

УДК 534.12; 629.78

doi: 10.18698/0536-1044-2023-11-92-103

# Применение метода сил для расчета пространственного движения манипулятора с массивным твердым телом с учетом упругости звеньев и поворотных приводов\*

Т.В. Гришанина<sup>1</sup>, С.В. Русских<sup>1,2</sup>, Ф.Н. Шклярчук<sup>2,1</sup><sup>1</sup> ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»<sup>2</sup> ФГБУН «Институт прикладной механики Российской академии наук»

## Force method application in calculating spatial motion of a manipulator with the massive solid body taking into account the links and rotary drives elasticity

T.V. Grishanina<sup>1</sup>, S.V. Russkikh<sup>1,2</sup>, F.N. Shklyarchuk<sup>2,1</sup><sup>1</sup> Moscow Aviation Institute (National Research University)<sup>2</sup> Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences

Рассмотрена динамика пространственного движения трехзвенного манипулятора, состоящего из двух упругих стержней, работающих на изгиб в вертикальной и боковой плоскостях и на кручение, и присоединенного к ним на конце массивного абсолютно твердого тела (схвата с грузом). Первое звено связано с неподвижным основанием. Между собой звенья соединены шарнирными узлами с заданными (управляемыми) относительными углами поворота. В расчетной модели учтены податливости механизмов приводов по этим углам. Разработана математическая модель нестационарных колебаний системы при произвольном кинематическом воздействии. Деформации стержней приняты малыми (линейными), инерция стержней не учитывалась. Уравнения динамики системы получены по методу сил на основании принципа Кастильяно, причем инерционные силы произвольного твердого тела со схватом заменены неизвестными реакциями в узле крепления. По методу сил построен алгоритм определения упругих перемещений и углов поворота в неподвижной системе координат в точке присоединения тела, и определена матрица податливости, зависящая от времени. Инерционные силы и моменты тела сначала определялись в связанной с телом подвижной системе координат, а затем записывались в исходной неподвижной системе координат с использованием линеаризованных уравнений движения тела при его малых угловых скоростях. В итоге задача сведена к шести дифференциальным уравнениям колебаний твердого тела в неподвижной системе координат с присоединенной к нему упругой стержневой системой переменной структуры. В качестве численного примера решена задача управляемого плоского движения симметричного манипулятора с двумя упругими стержневыми звеньями и переносимым твердым телом с учетом упругих податливостей в шарнирных соединениях. Выполнены сравнения с решением задачи в перемещениях с оценками влияния инерции стержней и податливостей в соединениях.

**Ключевые слова:** манипулятор типа руки, динамика пространственного движения, упругие колебания

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-29-01206).

The paper considers spatial motion dynamics of a three-link manipulator consisting of two elastic rods bending in the vertical and lateral planes and spinning with a massive absolutely rigid body (gripper with a load) attached to them at the end. The first link is connected to a fixed base. The links are connected to each other by the hinged units with the given (controlled) relative rotation angles. Calculation model took into account the mechanism compliance at these angles. Mathematical model of the system non-stationary oscillations under the arbitrary kinematic influence was developed. Rods' deformations were assumed to be insignificant (linear), their inertia was not taken into account. The system dynamics equations were obtained using the force method based on the Castigliano principle, and inertial forces of the arbitrary rigid body with a gripper were replaced by unknown reactions in the fastening unit. Using the force method, an algorithm to determine elastic displacements and rotation angles in the fixed coordinate system at the body attachment point was constructed, and the time-dependent compliance matrix was found. The body inertial forces and moments were first determined in the motion coordinate system associated with the body, and then they were registered in the initial fixed coordinate system using the body motion linearized equations at its low angular velocities. As a result, the problem was reduced to six differential equations of the rigid body oscillations in the fixed coordinate system with the attached to it elastic rod system of variable structure. As a numerical example, the problem of controlled plane motion of a symmetrical manipulator with two elastic rod links and transferred rigid body was solved taking into account elastic compliance in the articulated joints. Comparison was made with solution to the displacement problem estimating the rods inertia influence and compliance in the connections.

**Keywords:** hand-type manipulator, spatial motion dynamics, elastic vibrations

Задачам математического моделирования динамики манипуляционных роботов различного типа и назначения с учетом упругости звеньев посвящено много работ. Космические манипуляторы (КМ), предназначенные для работы в условиях невесомости, способны плавно и медленно перемещать массивные грузы на большие расстояния. Например, манипулятор ERA на Международной космической станции, имеющий два звена в виде тонкостенных стержней общей массой 630 кг, может перемещать восьмитонный груз со скоростью до 10 см/с при точности позиционирования до 5 мм в радиусе до 10 м [1].

Для сборки крупногабаритных космических конструкций, силовым каркасом которых являются регулярные фермы, образованные большим количеством однотипных элементов, требуются КМ, способные выполнять однотипные быстрые операции с высокой точностью позиционирования и устранением упругих колебаний после каждой операции [2, 3].

Подходы и методы моделирования динамики КМ с упругими звеньями рассмотрены в работах [4–8]. Многие из этих методов описаны и реализованы на примерах в публикациях [9, 10]. В монографии [10] подробно рассмотрена динамика пространственного движения КМ с двумя упругими звеньями в виде стержней, работающих на растяжение–сжатие, изгиб в

двух плоскостях и кручение при допущении, что масса звеньев пренебрежимо мала по сравнению с таковой перемещаемого груза.

В трудах [11–14] для системы упругих стержней, моделирующих многозвенные КМ, предложен подход, основанный на численном решении по методу конечных разностей связанной системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих продольные, поперечные в двух плоскостях и крутильные колебания стержней с учетом их кинематических и динамических условий сопряжения в подвижных соединениях.

В работе [15] для построения математической модели плоского движения трехзвенного КМ получено решение в перемещениях, приводящее к достаточно громоздким дифференциальным уравнениям.

Цель работы — построение уравнений динамики пространственного и плоского движения КМ с помощью метода сил, основанного на принципе Кастильяно.

**Постановка задачи.** Рассмотрим трехзвенный КМ типа руки, трехмерная модель которого приведена на рис. 1, где его упругие звенья показаны в недеформированном состоянии. Первые два звена КМ ( $k = 1, 2$ ) будем рассматривать как стержни постоянного поперечного сечения длиной  $l_k$ , работающие на изгиб в вертикаль-

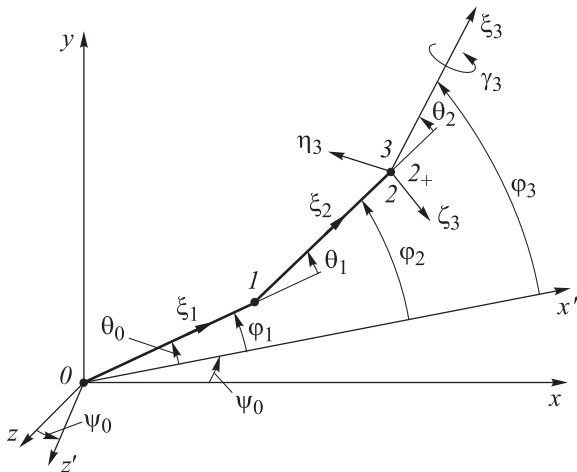


Рис. 1. Трехмерная модель трехзвенного КМ типа руки

ной и боковой плоскостях с изгибной постоянной жесткостью  $EI_k = \text{const}$  и на кручение с жесткостью  $GJ_k = \text{const}$ . Третье звено ( $k = 3$ ) — схват с грузом — считаем массивным абсолютно твердым телом (ТТ).

Звенья связаны между собой в точках 1, 2 и в точке 0 с неподвижным основанием шарнирами с управляемыми углами поворота. Система трансформируется так, что эти три точки в программном движении недеформируемой системы остаются в одной плоскости  $x'y'$ . С каждым  $k$ -м звеном связана подвижная система координат  $\xi_k \eta_k \zeta_k$ .

