02$ ;  $0,06$ ;  $0,10$  и  $0,14$  м (рис. 5).

Как видно из рисунка, во всех случаях в центре рабочей зоны механизма находится область положительного определителя матрицы **A**, окруженная сверху и снизу областями отрицательных значений определителя матрицы **A**. При этом ширина этой области зависит от расстояния  $s$ . Так, при  $s = 0,02$  м ее ширина составляет  $0,075$  м, а при  $s = 0,14$  м —  $0,12$  м.

Анализ результатов исследования позволяет заключить, что варьирование расстояния  $s$  приводит к изменению конфигурации ОП механизма, что можно использовать для избегания ОП.

## Выводы

1. Предложена новая схема плоского МПС с кинематической избыточностью, заключающейся в возможности изменения длины выходного звена.

2. Аналитическим путем решены прямая и обратная задачи о положениях такого МПС. Показано, что теоретическое максимальное количество решений прямой задачи в действительных числах равно четырём, а обратной — шестнадцати. При этом некоторые решения, вероятно, нельзя реализовать на практике вви-

ду возможной интерференции промежуточных звеньев и основания механизма.

3. С помощью итерационного подхода проанализирована рабочая зона механизма, определены ее форма и размеры. Алгоритм визуализации рабочей зоны реализован в виде прикладной программы в среде MATLAB.

4. Исследованы ОП механизма второго типа по классификации К. Госслена и Х. Анджелеса. Установлено, что использование дополнитель-

ной подвижности механизма позволяет изменять конфигурацию ОП, а значит, эту подвижность можно задействовать для избегания ОП.

5. Темой дальнейших исследований рассмотренного механизма может стать оптимизационный параметрический синтез, т. е. подбор геометрических размеров, позволяющих максимизировать размер рабочей зоны (относительно габаритов МПС), снизить влияние ОП.

## Литература

- [1] Глазунов В.А. *Механизмы параллельной структуры и их применение*. Москва-Ижевск, ИКИ, 2018. 1036 с.
- [2] Merlet J.-P. *Parallel robots*. Springer, 2006. 402 p.
- [3] Pritschow G. Parallel kinematic machines (PKM) — limitations and new solutions. *CIRP Annals*, 2000, vol. 49, no. 1, pp. 275–280, doi: [https://doi.org/10.1016/S0007-8506\(07\)62945-X](https://doi.org/10.1016/S0007-8506(07)62945-X)
- [4] Rosyid A., Stefanini C., El-Khasawneh B. A reconfigurable parallel robot for on-structure machining of large structures. *Robotics*, 2022, vol. 11, no. 5, art. 110, doi: <https://doi.org/10.3390/robotics11050110>
- [5] Saied H., Chemori A., Michelin M. Et al. A redundant parallel robotic machining tool: design, control and real-time experiments. In: *New developments and advances in robot control*. Springer, 2019, pp. 39–79, doi: [https://doi.org/10.1007/978-981-13-2212-9\\_3](https://doi.org/10.1007/978-981-13-2212-9_3)
- [6] Rossi P., Simoni R., Carboni A.P. Analysis of a 4-DOF 3T1R parallel robot for machining applications: a stiffness study. In: *Advances in industrial machines and mechanisms*. Springer, 2021, pp. 161–171, doi: [https://doi.org/10.1007/978-981-16-1769-0\\_15](https://doi.org/10.1007/978-981-16-1769-0_15)
- [7] Briot S., Pashkevich A., Chablat D. Optimal technology-oriented design of parallel robots for high-speed machining applications. *2010 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 2010, pp. 1155–1161, doi: <https://doi.org/10.1109/ROBOT.2010.5509543>
- [8] Liu G., Lou Y., Li Z., Singularities of parallel manipulators: a geometric treatment. *IEEE Trans. Robot. Autom.*, 2003, vol. 19, no. 4, pp. 579–594, doi: <https://doi.org/10.1109/TRA.2003.814507>
- [9] Slavutin M., Shai O., Sheffer A. et al. A novel criterion for singularity analysis of parallel mechanisms. *Mech. Mach. Theory*, 2019, vol. 137, pp. 459–475, doi: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2019.03.001>
- [10] Mostashiri N., Dhupia J., Xu W. Redundancy in parallel robots: a case study of kinematics of a redundantly actuated parallel chewing robot. In: *RITA 2018*. Springer, 2019, pp. 65–78, doi: [https://doi.org/10.1007/978-981-13-8323-6\\_6](https://doi.org/10.1007/978-981-13-8323-6_6)
- [11] Эрастова К.Г., Шиханова Н.В., Комаров Р.А. и др. Исследование конструктивной рабочей зоны плоского лямбда-подобного механизма с учетом особых положений. *Вестник машиностроения*, 2021, № 3, с. 36–40.
- [12] Ларюшкин П.А., Мукабенова Л.Г., Эрастова К.Г. и др. Выбор схемы и решение обратной задачи о положениях для системы позиционирования на базе плоского механизма параллельной структуры. *Наука и образование: научное издание*, 2017, № 7. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=30585854>
- [13] Решетов Л.Н. *Конструирование рациональных механизмов*. Москва, Машиностроение, 1972. 256 с.
- [14] Глазунов В.А., Нгуен Н.Х., Нгуен М.Т. К анализу особых положений механизмов параллельной структуры. *Машиностроение и инженерное образование*, 2009, № 4, с. 11–16.
- [15] Gosselin C., Angeles J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains. *IEEE Trans. Robot. Autom.*, 1990, vol. 6, no. 3, pp. 281–290, doi: <https://doi.org/10.1109/70.56660>

