

Машиностроение и машиноведение

УДК 621.833.6

doi: 10.18698/0536-1044-2023-12-14-19

Унификация метода расчета планетарно-цевочной передачи с методом расчета цилиндрических эвольвентных передач

А.В. Зайцева

МГТУ им. Н.Э. Баумана

Unification of the cycloidal gearbox calculation method and the cylindrical involute gear calculation method

A.V. Zaytseva

Bauman Moscow State Technical University

Рассмотрены методы расчета планетарно-цевочных передач, широко используемых в станкостроении, робототехнике и других отраслях промышленности. Установлено, что эти методы, в отличие от методов расчета цилиндрических эвольвентных зубчатых передач (согласно ГОСТ 21354–87 и ISO 6336:2006) не позволяют анализировать влияние различных факторов (параметров материалов, диаметра цевки, эксцентриситета, модуля передачи и др.) на коэффициент запаса. Показано, что для планетарно-цевочной передачи коэффициент Z_E , учитывающий модули упругости и коэффициенты Пуассона контактирующих тел (цевки и сателлита), можно определить по той же формуле, что и для эвольвентной передачи. Приведены значения коэффициента Z_E для различных материалов сателлита. В предположении, что основным условием работоспособности планетарно-цевочной передачи является контактная выносливость рабочей поверхности сателлита, получена формула для оценки контактных напряжений в месте контакта сателлита с наиболее нагруженной цевкой. Эта формула аналогична таковой для расчета эвольвентной передачи. Предложен коэффициент Z_H , учитывающий геометрические параметры сопряженных тел (цевки и сателлита). Для представления геометрических параметров в безразмерной форме при расчете использован коэффициент укорочения циклоиды, образующей рабочий профиль сателлита, а также введен относительный диаметр цевки, равный отношению ее диаметра к модулю передачи. В предложенной формуле показано, что коэффициент Z_H может принимать наименьшее значение, равное 3,3, при выборе оптимальных значений коэффициента укорочения циклоиды и относительного диаметра цевки. Приведены графические зависимости коэффициента Z_H от указанных параметров для передач с эпи- и гипоциклоидальным сателлитами при разном числе цевков. Полученные графики позволяют быстро оценить контактные напряжения в планетарно-цевочной передаче, что удобно при проектном расчете.

Ключевые слова: планетарно-цевочная передача, метод расчета, цилиндрические эвольвентные передачи, коэффициенты нагрузки

The paper considers methods for calculating the cycloid gearboxes widely used in machine tool building, robotics and other industries. It was established that these methods, unlike methods in calculating the cylindrical involute gears (according to GOST 21354–87 and ISO 6336:2006), do not allow analyzing the influence of various factors (material parameters, pin diameter, eccentricity, transmission module, etc.) on the safety factor. It is shown that for a cycloid gear, the Z_E coefficient, which takes into account the elastic moduli and the Poisson's ratios for contacting bodies (pin and satellite), could be determined using the same formula as for the involute gear. The Z_E coefficient values for various satellite materials are provided. Assuming that main condition for the cycloidal gearbox performance is contact endurance of the satellite-working surface, a formula was obtained to estimate contact stresses at the point of the satellite contact with the most loaded pin. This formula is similar to that for calculating the involute transmission. The Z_H coefficient was proposed to take into account geometric parameters of the mating bodies (pin and satellite). To represent geometric parameters in the dimensionless form, calculation used the cycloid shortening coefficient that formed the satellite working profile; besides, the relative pin diameter was introduced equal to its diameter ratio to the transmission module. The proposed formula shows that the Z_H coefficient could take the smallest value (3.3) when selecting optimal values of the cycloid shortening coefficient and the pin relative diameter. Graphical dependences of the Z_H coefficient on the specified parameters are presented for gears with epi- and hypocycloidal satellites and with different pin numbers. The resulting graphs make it possible to quickly evaluate contact stresses in the cycloidal gearbox, which is convenient in the design calculations.