Для первого и второго звеньев ось  $\xi_k$  направлена по оси  $k$ -го стержня, а оси  $\eta_k$  и  $\zeta_k$  лежат в вертикальной и боковой плоскостях. Для ТТ начало осей  $\xi_3, \eta_3, \zeta_3$  помещаем в узле 2 в точке  $2_+$ , принадлежащей ТТ 3, которую далее отмечаем как точку 3 ( $2_+ \rightarrow 3$ ), а направление оси  $\xi_3$  выбираем так, чтобы она оставалась в плоскости  $x'y'$  и была осью цилиндрического шарнира, расположенного в ТТ.

Управляемое (программное) движение КМ во времени  $t$  характеризуют пять углов поворота:  $\psi_0(t)$  — угол поворота системы в целом в нулевом узле относительно вертикальной оси  $y$ ;  $\theta_0(t), \theta_1(t)$  и  $\theta_2(t)$  — относительные углы поворота первого, второго и третьего звеньев в шарнирных узлах 0, 1, 2 в вертикальной плоскости  $x'y'$ ;  $\gamma_3(t)$  — угол поворота ТТ в цилиндрическом шарнире, ось которого совпадает с осью  $\xi_3$ . В общем случае будем учитывать упругие податливости механизмов приводов по этим углам.

Считаем, что программное движение манипулятора, обусловленное этими углами поворо-

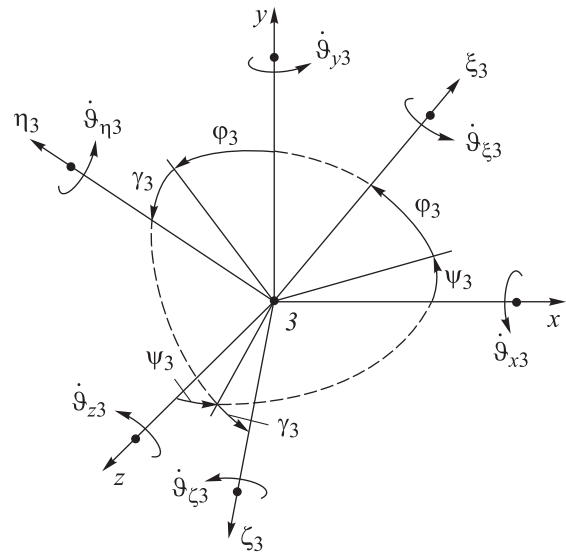


Рис. 2. Модель системы самолетных углов для ТТ

та, является достаточно плавным и медленным, что характерно для КМ. Поэтому инерционными силами тонких упругих звеньев  $k = 1, 2$  в таком движении будем пренебрегать.

Пространственное поступательно-вращательное движение ТТ в связанных с ним осях  $\xi_3, \eta_3, \zeta_3$  с началом в узле  $2_+ \rightarrow 3$  будем описывать, используя самолетные углы рыскания  $\psi$ , тангажа  $\phi$  и крена  $\gamma$  (рис. 2). Для ТТ эти углы обозначим как  $\psi_3, \phi_3, \gamma_3$ , причем  $\psi_3 = \psi_0, \phi_1 = \theta_0, \phi_2 = \theta_0 + \theta_1, \phi_3 = \theta_0 + \theta_1 + \theta_2$  (см. рис. 1).

Матрицу преобразования от системы неподвижных осей  $x, y, z$  к системе подвижных осей  $\xi, \eta, \zeta$ , т. е.  $[\xi \eta \zeta]^T = \Lambda[x y z]^T$  запишем в следующем виде [16]:

$$\Lambda(\psi, \phi, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi & \sin \phi & -\sin \psi \cos \phi \\ \Phi 1 & \cos \phi \cos \gamma & \Phi 2 \\ \Phi 3 & -\cos \phi \sin \gamma & \Phi 4 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi 1 &= \sin \psi \sin \gamma - \cos \psi \sin \phi \cos \gamma; \\ \Phi 2 &= \cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \phi \cos \gamma; \\ \Phi 3 &= \sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \phi \sin \gamma; \\ \Phi 4 &= \cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \phi \sin \gamma. \end{aligned}$$

Матрица (1) является ортогональной и обладает свойством  $\Lambda^{-1} = \Lambda^T$ .

Координаты первого и второго узлов в переносном (программном) движении кинематически трансформируемой недеформируемой системы (отмечены верхним индексом «0»):

$$\begin{aligned} x_1^0 &= l_1 \cos \psi_0 \cos \varphi_1; y_1^0 = l_1 \sin \varphi_1; \\ z_1^0 &= -l_1 \sin \psi_0 \cos \varphi_1; x_2^0 = x_1^0 + l_2 \cos \psi_0 \cos \varphi_2; \quad (2) \\ y_2^0 &= y_1^0 + l_2 \sin \varphi_2; z_2^0 = z_1^0 - l_2 \sin \psi_0 \cos \varphi_2. \end{aligned}$$

Углы поворота ТТ трансформируемой недеформируемой системы относительно неподвижных осей  $x, y, z$  можно определить следующим образом:

$$\vartheta_{x3}^0 = \gamma_3; \vartheta_{y3}^0 = \psi_3 = \psi_0; \vartheta_{z3}^0 = \theta_0 + \theta_1 + \theta_2. \quad (3)$$

При нестационарном переносном движении системы с массивным ТТ возникает относительное движение в виде упругих колебаний вследствие деформирования первого и второго упругих звеньев и угловых податливостей элементов приводов, приведенных к узлам 0, 1, 2. Эти колебания создают повышенные динамические нагрузки и затрудняют позиционирование перемещаемого ТТ после окончания операции. Для расчета малых нестационарных колебаний рассматриваемой трансформируемой системы с безынерционными упругими стержневыми звеньями предлагается использовать метод сил.

**Уравнения квазистатического деформирования системы.** Инерционные силы и моменты, действующие на ТТ при пространственном движении КМ, заменим неизвестными сосредоточенными силами и моментами, приведенными к точке крепления ТТ со вторым стержневым звеном.

Эти силы и моменты запишем в проекциях на неподвижные оси  $x, y, z$  и обозначим как  $X_2, Y_2, Z_2$  и  $L_{x3}, L_{y3}, L_{z3}$  (рис. 3). Будем учитывать упругие деформации первого и второго стержневых звеньев при изгибе в вертикальной и боковой плоскостях и кручении, а также угловые податливости приводов по управляемым углам поворота в узлах  $\psi_0, \theta_0, \theta_1, \theta_2, \gamma_3$ .

Коэффициенты податливости, обусловленные местными и контактными упругими деформациями элементов механизмов приводов, определяют экспериментально. Для этого к зафиксированному по углу поворота узлу через соединенное с ним звено прикладывают момент и измеряют угол поворота звена. Отношение приложенного момента к измеренному углу поворота  $\vartheta$  представляет коэффициент угловой жесткости привода в этом узле  $c_\vartheta$ , обратную величину  $c_\vartheta^{-1}$  — коэффициент упругой податливости.

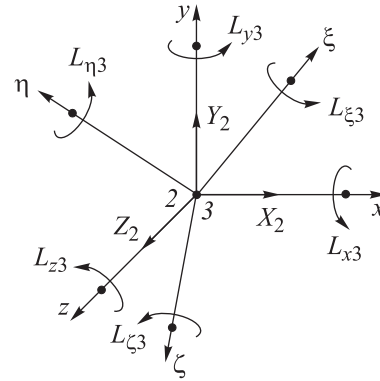


Рис. 3. Модель инерционных сил и моментов, действующих на ТТ

В линейном приближении метода сил изгибающие и крутящие моменты в первом, втором стержнях и поворотных узлах определяют с использованием геометрических параметров трансформируемой (для данного момента времени) недеформированной системы. Далее точку 2+ шарнирного узла 2, принадлежащую ТТ 3, будем обозначать цифрой 3 (т. е. точку 3 совмещаем с точкой 2+).

