

# Технология и технологические машины

УДК 514.851: 531.714.2



**КАШУБА**  
Леонид Анатольевич  
кандидат технических наук,  
доцент



**ЖУК**  
Дмитрий Михайлович  
кандидат технических наук,  
доцент



**МАНИЧЕВ**  
Владимир Борисович  
кандидат технических наук,  
доцент  
кафедры «Системы  
автоматизированного  
проектирования»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

## Геометрия реальных поверхностей деталей изделий машиностроения

*Л.А. Кашуба, Д.М. Жук, В.Б. Маничев*

*Геометрия номинальных элементов представлена в системе координат проекта. Реальная геометрия пространственных элементов в системе координат системы измерения отличается от номинальной геометрии по форме и расположению. Рассмотрен способ определения отклонений формы и расположения пространственных реальных элементов от номинальной формы и расположения.*

**Ключевые слова:** номинальный элемент, реальный элемент, система координат проекта, система координат системы измерения, отклонение формы, отклонение расположения, погрешности формы и расположения.

*The geometry of nominal elements is represented in the coordinate system of the project. The real geometry of spatial elements in the coordinate system of measurement is different from the nominal geometry in shape and location. A method for determining deviations of the shape and arrangement of real spatial elements from the nominal shape and location is considered.*

**Keywords:** nominal element, real element, coordinate system of project, coordinate system of measurement, deflection shape, deviation of location, shape and location error.

**И**зделия машиностроения<sup>1</sup> — результат сборки совокупности деталей. На ранних этапах проектирования<sup>2</sup> геометрии облика изделий их рассматривают как недеформируемые. Изделие проектируют

<sup>1</sup>Изделие — единица промышленной продукции, количество которой может исчисляться в штуках (экземплярах). К изделиям относят детали, комплекты, сборочные единицы, комплексы. См ГОСТ 2.102—68(1995).

<sup>2</sup>Ранние этапы проектирования — этапы технического предложения (ТП) и эскизного проекта (ЭП), на которых формируется облик номинальной геометрии поверхностей изделия.

в системе координат проекта с номинальной геометрией поверхностей<sup>1</sup>, ограничивающих объемы деталей и сборочных единиц либо в виде 2D чертежей, либо объемными моделями в 3D пространстве.

Все реальные поверхности<sup>2</sup> детали имеют отклонения формы (шероховатость, волнистость) и расположения реальных поверхностей по сравнению с формой и расположением номинальных поверхностей в проекте. Их ограничивают допусками и вносят в чертеж детали или в технические условия (ТУ) на приемку изделия. С помощью измерений реальной геометрии детали определяют величину отклонений формы и расположения всех поверхностей, сравнивают с допустимыми по ТУ и подразделяют изделия на *принятые* (годные) и *брак* (неисправимый или исправимый).

После оценки действующих нагрузок, приложенных к недеформируемым изделиям, определяют величину напряжений и деформаций<sup>3</sup> деталей и результатов их сборки друг с другом, по этим величинам судят о геометрии деформируемого изделия, на основании анализа которого оценивают влияние точности формирования реальных поверхностей изделия на точность выходных параметров собранного изделия. Для точного представления о недеформируемом изделии необходимо решить множество взаимосвязанных задач.

Одна из первых задач сводится к однозначному определению величины отклонений формы и расположения реальных поверхностей детали по данным измерения координат точек реальных поверхностей изделия в системе координат системы измерения по сравнению с формой и расположением номинальных поверхностей в проекте.

Все этапы проектирования геометрии изделия сопровождаются комплектом конструкторской и технологической документации, выполненной в соответствии с действующими нормативными документами [1, 2]. Наименьшей частью изделия является деталь. Нормативная база представления геометрии изделий в проектной конструкторской и технологической документации изложена в действующих основополагающих стандартах [3, 4]. В соответствии с ГОСТ [3] все геометрические элементы детали (поверхности, линии, точки) называют *элементами*. Все множество геометрических элементов, используемых в геометрии деталей, можно условно разделить на элементы с кривизной<sup>4</sup> (несимметричные, осесимметричные) и без кривизны (прямая линия и плоскость)

Информацию о реальной геометрии элементов детали можно получить только измерением координат точек реальных элементов в системе координат системы измерения с помощью координатно-измерительных машин (КИМ) как на плоскости, так и в пространстве.