Keywords: cycloidal gearboxes, calculation method, cylindrical involute gears, load factors

Планетарно-цевочные передачи (ПЦП) получили широкое распространение в приводах вращения прецизионной точности. Их используют в промышленных роботах-манипуляторах, поворотных столах металлообрабатывающих станков, мотор-колесах электромобилей, дробилках, пищевой промышленности и т. д. Такая широкая область применения обусловлена многопарностью зацепления, позволяющей достичь максимального отношения крутящего момента на выходном валу к массе ПЦП. Однако многопарность зацепления делает систему статически неопределимой и требующей сложных расчетов.

Существующая методика расчета ПЦП изложена в работах [1–11]. Однако до сих пор отсутствует единая методика расчета, позволяющая анализировать влияние отдельных факторов на коэффициент запаса. Подобная методика существует для цилиндрических эвольвентных зубчатых передач (ЦЭЗП) и описана в ГОСТ 21354–87 и ISO 6336:2006.

К условиям работоспособности ПЦП относят контактную выносливость рабочего профиля сателлита и дорожки качения подшипника. Габаритные размеры ПЦП зависят от диаметра a_p окружности, на которой расположены цевки, и от суммарной ширины b_Σ сателлитов.

При проектных расчетах габаритные размеры передачи определяют из условия контактной выносливости рабочего профиля сателли-

та, после чего рассчитывают суммарную силу, действующую на подшипники, которые подбирают исходя из требуемой грузоподъемности. Зависимость действующих контактных напряжений σ_H от параметров a_p, b_Σ достаточно сложная [1, 3] и не всегда удобная для анализа и поиска оптимальных размеров.

Цель исследования — разработка подхода к упрощению указанной зависимости путем ее унификации с аналогичной формулой для расчета ЦЭЗП.

При расчете ЦЭЗП согласно ГОСТ 21354–87 действующее контактное напряжение определяется выражением

$$\sigma_H = Z_E Z_H Z_\epsilon \sqrt{K_A K_{H\alpha} K_{H\beta} \frac{F_t}{d_1 b} \frac{u \pm 1}{u}}, \quad (1)$$

где Z_E и Z_H — коэффициенты, учитывающие параметры упругости материалов шестерни, колеса и их геометрические параметры; Z_ϵ — коэффициент торцевого перекрытия; K_A , $K_{H\alpha}$, $K_{H\beta}$ — коэффициенты нагрузки [12], учитывающие внешнюю динамическую нагрузку, внутреннюю динамическую нагрузку, неравномерность распределения нагрузки между зубьями и неравномерность распределения нагрузки по длине зуба; F_t — окружная сила в зацеплении; d_1 — делительный диаметр передачи; b — ширина зуба; u — передаточное отношение.

Для ЦЭЗП с наружным зацеплением в формуле (1) используют знак «+», для ЦЭЗП с внутренним зацеплением — знак «-». Стандарт ISO 6336:2006 предлагает формулу, аналогичную выражению (1), дополнительно вводя коэффициент Z_β , учитывающий увеличение фактического перекрытия зубьев в косозубой передаче, и коэффициенты Z_B, Z_D , учитывающие возможное смещение точки с наибольшими контактными напряжениями от полюса передачи. В большинстве случаев можно принять $Z_\beta = Z_B = Z_D = 1$.

Основой формул, позволяющих оценить контактные напряжения в ПЦП, как и выражения (1), является формула Герца для начального контакта по линии

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{FE^*}{\pi l R}}, \quad (2)$$

где F — наибольшая нормальная сила в контакте зубьев (зуба и цевки); E^* — приведенный модуль упругости; l — суммарная длина контактных линий; R — приведенный радиус кривизны.

Приведенный модуль упругости зависит от модулей упругости материалов шестерни (цевки) E_1 и колеса (сателлита) E_2 и их коэффициентов Пуассона μ_1 и μ_2 :

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}.$$

Влияние приведенного модуля упругости E^* ЦЭЗП учитывается коэффициентом $Z_E = \sqrt{E^*/\pi}$ — единственным коэффициентом в расчете, имеющим размерность. Так как коэффициент Z_E явно выделяется из формулы Герца (2), он будет одинаковым и для ЦЭЗП, и для ПЦП. Значения коэффициента Z_E для различных сочетаний материалов цевки и сателлита приведены в таблице.