Моменты в нулевом, первом и втором узлах

$$\begin{bmatrix} L_{xk} \\ L_{yk} \\ L_{zk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{x3} \\ L_{y3} \\ L_{z3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Y_2(z_2^0 - z_k^0) + Z_2(y_2^0 - y_k^0) \\ X_2(z_2^0 - z_k^0) - Z_2(x_2^0 - x_k^0) \\ -X_2(y_2^0 - y_k^0) + Y_2(x_2^0 - x_k^0) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Моменты в произвольной точке  $\bar{\xi}_k, \eta_k = \zeta_k = 0$  на оси  $k$ -го звена

$$\begin{aligned} L_x(\bar{\xi}_k) &= L_{xk-1} \left( 1 - \frac{\bar{\xi}_k}{l_k} \right) + L_{xk} \frac{\bar{\xi}_k}{l_k}, \\ 0 &\leq \bar{\xi}_k \leq l_k, \quad k = 1, 2; \\ \dots &\dots \dots \dots \dots; \\ (x \rightarrow y \rightarrow z), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\bar{\xi}_k$  — текущая координата произвольной точки на оси  $\xi_k$  в промежутке  $0 \leq \bar{\xi}_k \leq l_k$ .

Крутящий момент  $M_\xi(\bar{\xi}_k)$ , изгибающий момент в боковой плоскости  $M_\eta(\bar{\xi}_k)$  и изгибающий момент в вертикальной плоскости  $M_\zeta(\bar{\xi}_k)$  в поперечном сечении  $k$ -го стержня определяем с помощью матрицы преобразования (1) следующим образом:

$$\begin{bmatrix} M_\xi(\bar{\xi}_k) \\ M_\eta(\bar{\xi}_k) \\ M_\zeta(\bar{\xi}_k) \end{bmatrix} = \Lambda_k \begin{bmatrix} L_x(\bar{\xi}_k) \\ L_y(\bar{\xi}_k) \\ L_z(\bar{\xi}_k) \end{bmatrix};$$

$$\Lambda_k = \Lambda(\psi = \psi_0, \varphi = \varphi_k, \gamma = 0), \quad k = 1, 2. \quad (6)$$

Запишем потенциальную энергию деформации системы в силах. Потенциальная энергия кручения и изгиба в боковой и вертикальной плоскостях  $k$ -го стержневого звена

$$\Pi_k = \frac{1}{2} \int_0^{l_k} \left[ \frac{M_{\xi}^2(\bar{\xi}_k)}{GJ_k} + \frac{M_{\eta}^2(\bar{\xi}_k)}{EI_k} + \frac{M_{\zeta}^2(\bar{\xi}_k)}{EI_k} \right] d\bar{\xi}_k, \quad (7)$$

$k = 1, 2.$

При углах  $\theta_0 = \varphi_0$ ,  $\theta_1 = \varphi_2 - \varphi_1$ ,  $\theta_2 = \varphi_3 - \varphi_2$  потенциальная энергия упругих податливостей в узлах по углам поворота  $\psi_0$ ,  $\theta_0$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  и  $\gamma_3$  имеет вид

$$\Pi_* = \frac{1}{2} \left[ c_{\psi_0}^{-1} L_{y_0}^2 + c_{\theta_0}^{-1} M_{\xi}^2(\bar{\xi}_1 = 0) + c_{\theta_1}^{-1} M_{\xi}^2(\bar{\xi}_1 = l_1) + c_{\theta_2}^{-1} M_{\xi}^2(\bar{\xi}_2 = l_2) + c_{\gamma_3}^{-1} M_{\xi}^2(\bar{\xi}_3 = 0) \right]. \quad (8)$$

В итоге потенциальную энергию деформации стержней и угловых податливостей в поворотных узлах

$$\Pi = \sum_{k=1}^2 \Pi_k + \Pi_*$$

с учетом выражений (4)–(8) после вычисления интегралов (7) можно записать в виде квадратичной формы сил  $X_2$ ,  $Y_2$ ,  $Z_2$  и моментов  $L_{x_3}$ ,  $L_{y_3}$ ,  $L_{z_3}$ , приложенных к ТТ в точке  $2_+ \rightarrow 3$ .

Уравнения квазистатического деформирования упругой системы под действием инерционных сил и сил тяжести массивного ТТ получаем на основании принципа Кастильяно, который в рассматриваемом случае запишем в матричном виде

$$\delta \Pi - \delta \mathbf{R}_2^T (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2^0) - \delta \mathbf{L}_3^T (\boldsymbol{\chi}_3 - \boldsymbol{\chi}_3^0) = 0. \quad (9)$$

Здесь

$$\Pi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2^T & \mathbf{L}_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{RR} & \Gamma_{RL} \\ \Gamma_{LR} & \Gamma_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{L}_3 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{R}_2 = [X_2 \quad Y_2 \quad Z_2]^T; \quad \mathbf{r}_2 = [x_2 \quad y_2 \quad z_2]^T;$$

$$\mathbf{r}_2^0 = [x_2^0 \quad y_2^0 \quad z_2^0]^T; \quad \mathbf{L}_3 = [L_{x_3} \quad L_{y_3} \quad L_{z_3}]^T;$$

$$\boldsymbol{\chi}_3 = [\vartheta_{x_3} \quad \vartheta_{y_3} \quad \vartheta_{z_3}]^T; \quad \boldsymbol{\chi}_3^0 = [\vartheta_{x_3}^0 \quad \vartheta_{y_3}^0 \quad \vartheta_{z_3}^0]^T,$$

где  $\Gamma_{RR}$ ,  $\Gamma_{RL}$ ,  $\Gamma_{LR} = \Gamma_{RL}^T$ ,  $\Gamma_{LL}$  — блоки третьего порядка, представляющие собой симметричную матрицу податливости упругой трансформируемой системы в рассматриваемый момент времени.

Из вариационного уравнения (9) с произвольными независимыми вариациями  $\delta \mathbf{R}_2$  и  $\delta \mathbf{L}_3$  получаем систему двух матричных уравнений

$$\begin{aligned} \Gamma_{RR} \mathbf{R}_2 + \Gamma_{RL} \mathbf{L}_3 &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2^0; \\ \Gamma_{RL}^T \mathbf{R}_2 + \Gamma_{LL} \mathbf{L}_3 &= \boldsymbol{\chi}_3 - \boldsymbol{\chi}_3^0 \end{aligned} \quad (10)$$

для неизвестных векторов сил  $\mathbf{R}_2$  и моментов  $\mathbf{L}_3$  и векторов перемещений  $\mathbf{r}_2$  и углов поворота  $\boldsymbol{\chi}_3$ . Векторы перемещений  $\mathbf{r}_2^0$  и углов поворота  $\boldsymbol{\chi}_3^0$  недеформируемой системы определяются по формулам (2) и (3).

**Уравнения пространственного движения.** Рассмотрим пространственное движение произвольного ТТ (звена 3 КМ), которое соединено со стержнем 2 в точке  $2_+$ . Эту точку принимаем за начало связанной с телом подвижной системы координат и указываем как точку 3.