## References

- [1] Glazunov V.A. *Mekhanizmy parallelnoy struktury i ikh primeneniye* [Parallel structure mechanisms and their applications]. Moskva-Izhevsk, IKI Publ., 2018. 1036 p. (In Russ.).
- [2] Merlet J.-P. *Parallel robots*. Springer, 2006. 402 p.
- [3] Pritschow G. Parallel kinematic machines (PKM) — limitations and new solutions. *CIRP Annals*, 2000, vol. 49, no. 1, pp. 275–280, doi: [https://doi.org/10.1016/S0007-8506\(07\)62945-X](https://doi.org/10.1016/S0007-8506(07)62945-X)
- [4] Rosyid A., Stefanini C., El-Khasawneh B. A reconfigurable parallel robot for on-structure machining of large structures. *Robotics*, 2022, vol. 11, no. 5, art. 110, doi: <https://doi.org/10.3390/robotics11050110>
- [5] Saied H., Chemori A., Michelin M. Et al. A redundant parallel robotic machining tool: design, control and real-time experiments. In: *New developments and advances in robot control*. Springer, 2019, pp. 39–79, doi: [https://doi.org/10.1007/978-981-13-2212-9\\_3](https://doi.org/10.1007/978-981-13-2212-9_3)
- [6] Rossi P., Simoni R., Carboni A.P. Analysis of a 4-DOF 3T1R parallel robot for machining applications: a stiffness study. In: *Advances in industrial machines and mechanisms*. Springer, 2021, pp. 161–171, doi: [https://doi.org/10.1007/978-981-16-1769-0\\_15](https://doi.org/10.1007/978-981-16-1769-0_15)
- [7] Briot S., Pashkevich A., Chablat D. Optimal technology-oriented design of parallel robots for high-speed machining applications. *2010 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 2010, pp. 1155–1161, doi: <https://doi.org/10.1109/ROBOT.2010.5509543>
- [8] Liu G., Lou Y., Li Z., Singularities of parallel manipulators: a geometric treatment. *IEEE Trans. Robot. Autom.*, 2003, vol. 19, no. 4, pp. 579–594, doi: <https://doi.org/10.1109/TRA.2003.814507>
- [9] Slavutin M., Shai O., Sheffer A. et al. A novel criterion for singularity analysis of parallel mechanisms. *Mech. Mach. Theory*, 2019, vol. 137, pp. 459–475, doi: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2019.03.001>
- [10] Mostashiri N., Dhupia J., Xu W. Redundancy in parallel robots: a case study of kinematics of a redundantly actuated parallel chewing robot. In: *RITA 2018*. Springer, 2019, pp. 65–78, doi: [https://doi.org/10.1007/978-981-13-8323-6\\_6](https://doi.org/10.1007/978-981-13-8323-6_6)
- [11] Erastova K.G., Shikhanova N.V., Komarov R.A. et al. Workspace of a plane lambda mechanism with singularities. *Vestnik mashinostroeniya*, 2021, no. 3, pp. 36–40. (In Russ.). (Eng. version: *Russ. Engin. Res.*, 2021, vol. 41, no. 6, pp. 498–503, doi: <https://doi.org/10.3103/S1068798X21060058>)
- [12] Laryushkin P.A., Mukabenova L.G., Erastova K.G. et al. Scheme choice and inverse kinematics of a positioning system based on a planar parallel mechanism. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie* [Science and Education: Scientific Publication], 2017, no. 7. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=30585854> (in Russ.).
- [13] Reshetov L.N. *Konstruirovaniye ratsionalnykh mekhanizmov* [Designing rational mechanisms]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1972. 256 p. (In Russ.).
- [14] Glazunov V.A., Nguen N.Kh., Nguen M.T. Singular configuration analysis of the parallel mechanisms. *Mashinostroenie i inzhenernoye obrazovanie*, 2009, no. 4, pp. 11–16. (In Russ.).
- [15] Gosselin C., Angeles J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains. *IEEE Trans. Robot. Autom.*, 1990, vol. 6, no. 3, pp. 281–290, doi: <https://doi.org/10.1109/70.56660>