Если ПЦП изготовлена без погрешностей и зазоров, а ее опоры приняты абсолютно жесткими, то под нагрузкой окажется половина

Значения коэффициента Z_E

Цевка			Сателлит			Z_E , МПа ^{-0,5}
Материал	E_2 , ГПа	μ_2	Материал	E_1 , ГПа	μ_1	
Сталь	210	0,3	Сталь	210,0	0,30	190
			Латунь	110,0	0,35	160
			Пластик	2,4	0,35	30

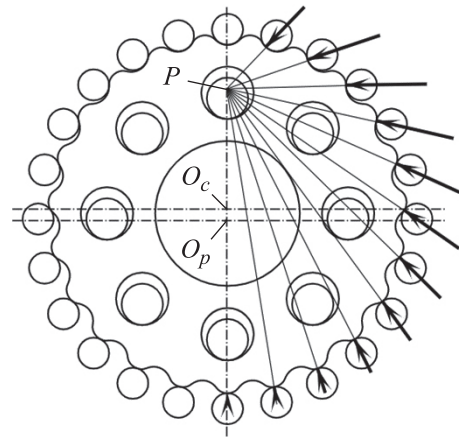


Рис. 1. Схема распределения сил в ПЦП, изготовленной без погрешностей и зазоров: P — полюс передачи; O_c — центр сателлита, O_p — центр обоймы

общего числа цевок, а наиболее нагруженная среди них будет расположена напротив полюса передачи (рис. 1) [4].

Сила в наиболее нагруженной цевке

$$F = \frac{4T_s}{e z_c z_p},$$

где T_s — момент, передаваемый со стороны обоймы на один сателлит; e — эксцентриситет передачи; z_c — число зубьев сателлита; z_p — число цевок.

Нагрузка передается одновременно большим количеством цевок, поэтому силу F можно выразить через условную окружную силу $F_t = 2T_s/a_p$ следующим образом:

$$F = \frac{4F_t}{z_c \lambda} = \frac{8T_s}{a_p \lambda z_c}, \quad (3)$$

где λ — коэффициент укорочения циклоиды; a_p — делительный диаметр обоймы (диаметр окружности, на которой расположены центры цевок).

Силу F_t можно выразить через силу F_x в опоре сателлита, уравнивающую момент на эксцентриковом валу: $F_t = F_x/\lambda$.

Наименьший приведенный радиус кривизны в ПЦП [4]

$$R = \frac{d_p}{2} \left[1 - \frac{d_p}{a_p} \frac{z_c}{\sqrt{1-\lambda^2}} \left(\frac{z_p^2 - 1}{3z_c^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right], \quad (4)$$

где d_p — диаметр цевки.

Параметры d_p и a_p в формуле (4) имеют размерность, что неудобно для приведения

формулы (2) к виду, аналогичному выражению (1). Введем коэффициент

$$\psi_{dm} = \frac{d_p}{m} = \frac{d_p z_p}{a_p}, \quad (5)$$

где $m = a_p/z_p$ — модуль передачи [4].

Число цевок z_p связано с числом зубьев сателлита z_c следующим образом:

$$z_p = z_c \pm 1,$$

где знак «+» используют для эпициклоидальных передач, а знак «-» — для гипоциклоидальных [4].

После подстановки выражения (5) в формулу (4) и преобразований получаем

$$R \approx \frac{a_p \psi_{dm}}{2(z_c \pm 1)} \left[1 - \psi_{dm} \sqrt{\frac{1 \pm 4/z_c}{27(1-\lambda^2)}} \right]. \quad (6)$$

При числе зубьев сателлита $z_c \geq 20$ расхождение формул (5) и (6) составит не более 3%. Наибольшая сила (3) определена при таких же допущениях [4], поэтому будем считать это упрощение приемлемым.

Подставляя выражения (3) и (6) в формулу (2), имеем

$$\sigma_H = Z_E Z_H \sqrt{\frac{F_t}{a_p b} \frac{z_c \pm 1}{z_c}}. \quad (7)$$

Здесь коэффициент Z_H , зависящий от геометрических параметров передачи, определяется из соотношения

$$\frac{1}{Z_H^2} = \frac{\psi_{dm} \lambda}{8} \left[1 - \psi_{dm} \sqrt{\frac{1 \pm 4/z_c}{27(1-\lambda^2)}} \right].$$

Коэффициент Z_H может принимать значения от 3,3 до 10,0 при диаметре цевки $d_p = (1,0 \dots 2,4)m$, коэффициенте укорочения циклоиды $\lambda = 0,55 \dots 0,85$ (диапазон соответствует рекомендуемому [8, 10]) и числу зубьев сателлита $z_c \geq 20$.