Общие нелинейные уравнения поступательно-вращательного движения ТТ в связанной с ним системе координат  $\xi_3 \eta_3 \zeta_3$  запишем, пренебрегая нелинейными членами, содержащими угловые скорости [16], в виде

$$m_3 \dot{\mathbf{v}}_3 - \mathbf{S}_3^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_3 + \mathbf{P}_3 = 0; \quad -\mathbf{S}_3^T \dot{\mathbf{v}}_3 + \mathbf{J}_3 \dot{\boldsymbol{\omega}}_3 + \mathbf{M}_3 = 0, \quad (11)$$

где  $\mathbf{P}_3$  и  $\mathbf{M}_3$  — векторы сил и моментов;

$$m_3 = \int_{V_3} dm; \quad \dot{\mathbf{v}}_3 = [\dot{v}_{\xi_3} \quad \dot{v}_{\eta_3} \quad \dot{v}_{\zeta_3}]^T;$$

$$\mathbf{S}_3 = \int_{V_3} \begin{bmatrix} 0 & -\zeta_3 & \eta_3 \\ \zeta_3 & 0 & -\xi_3 \\ -\eta_3 & \xi_3 & 0 \end{bmatrix} dm;$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_3 = [\dot{\omega}_{\xi_3} \quad \dot{\omega}_{\eta_3} \quad \dot{\omega}_{\zeta_3}]^T;$$

$$\mathbf{J}_3 = \int_{V_3} \begin{bmatrix} \eta_3^2 + \zeta_3^2 & -\xi_3 \eta_3 & -\xi_3 \zeta_3 \\ -\eta_3 \xi_3 & \xi_3^2 + \zeta_3^2 & -\eta_3 \zeta_3 \\ -\zeta_3 \xi_3 & -\zeta_3 \eta_3 & \xi_3^2 + \eta_3^2 \end{bmatrix} dm.$$

Векторы сил  $\mathbf{P}_3$  и моментов  $\mathbf{M}_3$  представляют собой реакции во втором узле со стороны стержневой системы, записанные в связанной с ТТ системе координат:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_3 &= \mathbf{P}_2 = \Lambda_3 \mathbf{R}_2; \quad \mathbf{M}_3 = \Lambda_3 \mathbf{L}_3; \\ \Lambda_3 &= \Lambda(\psi = \psi_0, \varphi = \varphi_3, \gamma = \gamma_3). \end{aligned} \quad (12)$$

Преобразуем упрощенные линеаризованные уравнения движения ТТ (11) к неподвижной системе координат  $xuz$ , полагая

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_3 &= \dot{\mathbf{v}}_2 \approx \Lambda_3 \dot{\mathbf{r}}_2; \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_3 &= [\ddot{\vartheta}_{\xi_3} \quad \ddot{\vartheta}_{\eta_3} \quad \ddot{\vartheta}_{\zeta_3}]^T \approx \Lambda_3 \ddot{\boldsymbol{\chi}}_3. \end{aligned} \quad (13)$$

После умножения каждого из двух матричных уравнений движения ТТ (11) слева на матрицу  $\Lambda_3^T$  с учетом преобразований (12), (13) и

свойства  $\Lambda_3^T \Lambda_3 = 1$  запишем их в неподвижной системе координат  $xuz$  как

$$\begin{aligned} m_3 \mathbf{E}_3 \ddot{\mathbf{r}}_2 - \Lambda_3^T \mathbf{S}_3 \Lambda_3 \ddot{\chi}_3 &= \mathbf{R}_2; \\ -(\Lambda_3^T \mathbf{S}_3 \Lambda_3)^T \ddot{\mathbf{r}}_2 + \Lambda_3^T \mathbf{J}_3 \Lambda_3 \ddot{\chi}_3 &= \mathbf{L}_3, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\mathbf{E}_3$  — единичная матрица третьего порядка.

Полученную систему дифференциальных уравнений (14) решают совместно с системой линейных алгебраических уравнений квазистатического деформирования трансформируемой конструкции КМ (10).

Используя матричное уравнение (10) и исключая векторы неизвестных реакций  $\mathbf{R}_2, \mathbf{L}_3$ , задача динамики пространственного движения КМ с упругими звеньями, перемещающего по заданному закону массивное ТТ, сводится к шести неоднородным линейным дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами для неизвестных перемещений и углов поворота ТТ, составляющих векторы  $\mathbf{r}_2$  и  $\chi_3$ .

**Плоское движение трехзвенного КМ.** Рассмотрим плоское движение КМ, состоящего из трех шарнирно соединенных между собой звеньев и управляемого кинематически за счет заданных относительных углов поворота в шарнирах  $\theta_0(t), \theta_1(t), \theta_2(t)$ . Плоская модель трехзвенного КМ приведена на рис. 4, где упругие звенья показаны в недеформированном состоянии.

Первое и второе звенья принимаем упругими на изгиб стержнями длиной  $l_k$  с постоянными по длине жесткостями  $EI_k$ . Третье звено — недеформируемое тело массой  $M_3$  с центральным моментом инерции  $J_3^0$ , моделирующим схват с присоединенным ТТ (грузом),

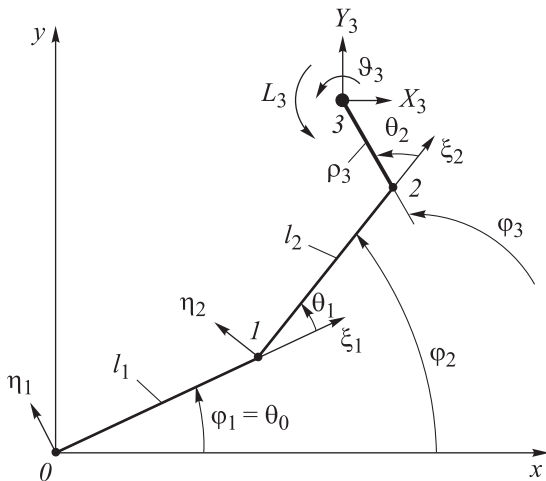


Рис. 4. Плоская модель трехзвенного КМ

центр масс которого находится в точке 3 на расстоянии  $\rho_3$  от шарнирного узла 2.

Движение системы с массивным ТТ считаем достаточно плавным, поэтому инерционными силами и силами тяжести тонких стержней можно пренебречь. Условное звено 2–3, связывающее шарнирный узел 2 с центром масс ТТ в точке 3, является недеформируемым. Углы поворота звеньев как твердых тел — произвольные (большие). Первый шарнир в точке 0 принимаем неподвижным ( $x_0 = y_0 = 0$ ).

Внутри первого и второго полых стержней расположены механизмы и приводы, осуществляющие заданное кинематическое управление изменениями углов между соединяемыми звеньями  $\theta_k(t)$  ( $k = 0, 1, 2$ ) с целью передвижения и позиционирования ТТ. Для учета возможной податливости в нулевом, первом и втором шарнирах введем эквивалентные пружины жесткостью  $c_k$ .

В недеформированном состоянии с зафиксированными углами  $\theta_k(t)$  ( $k = 0, 1, 2$ ) геометрические параметры системы определяются как

$$\begin{aligned} x_k^0 &= x_{k-1}^0 + l_k \cos \varphi_k; \quad y_k^0 = y_{k-1}^0 + l_k \sin \varphi_k; \\ \varphi_k &= \varphi_{k-1} + \theta_{k-1}(t); \quad x_0^0 = y_0^0 = \varphi_0 = 0, \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (15)$$

В деформированном состоянии системы координаты центра масс ТТ обозначаем через  $x_3(t)$  и  $y_3(t)$ , а его угол поворота — через  $\vartheta_3(t)$ . Тогда инерционные силы и моменты ТТ, приведенные к его центру масс (см. рис. 4), имеют вид

$$X_3 = -M_3 \ddot{x}_3; \quad Y_3 = -M_3 (\ddot{y}_3 + g); \quad L_3 = -J_3^0 \ddot{\vartheta}_3. \quad (16)$$

При действии сил  $X_3, Y_3$  и момента  $L_3$  стержни изгибаются, а в податливых по углам поворота соединениях с приводами изменяются углы  $\theta_k(t)$ :

$$\begin{aligned} x_k &= x_k^0 + \Delta x_k; \quad y_k = y_k^0 + \Delta y_k; \\ \vartheta_k &= \varphi_k + \Delta \varphi_k, \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned} \quad (17)$$

Упругие перемещения и угловые податливости в соединительных узлах считаем малыми, будем использовать геометрические параметры системы в ее недеформированном состоянии. Коэффициенты податливостей в управляемых шарнирных соединениях ( $k = 0, 1, 2$ ) с приводами обозначаем через  $c_k^{-1}$ . Их можно определить экспериментально при зафиксированном угле  $\theta_k$  с помощью соотношения  $\Delta \theta_k = c_k^{-1} M_k$ , где  $M_k$  — прикладываемый в узле момент.