Статья поступила в редакцию 17.05.2023

## Информация об авторах

**ЛАРЮШКИН Павел Андреевич** — кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Основы конструирования машин». МГТУ им. Н.Э. Баумана; старший научный сотрудник лаборатории теории механизмов и структуры машин. ФГБУН Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук (101000, Москва, Российская Федерация, Малый Харитоньевский переулок, д. 4, e-mail: [pav.and.lar@bmstu.ru](mailto:pav.and.lar@bmstu.ru)).

## Information about the authors

**LARUSHKIN Pavel Andreevich** — Candidate of Science (Eng.), Associate Professor, Department of Machine Design Principles. Bauman Moscow State Technical University; Senior Researcher, Mechanism Theory and Machine Structure Laboratory. Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences (101000, Moscow, Russian Federation, Maliy Kharitonievskiy Lane, Bldg. 4, e-mail: [pav.and.lar@bmstu.ru](mailto:pav.and.lar@bmstu.ru)).



**ИСПОЛОВ Егор Михайлович** — инженер отдела ремонта и технического обслуживания. ОАО «Завод турбинных лопаток» (192019, Санкт-Петербург, Российская Федерация, ул. Седова, д. 11, e-mail: ispolov1989@mail.ru).

**ISPOLOV Egor Michailovich** — Engineer, Repairs and Maintenance Section. JSC Turbine blade plant (192019, Saint-Petersburg, Russian Federation, Sedova St., Bldg. 11, e-mail: ispolov1989@mail.ru).

**ДОЛГИХ Анна Игоревна** — кандидат философских наук, доцент кафедры «Технологии ракетно-космического машиностроения». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: a.dolgikh@bmstu.ru).

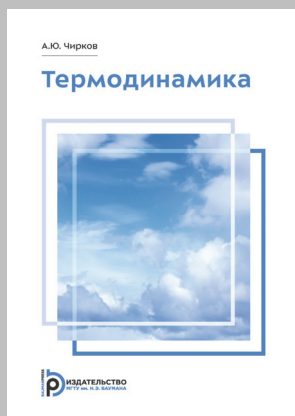
**DOLGIKH Anna Igorevna** — Candidate of Science (Philosophy), Associate Professor, Technology of Rocket and Space Engineering Department. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: a.dolgikh@bmstu.ru).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Ларюшкин П.А., Исполов Е.М., Долгих А.И. Решение задачи о положениях и исследовании рабочей зоны плоского кинематически избыточного механизма параллельной структуры. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2023, № 11, с. 20–28, doi: 10.18698/0536-1044-2023-11-20-28

**Please cite this article in English as:**

Laryushkin P.A., Ispolov E.M., Dolgikh A.I. Solving the working area positioning and studying problem in the kinematically redundant parallel structure mechanism. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2023, no. 11, pp. 20–28, doi: 10.18698/0536-1044-2023-11-20-28



**Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана  
предлагает читателям учебное пособие А.Ю. Чиркова  
«Термодинамика»**

Рассмотрены фундаментальные основы термодинамики и приложения термодинамического анализа к системам различной физической природы (газы, многофазные и многокомпонентные смеси, плазма, электромагнитное поле и др.), к процессам в энергоустановках, преобразователях энергии и природных объектах.

Приведены базовые понятия и законы термодинамики, принципы преобразования теплоты. Описаны подходы к анализу термодинамических циклов, особенности систем при низких и высоких температурах. Рассмотрены вопросы фазового и химического равновесия. Изложены основы линейной неравновесной термодинамики.

Для студентов, изучающих термодинамику как отдельную дисциплину или учебный модуль, а также для лиц, интересующихся теплофизикой, теорией теплофизических свойств веществ, процессами в энергоустановках и общими вопросами энергетики.

**По вопросам приобретения обращайтесь:**

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.  
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;  
press@bmstu.ru; <https://bmstu.press>