Формула (7) имеет вид, подобный выражению (1), что позволяет унифицировать методики расчета ПЦП и ЦЭЗП. Отметим, что передаточное число u ПЦП с зафиксированной обоймой равно z_c .

Зависимости коэффициента Z_H от параметров ПЦП приведены на рис. 2.

Как видно из рисунка, для каждой передачи можно подобрать оптимальные значения коэффициентов ψ_{dm} и λ , при которых действующее контактное напряжение будет наименьшим. Эти оптимальные параметры зависят от

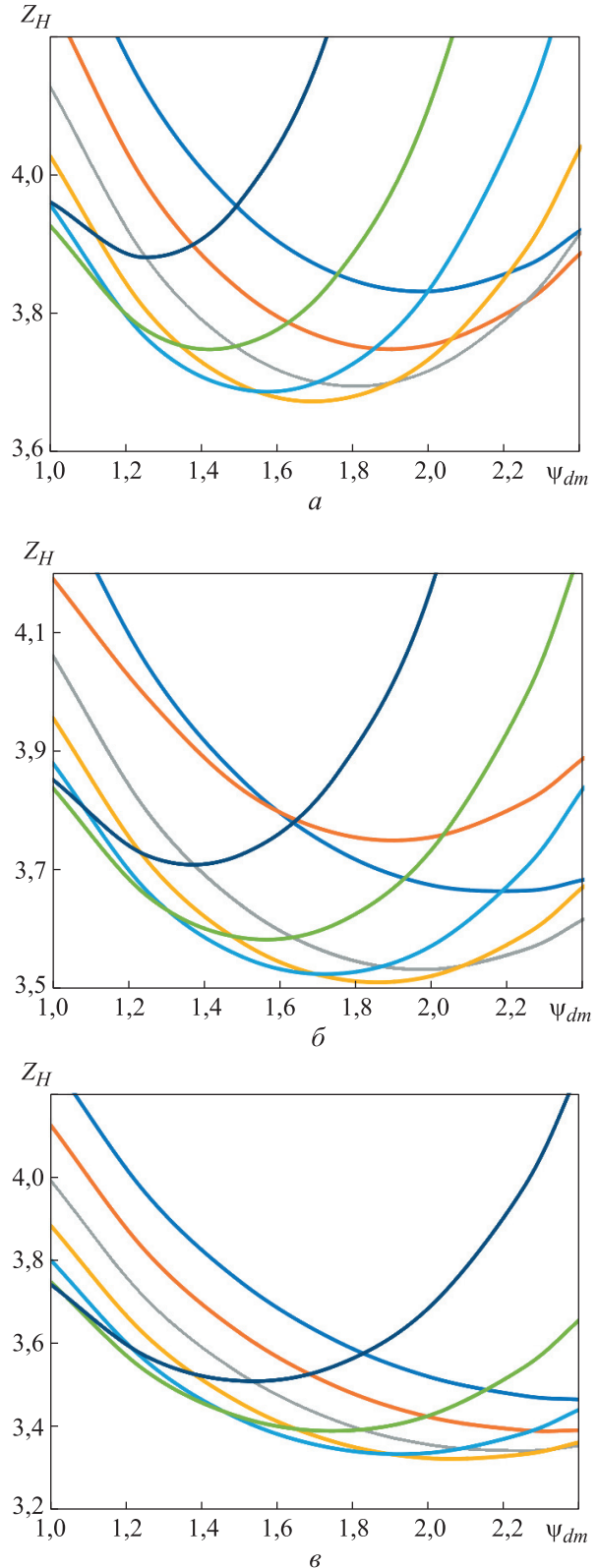


Рис. 2. Зависимости коэффициента Z_H от коэффициента ψ_{dm} при коэффициенте укорочения циклоиды $\lambda = 0,55$ (—), $0,60$ (—), $0,65$ (—), $0,70$ (—), $0,75$ (—), $0,80$ (—) и $0,85$ (—): а и в — эпициклоиды с числом зубьев сателлита $z_c = 20$ и $z_c \rightarrow \infty$; б — гипоциклоида с числом зубьев сателлита $z_c = 20$

типа передачи (эпицик- или гипоциклоидальной) и числа зубьев сателлита z_c .