Уравнения статического деформирования упругой системы составляем по методу сил, для чего определяем изгибающие моменты

в стержнях 0-1  $M_{0-1}$  и 1-2  $M_{1-2}$ , нулевом  $M_0$ , первом  $M_1$  и втором  $M_2$  шарнирных узлах:

$$\begin{aligned} M_{0-1} &= L_3 - X_3(a_{13} - \xi_1 \sin \varphi_1) + \\ &+ Y_3(b_{13} - \xi_1 \cos \varphi_1); \\ M_{1-2} &= L_3 - X_3(a_{23} - \xi_2 \sin \varphi_2) + \\ &+ Y_3(b_{23} - \xi_2 \cos \varphi_2); \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} M_0 &= L_3 - X_3 a_{13} + Y_3 b_{13}; \\ M_1 &= L_3 - X_3 a_{23} + Y_3 b_{23}; \\ M_2 &= L_3 - X_3 a_3 + Y_3 b_3. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь  $\xi_k$  — локальная координата точки стержня в связанной системе координат  $\xi_k \eta_k$ ,  $0 \leq \xi_k \leq l_k$  ( $k=1, 2$ ); с учетом выражения (15)

$$\begin{aligned} a_{13} &= a_1 + a_2 + a_3; \quad b_{13} = b_1 + b_2 + b_3; \\ a_{23} &= a_2 + a_3; \quad b_{23} = b_2 + b_3; \\ a_3 &= \rho_3 \sin \varphi_3; \quad b_3 = \rho_3 \cos \varphi_3, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= l_1 \sin \varphi_1; \quad a_2 = l_2 \sin \varphi_2; \quad b_1 = l_1 \cos \varphi_1; \\ b_2 &= l_2 \cos \varphi_2; \quad \varphi_1 = \theta_0(t); \quad \varphi_2 = \theta_0(t) + \theta_1(t); \\ \varphi_3 &= \theta_0(t) + \theta_1(t) + \theta_2(t). \end{aligned}$$

С учетом упругих податливостей приводов, осуществляющих управляемые повороты по углам  $\theta_k(t)$  ( $k=0, 1, 2$ ), в шарнирных соединениях, потенциальная энергия изгиба системы двух стержней

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{EI_1} \int_0^{l_1} M_{0-1}^2 d\xi_1 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{EI_2} \int_0^{l_2} M_{1-2}^2 d\xi_2 + \frac{1}{c_0} M_0^2 + \frac{1}{c_1} M_1^2 + \frac{1}{c_2} M_2^2 \right) \end{aligned} \quad (20)$$

или в матричном виде

$$\Pi = \frac{1}{2} [X_3 \quad Y_3 \quad L_3] \Gamma [X_3 \quad Y_3 \quad L_3]^T, \quad (21)$$

где  $\Gamma = [\gamma_{ij}]$  — матрица размером  $3 \times 3$ , коэффициенты  $\gamma_{ij}$  которой нелинейно зависят от угла  $\theta_k(t)$ ,  $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ .

Если не учитывать податливости в  $k$ -м шарнирном узле в выражении (20), то следует положить  $c_k \rightarrow \infty$ .

После подстановки выражений (18) и (19) в формулу (20) получаем

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{1}{EI_1} \left( l_1 a_{13}^2 - l_1^2 a_{13} \sin \varphi_1 + \frac{1}{3} l_1^3 \sin^2 \varphi_1 \right) + \\ &+ \frac{1}{EI_2} \left( l_2 a_{23}^2 - l_2^2 a_{23} \sin \varphi_2 + \frac{1}{3} l_2^3 \sin^2 \varphi_2 \right) + \\ &+ \frac{1}{c_0} a_{13}^2 + \frac{1}{c_1} a_{23}^2 + \frac{1}{c_2} a_3^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{22} &= \frac{1}{EI_1} \left( l_1 b_{13}^2 - l_1^2 b_{13} \cos \varphi_1 + \frac{1}{3} l_1^3 \cos^2 \varphi_1 \right) + \\ &+ \frac{1}{EI_2} \left( l_2 b_{23}^2 - l_2^2 b_{23} \cos \varphi_2 + \frac{1}{3} l_2^3 \cos^2 \varphi_2 \right) + \\ &+ \frac{1}{c_0} b_{13}^2 + \frac{1}{c_1} b_{23}^2 + \frac{1}{c_2} b_3^2; \end{aligned}$$

$$\gamma_{33} = \frac{l_1}{EI_1} + \frac{l_2}{EI_2} + \frac{1}{c_0} + \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2};$$

$$\begin{aligned} \gamma_{12} = \gamma_{21} &= \frac{1}{EI_1} \left( \frac{1}{2} l_1^2 a_{13} \cos \varphi_1 - l_1 a_{13} b_{13} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} l_1^2 b_{13} \sin \varphi_1 - \frac{1}{3} l_1^3 \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 \right) + \\ &+ \frac{1}{EI_2} \left( \frac{1}{2} l_2^2 a_{23} \cos \varphi_2 - l_2 a_{23} b_{23} + \frac{1}{2} l_2^2 b_{23} \sin \varphi_2 - \right. \\ &- \left. \frac{1}{3} l_2^3 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 \right) - \frac{1}{c_0} a_{13} b_{13} - \frac{1}{c_1} a_{23} b_{23} - \frac{1}{c_2} a_3 b_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{23} = \gamma_{32} &= \frac{1}{EI_1} \left( l_1 b_{13} - \frac{1}{2} l_1^2 \cos \varphi_1 \right) + \\ &+ \frac{1}{EI_2} \left( l_2 b_{23} - \frac{1}{2} l_2^2 \cos \varphi_2 \right) + \frac{1}{c_0} b_{13} + \frac{1}{c_1} b_{23} + \frac{1}{c_2} b_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{13} = \gamma_{31} &= \frac{1}{EI_1} \left( \frac{1}{2} l_1^2 \sin \varphi_1 - l_1 a_{13} \right) + \\ &+ \frac{1}{EI_2} \left( \frac{1}{2} l_2^2 \sin \varphi_2 - l_2 a_{23} \right) - \frac{1}{c_0} a_{13} - \frac{1}{c_1} a_{23} - \frac{1}{c_2} a_3. \end{aligned}$$

Уравнения квазистатического деформирования упругой системы двух стержней с учетом податливостей приводов по относительным углам поворота в шарнирных соединениях получаем по методу сил с учетом выражений (17) и (21):

$\theta_0; \theta_1; \theta_2$ , рад

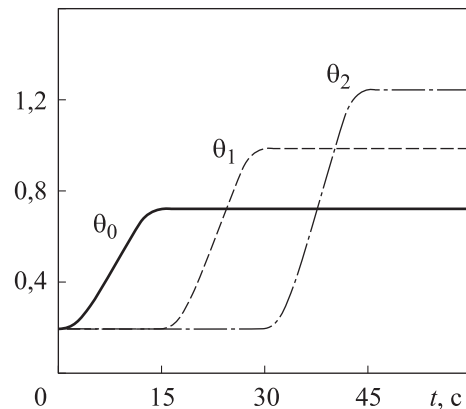


Рис. 5. Зависимости углов поворота стержней  $\theta_0$ ,  $\theta_1$  и  $\theta_2$  от времени  $t$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial X_3} = \Delta x_3 = x_3 - x_3^0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial Y_3} = \Delta y_3 = y_3 - y_3^0;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial L_3} = \vartheta_3 - \varphi_3.$$

Запишем их в матричном виде

$$\Gamma [X_3 \quad Y_3 \quad L_3]^T = [x_3 - x_3^0 \quad y_3 - y_3^0 \quad \vartheta_3 - \varphi_3]^T.$$

С учетом выражений (16) система дифференциальных уравнений плоского движения массивного ТТ принимает вид

$$\begin{bmatrix} M_3 \ddot{x}_3 \\ M_3 (\ddot{y}_3 + g) \\ J_3 \ddot{\varphi}_3 \end{bmatrix} + \Gamma^{-1} \begin{bmatrix} x_3 - x_3^0 \\ y_3 - y_3^0 \\ \vartheta_3 - \varphi_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (22)$$

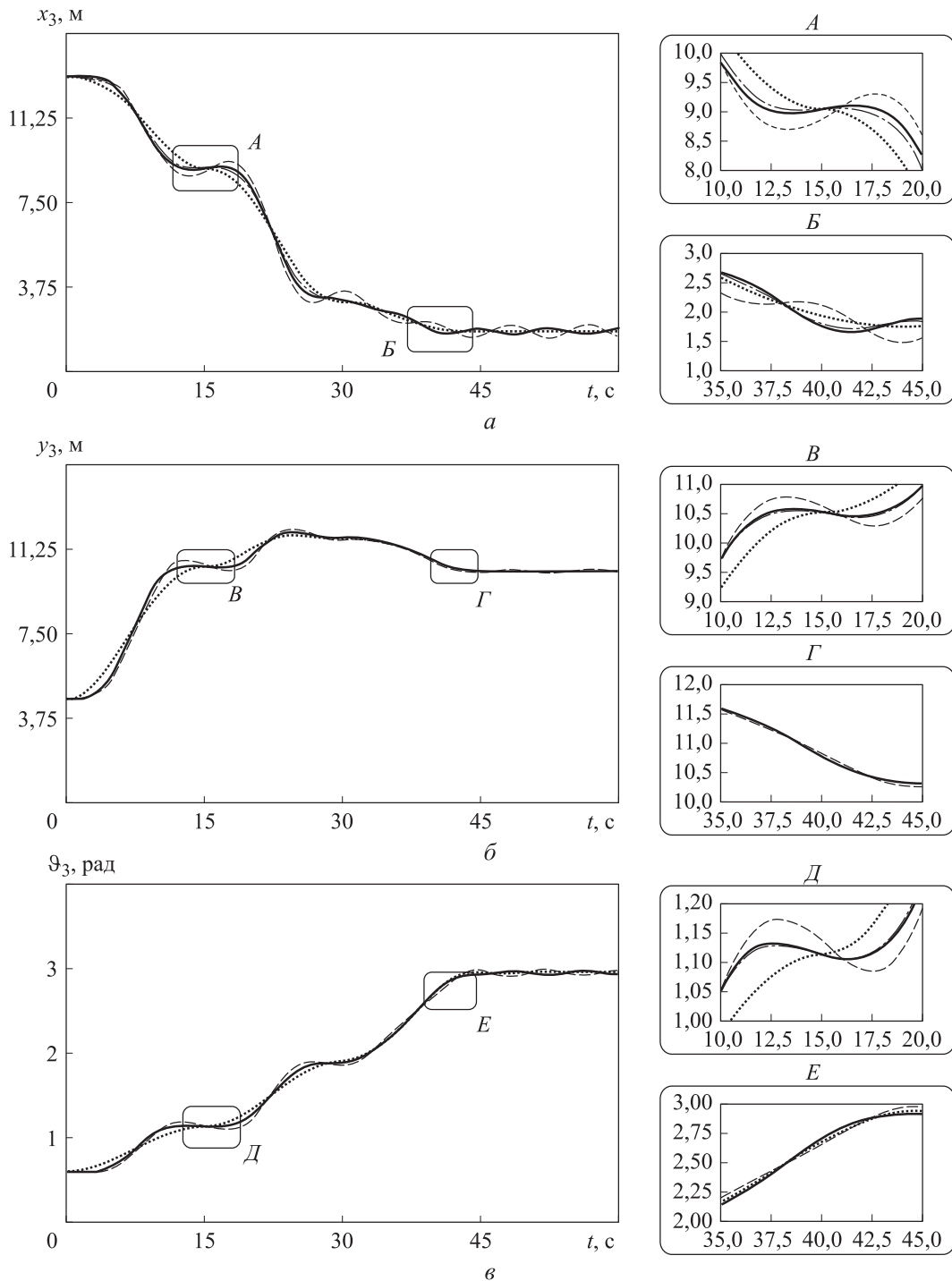


Рис. 6. Зависимости горизонтального  $x_3$  (а), вертикального  $y_3$  (б) и углового (в) положений центра масс схвата с грузом КМ от времени  $t$  для вариантов В1 (—), В2 (----), В3 (-.-.-) и В4 (.....)



Для удобства численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (22) матрица третьего порядка  $\Gamma$  обращается аналитически и записывается в виде формул.

**Пример расчета.** Приведем численные результаты интегрирования полученной нелинейной системы дифференциальных уравнений (22) второго порядка для нескольких вариантов модельного примера расчета.

Программное изменение углов  $\theta_k(t)$  ( $k = 0, 1, 2$ ) определяется следующими зависимостями (рис. 5):

$$\theta_0(t) = \begin{cases} \theta_T + \theta_{0T} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \pi \frac{t}{T} \right) & \text{при } 0 \leq t \leq T; \\ \theta_T + \theta_{0T} & \text{при } t > T; \end{cases}$$

$$\theta_1(t) = \begin{cases} \theta_T & \text{при } 0 \leq t < T; \\ \theta_T + \theta_{1T} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \left( \pi \frac{t-T}{T} \right) \right] & \text{при } T \leq t \leq 2T; \\ \theta_T + \theta_{1T} & \text{при } t > 2T; \end{cases}$$

$$\theta_2(t) = \begin{cases} \theta_T & \text{при } 0 \leq t < 2T; \\ \theta_T + \theta_{2T} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \left( \pi \frac{t-2T}{T} \right) \right] & \text{при } 2T \leq t \leq 3T; \\ \theta_T + \theta_{2T} & \text{при } t > 3T, \end{cases}$$

где

$$\theta_T = \frac{\pi}{16}; \theta_{0T} = \frac{\pi}{6}; \theta_{1T} = \frac{\pi}{4}; \theta_{2T} = \frac{\pi}{3}; T = 15 \text{ с.}$$

Исходные данные:  $l_1 = l_2 = 6 \text{ м}$ ;  $EI_1 = EI_2 = 2,029 \cdot 10^5 \text{ Н}\cdot\text{м}^2$ ;  $\rho_3 = 2 \text{ м}$ ;  $M_3 = 600 \text{ кг}$ ;  $J_3 = 100 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ . Численное интегрирование выполняли по методу Адамса с шагом интегрирования  $10^{-3} \text{ с}$  в интервале времени от  $t_0 = 0$  до

$t_k = 4T = 60 \text{ с}$ . В начальном положении стержни и схват находятся в покое и вытянуты вдоль оси, наклоненной под углом  $\theta_T$  к оси  $x$  ( $\theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = \theta_T$ ).

В первом варианте расчета (В1) податливости в шарнирах не учитывали ( $c_0 = c_1 = c_2 \rightarrow \infty$ ). Во втором варианте (В2) учитывали податливости в управляемых шарнирных узлах с коэффициентами жесткости  $c_0 = 5 \cdot 10^5 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{рад}$ ,  $c_1 = 2,5 \cdot 10^5 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{рад}$  и  $c_2 = 1 \cdot 10^5 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{рад}$ .