Таким образом, формулу для оценки действующих контактных напряжений в ПЦП можно привести к виду (7), подобному формуле для ЦЭЗП. Формула (7) не учитывает влияния точности изготовления передачи, перекосов, обусловленных упругими деформациями ее деталей и внутренних динамических нагрузок.

Для учета этих факторов в формулу (7) целесообразно добавить коэффициент K_H , аналогичный коэффициенту нагрузки в расчете ЦЭЗП. Факторы, влияющие на коэффициент K_H , описаны в работах [3, 5, 13–15]. Введение в расчет коэффициента нагрузки и его анализ можно считать темой дальнейших исследований.

Выводы

1. Предложена формула для расчета ПЦП, аналогичная формуле для расчета цилиндрической эвольвентной зубчатой передачи по ГОСТ 21354–87.

2. Определены значения коэффициента Z_E , учитывающего модули упругости и коэффициенты Пуассона контактирующих тел (цевки и сателлита). Показано, что коэффициент Z_E равен $30 \dots 190 \text{ МПа}^{-0,5}$.

3. Предложен коэффициент Z_H , учитывающий геометрические параметры сопряженных тел (цевки и сателлита). Показано, что коэффициент $Z_H = 3,3$ при оптимальном выборе диаметра цевки.

Литература

- [1] Blagojevic M. Analysis of clearances and deformations at cycloid disc. *Machine Design*, 2014, vol. 6, no. 3, pp. 79–84.
- [2] ISO 6336-2006. *Calculation of load capacity of spur and helical gears. Part 1: Basic principles, introduction and general influence factors*. ISO, 2006. 109 p.
- [3] Lehmann M. *Berechnung und Messung der Kräfte in einem Zykloiden-Kurvenscheiben-Getriebe*. PhD thesis. München, Techn. Univ., 1976. 178 p.
- [4] ГОСТ 21354–87. *Передачи зубчатые цилиндрические эвольвентные внешнего зацепления. Расчет на прочность*. Москва, Изд-во стандартов, 1988. 129 с.
- [5] Джонсон К. *Механика контактного взаимодействия*. Москва, Мир, 1989. 510 с.
- [6] Ермолаев М.М., Чиркин А.В. *Расчет планетарно-цевочных редукторов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2020. 64 с.
- [7] Захаров М.Н., Ермолаев М.М., Зайцева А.В. Оценка распределения нагрузки между сателлитами планетарно-цевочного редуктора. *Вестник машиностроения*, 2020, № 6, с. 34–39.
- [8] Кудрявцев В.Н. *Планетарные передачи*. Москва, Ленинград, Машиностроение, 1966. 307 с.
- [9] Попов В. *Механика контактного взаимодействия и физика трения*. Москва, Физматлит, 2013. 350 с.
- [10] Фомин М.В. *Планетарно-цевочные передачи*. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. 64 с.
- [11] Шанников В.М. *Планетарные редукторы с внецентроидным зацеплением*. Москва, Машгиз, 1948. 172 с.
- [12] Решетов Д.Н. *Детали машин*. Москва, Машиностроение, 1989. 496 с.
- [13] Сигов И.В. Исследование планетарно-цевочного редуктора. *Передачи в машиностроении*, 1951, с. 44–58.
- [14] Сеницына Ю.В., Ермолаев М.М. Модели оценки распределения нагрузки в планетарно-цевочных передачах. *Механика XXI века*, 2019, № 18, с. 301–304.
- [15] Сеницына Ю.В. *Метод определения долговечности планетарно-цевочных редукторов с учетом точности их изготовления*. Дисс. ... канд. тех. наук. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021. 124 с.

References

- [1] Blagojevic M. Analysis of clearances and deformations at cycloid disc. *Machine Design*, 2014, vol. 6, no. 3, pp. 79–84.
- [2] ISO 6336-2006. *Calculation of load capacity of spur and helical gears. Part 1: Basic principles, introduction and general influence factors*. ISO, 2006. 109 p.