В третьем варианте расчета (В3) использовали математическую модель динамики двухзвенного КМ, полученную в работе [15] в перемещениях.

Четвертый вариант расчета (В4) представляет собой решение задачи для абсолютно жестких на изгиб первого и второго звеньев, т. е. решение кинематической задачи:

$$\begin{aligned} x_3(t) &= x_3^0 = l_1 \cos \theta_0 + l_2 \cos(\theta_0 + \theta_1) + \\ &+ \rho_3 \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2); \\ y_3(t) &= y_3^0 = l_1 \sin \theta_0 + l_2 \sin(\theta_0 + \theta_1) + \\ &+ \rho_3 \sin(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2); \\ \varphi_3(t) &= \theta_0 + \theta_1 + \theta_2. \end{aligned}$$

Расчетные зависимости горизонтального  $x_3$  (а), вертикального  $y_3$  (б) и углового  $\varphi_3$  (в) положений точки 3 (центра масс схвата с грузом) КМ от времени для вариантов В1–В4 приведены на рис. 6, а–в. Годограф изменения положения центра масс схвата с грузом КМ на всем времени управления для вариантов В1–В4 показан на рис. 7.

Как видно из рис. 6, а–в, наибольшее влияние на характер движения вносят податливости шарнирных соединений. Особенно это проявляется при остаточных колебаниях после снятия управляющего кинематического воздействия, т. е. при  $t > 3T = 45 \text{ с}$ .

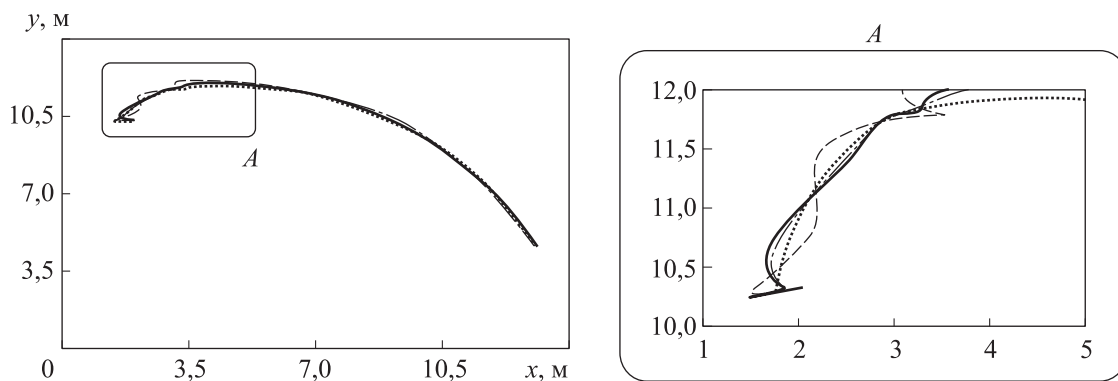


Рис. 7. Годограф изменения положения центра масс схвата с грузом КМ для вариантов В1 (—), В2 (----), В3 (-.-.-) и В4 (.....)

### Результаты расчета параметров, характеризующих движение центра масс схвата с грузом КМ

Вариант	$x_3$ , м	$y_3$ , м	$\vartheta_3$ , рад	Вариант	$x_3$ , м	$y_3$ , м	$\vartheta_3$ , рад
<i>При <math>t = T</math></i>				<i>При <math>t = 3T</math></i>			
B1	9,0330	10,5217	1,1147	B1	1,8900	10,3087	2,9287
B2	8,8820	10,6387	1,1353	B2	1,5582	10,2575	2,9766
B3	9,0419	10,5161	1,1137	B3	1,8611	10,3083	2,9280
B4	9,0482	10,5099	1,1126	B4	1,7663	10,2949	2,9452
<i>При <math>t = 2T</math></i>				<i>При <math>t = 4T</math></i>			
B1	3,1902	11,7933	1,8860	B1	1,8810	10,3142	2,9284
B2	3,5269	11,7818	1,8455	B2	1,5437	10,2625	2,9769
B3	3,1571	11,7932	1,8874	B3	1,8437	10,3157	2,9267
B4	3,0850	11,7986	1,8980	B4	1,7663	10,2949	2,9452

Результаты расчета параметров, характеризующих движение центра масс схвата с грузом КМ, для вариантов В1–В4 в разные моменты времени  $t$  приведены в таблице.

### Выводы

1. Построена математическая модель динамики пространственного движения трехзвенового КМ, состоящего из двух упругих безынерционных стержней, работающих на изгиб в двух плоскостях и на кручение, и присоединенного к ним на конце массивного абсолютно ТТ. Решение задачи, построенной по методу сил на основании принципа Кастильяно, сведено к системе шести дифференциальных уравнений

колебаний ТТ в неподвижной системе координат с присоединенной к нему упругой стержневой системой переменной структуры.

2. На основании предложенного подхода рассмотрено плоское управляемое движение симметричного КМ с двумя упругими стержневыми звеньями и переносимым ТТ с учетом упругих податливостей в шарнирных соединениях. Получены конечные уравнения со всеми коэффициентами, записанные в удобном для численного интегрирования матричном виде. Выполнены численные сравнения с решением задачи о перемещениях, основанным на предыдущих публикациях, с оценками влияния податливостей в шарнирных соединениях.

### Литература

- [1] Афанасьев И. Начало новой «эры». *Русский космос*, 2021, № 10, с. 54–57.
- [2] Тебуева Ф.Б., Петренко В.И., Антонов В.О. Методика определения взаимоположения суставов руки оператора для управления антропоморфным космическим манипулятором. *Экстремальная робототехника*, 2018, т. 1, № 1, с. 69–81.
- [3] Даляев И.Ю., Кузнецова Е.М., Шардыко И.В. Перспектива создания роботизированных сервисных спутников для технического обслуживания и продления сроков активного существования космических аппаратов. *Робототехника и техническая кибернетика*, 2015, № 3, с. 27–31.
- [4] Акуленко Л.Д., Михайлов С.А., Черноусько Ф.Л. Моделирование динамики манипулятора с упругими звеньями. *Известия АН СССР. МТТ*, 1981, № 3, с. 118–124.
- [5] Михайлов С.А., Черноусько Ф.Л. Исследование динамики манипулятора с упругими звеньями. *Известия АН СССР. МТТ*, 1984, № 2, с. 51–58.
- [6] Черноусько Ф.Л. Динамика управляемых движений упругого манипулятора. *Известия АН СССР. Техн. кибернетика*, 1981, № 5, с. 142–152.
- [7] Рахманов Е.В., Стрелков А.Н., Шведов В.Н. Разработка математической модели упругого манипулятора на подвижном основании. *Известия АН СССР. Техн. кибернетика*, 1981, № 4, с. 109–114.

- [8] Гукасян А.А. Исследование управляемых движений упругого манипулятора с тремя степенями подвижности. *Известия АН АрмССР. Механика*, 1983, т. 36, № 3, с. 12–20.
- [9] Черноушко Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. *Манипуляционные роботы*. Москва, Наука, 1989. 363 с.
- [10] Докучаев Л.В. *Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами*. Москва, Машиностроение, 1987. 232 с.
- [11] Гуляев В.И., Завражина Т.В. Динамическое управление плоскими движениями упругого двузвенного космического робота-манипулятора. *Проблемы управления и информатики*, 1998, № 1, с. 140–154.
- [12] Гуляев В.И., Завражина Т.В. Динамика управляемых движений упругого робота-манипулятора. *Известия АН. МТТ*, 1998, № 5, с. 19–28.
- [13] Гуляев В.И., Завражина Т.В. Динамика робота-манипулятора с упругоподатливыми звеньями и приводными механизмами. *Известия АН. МТТ*, 2003, № 6, с. 18–30.
- [14] Завражина Т.В. Влияние упругой податливости звеньев на динамику и точность позиционирования робота-манипулятора с вращательными и поступательными сочленениями. *Известия АН. МТТ*, 2008, № 6, с. 17–32.
- [15] Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Динамика плоского движения космического крана-манипулятора типа руки с учетом изгиба звеньев. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2023, № 5, с. 112–122, doi: <http://dx.doi.org/10.18698/0536-1044-2023-5-112-122>
- [16] Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. *Динамика упругих управляемых конструкций*. Москва, Изд-во МАИ, 2007. 328 с.

## References

- [1] Afanasyev I. Beginning of new “Era”. *Russkiy kosmos*, 2021, no. 10, pp. 54–57. (In Russ.).
- [2] Tebueva F.B., Petrenko V.I., Antonov V.O. et al. A method of determining the mutual position of operator’s arm joints for anthropomorphic space manipulator control. *Ekstremalnaya robototekhnika* [Extreme Robotics], 2018, vol. 1, no. 1, pp. 69–81. (In Russ.).
- [3] Dallyaev I.Yu., Kuznetsova E.M., Shardyko I.V. Development prospects of robotic service satellites for maintenance purposes and active lifetime extension of spacecraft. *Robototekhnika i tekhnicheskaya kibernetika* [Robotics and Technical Cybernetics], 2015, no. 3, pp. 27–31. (In Russ.).
- [4] Akulenko L.D., Mikhaylov S.A., Chernousko F.L. Modeling of manipulator dynamics with elastic linkages. *Izvestiya AN SSSR. MTT*, 1981, no. 3, pp. 118–124. (In Russ.).
- [5] Mikhaylov S.A., Chernousko F.L. Study on manipulator dynamics with elastic linkages. *Izvestiya AN SSSR. MTT*, 1984, no. 2, pp. 51–58. (In Russ.).
- [6] Chernousko F.L. Dinamika upravlyaemykh dvizheniy uprugogo manipulyatora. *Izvestiya AN SSSR. Tekhn. kibernetika*, 1981, no. 5, pp. 142–152. (In Russ.).
- [7] Rakhmanov E.V., Strelkov A.N., Shvedov V.N. Dynamics of controlled motions of an elastic manipulator. *Izvestiya AN SSSR. Tekhn. kibernetika*, 1981, no. 4, pp. 109–114. (In Russ.).
- [8] Gukasyan A.A. Study on controlled motion of an elastic manipulator with three degrees of freedom. *Izvestiya AN ArmSSR. Mekhakanika*, 1983, vol. 36, no. 3, pp. 12–20. (In Russ.).
- [9] Chernousko F.L., Bolotnik N.N., Gradetskiy V.G. *Manipulyatsionnye roboty* [Manipulation robots]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 363 p. (In Russ.).
- [10] Dokuchaev L.V. *Nelineynaya dinamika letatelnykh apparatov s deformiruemyimi elementami* [Nonlinear dynamics of aircraft with deformable elements]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1987. 232 p. (In Russ.).
- [11] Gulyaev V.I., Zavrazhina T.V. Dynamic control of planar motions of an elastic two-link space robot-manipulator. *Problemy upravleniya i informatiki*, 1998, no. 1, pp. 140–154. (In Russ.).
- [12] Gulyaev V.I., Zavrazhina T.V. Controlled motion dynamics of an elastic manipulator robot. *Izvestiya AN. MTT*, 1998, no. 5, pp. 19–28. (In Russ.).
- [13] Gulyaev V.I., Zavrazhina T.V. Dynamics of a robot manipulator with elastic-fit links and drive mechanisms. *Izvestiya AN. MTT*, 2003, no. 6, pp. 18–30. (In Russ.).
- [14] Zavrazhina T.V. Influence of elastic compliance of links on the dynamics and accuracy of a manipulating robot with rotational and translational joints. *Izvestiya AN. MTT*, 2008, no. 6,

- pp. 17–32. (In Russ.). (Eng. version: *Mech. Solids*, 2008, vol. 43, no. 6, pp. 850–862, doi: <https://doi.org/10.3103/S0025654408060034>)
- [15] Russkikh S.V., Shklyarchuk F.N. Plane motion dynamics of a space-based crane-manipulator of the arm type taking into account the links' bending. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie* [BMSTU Journal of Mechanical Engineering], 2023, no. 5, pp. 112–122, doi: <http://dx.doi.org/10.18698/0536-1044-2023-5-112-122> (in Russ.).
- [16] Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N. *Dinamika uprugikh upravlyaemykh konstruktsey* [Dynamics of elastic controlled constructions]. Moscow, Izd-vo MAI Publ., 2007. 328 p. (In Russ.).

Статья поступила в редакцию 18.09.2023

## Информация об авторах

**ГРИШАНИНА Татьяна Витальевна** — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры 602 «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий». ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (125993, Москва, Российская Федерация, Волоколамское шоссе, д. 4, e-mail: [grishaninatat@list.ru](mailto:grishaninatat@list.ru)).

**РУССКИХ Сергей Владимирович** — доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры 602 «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий». ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»; старший научный сотрудник ФГБН «Институт прикладной механики Российской академии наук» (125040, Москва, Российская Федерация, Ленинградский проспект, д. 7, e-mail: [sergey.russkih@rambler.ru](mailto:sergey.russkih@rambler.ru)).

**ШКЛЯРЧУК Федор Николаевич** — доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник. ФГБН «Институт прикладной механики Российской академии наук»; профессор кафедры 602 «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий». ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (125993, Москва, Российская Федерация, Волоколамское шоссе, д. 4, e-mail: [shklyarchuk@list.ru](mailto:shklyarchuk@list.ru)).

## Information about the authors

**GRISHANINA Tatyana Vitalievna** — Doctor of Science (Phys.-Math.), Professor, Professor of Department 602, Design and Durability of Aircraft, Rocket and Space Products. Moscow Aviation Institute (National Research University) (National Research University) (125993, Moscow, Russian Federation, Volokolamskoye Shosse, Bldg. 4, e-mail: [grishaninatat@list.ru](mailto:grishaninatat@list.ru)).

**RUSSIKIKH Sergey Vladimirovich** — Doctor of Science (Physics and Math), Associate Professor, Professor of Department 602, Design and Durability of Aircraft, Rocket and Space Products. Moscow Aviation Institute (National Research University); Senior Researcher. Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences (125040, Moscow, Russian Federation, Leningradskiy Ave., Bldg. 7, e-mail: [sergey.russkih@rambler.ru](mailto:sergey.russkih@rambler.ru)).

**SHKLYARCHUK Fyodor Nikolaevich** — Doctor of Science (Eng.), Professor, Chief Researcher. Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences; Professor, Department 602, Design and Durability of Aviation-Rocket and Space Products. Moscow Aviation Institute (National Research University) (125993, Moscow, Russian Federation, Volokolamskoye Shosse, Bldg. 4, e-mail: [shklyarchuk@list.ru](mailto:shklyarchuk@list.ru)).

### Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Гришанина Т.В., Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Применение метода сил для расчета пространственного движения манипулятора с массивным твердым телом с учетом упругости звеньев и поворотных приводов. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2023, № 11, с. 92–103, doi: [10.18698/0536-1044-2023-11-92-103](https://doi.org/10.18698/0536-1044-2023-11-92-103)

### Please cite this article in English as:

Grishanina T.V., Russkikh S.V., Shklyarchuk F.N. Force method application in calculating spatial motion of a manipulator with the massive solid body taking into account the links and rotary drives elasticity. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2023, no. 11, pp. 92–103, doi: [10.18698/0536-1044-2023-11-92-103](https://doi.org/10.18698/0536-1044-2023-11-92-103)