- [3] Lehmann M. *Berechnung und Messung der Kräfte in einem Zykloiden-Kurvenscheiben-Getriebe*. PhD thesis. München, Techn. Univ., 1976. 178 p.
- [4] GOST 21354–87. *Peredachi zubchatye tsilindricheskie evolventnye vneshnego zatsepleniya. Raschet na prochnost* [State standard GOST 21354–87. Cylindrical involute gears of external engagement. Strength calculation]. Moscow, Izd-vo standartov Publ., 1988. 129 p. (In Russ.).
- [5] Johnson K.L. *Contact mechanics*. Cambridge University Press, 1987. 468 p. (Russ. ed.: *Mekhanika kontaktnogo vzaimodeystviya*. Moscow, Mir Publ., 1989. 510 p.)
- [6] Ermolaev M.M., Chirkin A.V. *Raschet planetarno-tsevochnykh reduktorov* [Calculation of planetary gearboxes]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2020. 64 p. (In Russ.).
- [7] Zakharov M.N., Ermolaev M.M., Zaytseva A.V. Nonuniform load distribution between the satellites of a cycloid gear. *Vestnik mashinostroeniya*, 2020, no. 6, pp. 34–39. (In Russ.). (Eng. version: *Russ. Engin. Res.*, 2020, vol. 40, no. 9, pp. 720–725, doi: <https://doi.org/10.3103/S1068798X20090245>)
- [8] Kudryavtsev V.N. *Planetarnye peredachi* [Planetary gears]. Moscow, Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1966. 307 p. (In Russ.).
- [9] Popov V. *Mekhanika kontaktnogo vzaimodeystviya i fizika treniya* [Mechanics of contact interaction and friction physics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2013. 350 p. (In Russ.).
- [10] Fomin M.V. *Planetarno-tsevochnye peredachi* [Planetary-gear gears]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2009. 64 p. (In Russ.).
- [11] Shannikov V.M. *Planetarnye reduktory s vnetsentroidnym zatsepleniem* [Planetary reducers with off-centre gearing]. Moscow, Mashgiz Publ., 1948. 172 p. (In Russ.).
- [12] Reshetov D.N. *Detali mashin* [Machine parts]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1989. 496 p. (In Russ.).
- [13] Sigov I.V. Study on a planetary chain reducer. *Peredachi v mashinostroenii*, 1951, pp. 44–58. (In Russ.).
- [14] Sinitsyna Yu.V., Ermolaev M.M. Calculation models to estimate cycloid reducer force distribution. *Mekhaniki XXI veku* [Mechanical Engineers to XXI Century], 2019, no. 18, pp. 301–304. (In Russ.).
- [15] Sinitsyna Yu.V. *Metod opredeleniya dolgovechnosti planetarno-tsevochnykh reduktorov s uchetom tochnosti ikh izgotovleniya*. Diss. kand. tekhn. nauk [Method for determining the durability of planetary gearboxes with regard to their manufacturing accuracy. Kand. tech. sci. diss.]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2021. 124 p. (In Russ.).

Статья поступила в редакцию 24.04.2023

Информация об авторе

ЗАЙЦЕВА Анастасия Валерьевна — ассистент кафедры «Основы конструирования машин». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: av-zaytseva@bmstu.ru).

Information about the author

ZAYTSEVA Anastasiya Valerievna — Assistant, Department of Machine Design Principles. Bauman Moscow State Technical (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Bauman-skaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: av-zaytseva@bmstu.ru).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Зайцева А.В. Унификация метода расчета планетарно-цевочной передачи с методом расчета цилиндрических эвольвентных передач. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2023, № 12, с. 14–19, doi: [10.18698/0536-1044-2023-12-14-19](https://doi.org/10.18698/0536-1044-2023-12-14-19)

Please cite this article in English as:

Zaytseva A.V. Unification of the cycloidal gearbox calculation method and the cylindrical involute gear calculation method. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2023, no. 12, pp. 14–19, doi: [10.18698/0536-1044-2023-12-14-19](https://doi.org/10.18698/0536-1044-2023-12-14-19)