В связи с тем, что нормативная база представления геометрии изделий [3, 4] отстала от требований времени, необходимо уточнить способы представления реальной геометрии в терминах, сложившихся в теории и практике оценки геометрии деталей машиностроения.

**Отклонение формы реального элемента** в отличие от ГОСТ [3] предлагается определять как отклонение точек реальной геометрии элемента от номинальной геометрии, определяемое по нормали к прилегающему элементу в пределах нормируемого участка. Стандарт [3], вступая в противоречие с собственным определением, предлагает в качестве отсчетного элемента для определения отклонения формы геометрических элементов с кривизной и без

<sup>1</sup>Номинальная геометрия поверхностей — геометрия, заданная в технической документации без учета допускаемых отклонений формы (неровностей) и расположения.

<sup>2</sup>Реальная поверхность — поверхность, ограничивающая реальное тело и отделяющая его от окружающей среды.

<sup>3</sup>Для этого используют конечно-элементные САЕ системы: NASTRAN, ANSYS и т. д.

<sup>4</sup>Кривизна — собирательное название ряда количественных характеристик (скалярных, векторных, тензорных), описывающих отклонение того или иного геометрического «объекта» (кривой, поверхности, риманова пространства и т. д.) от соответствующих «плоских» объектов (прямая, плоскость, евклидово пространство и т. д.).

нее использовать либо *прилегающий*<sup>1</sup> либо *средний*<sup>2</sup> элементы. Прилегающий элемент, имеющий форму номинального, неоднозначен, что недопустимо для использования его при техническом контроле элемента после изготовления. Средний элемент однозначен, поскольку имеет дело с конечным множеством точек реального элемента для определения минимума суммы квадратов отклонений от отсчетного элемента, имеющего форму номинального. Оба варианта отличаются от номинального по уравнению в системе координат системы измерения.

Для определения отклонений формы остается только один вариант — *номинальный элемент*, или *номинальная геометрия элемента в системе координат проекта*, что полностью по смыслу соответствует стандарту [3].

Возникает проблема: как определить расположение *системы координат проекта с номинальным элементом* в системе координат системы измерения для определения отклонения формы реального элемента?

## Основной результат и доказательство

Геометрия реального элемента с кривизной может быть как больше, так и меньше номинальной геометрии элемента. Для того чтобы однозначно «привязать» систему координат проекта с номинальной геометрией элемента с кривизной к геометрии реального элемента в системе координат системы измерения воспользуемся *эквидистантой*<sup>3</sup> к номинальной геометрии элемента. Увеличивая или уменьшая величину эквидистанты к номинальному элементу и перемещая систему координат проекта в системе координат системы измерения, определим наименьшую эквидистанту, при которой сумма квадратов отклонений точек реального элемента в системе координат системы измере-

ния от эквидистанты будет самой минимальной из возможных. Искомый «минимум» возможен только при одном единственном значении эквидистанты с учетом величины эквидистанты и направления ее смещения. Поскольку эквидистанта к любому элементу строится в той же системе координат, что номинальный элемент, то в этом случае система координат номинального элемента займет искомое положение в системе координат системы измерения и отклонение формы реального элемента можно определить от номинального элемента в соответствии с определением отклонения формы. Определенное таким образом положение номинальной системы координат номинального элемента и будет *положением системы координат реального элемента в системе координат системы измерения*.

Рассмотрим плоскую задачу для элемента, имеющего кривизну. Пусть в системе координат проекта (рис. 1, а) задана номинальная геометрия элемента. Этот элемент обладает кривизной и легко определить расстояние любой точки до дуги.

В системе координат проекта  $X_1 O_1 Y_1$  элемент — дуга окружности радиуса  $R$ , описываемая нормальным уравнением окружности с началом в точке  $X_1 H_1$ ,  $Y_1 H_1$  и концом в точке  $X_1 K_1$ ,  $Y_1 K_1$ .

Расстояние (от любой точки реального элемента с координатами  $X_1 i$ ,  $Y_1 i$ , лежащей вблизи дуги до дуги радиуса  $R$  :

$$\varepsilon = [(X_1 i - X_1 C_1)^2 + (Y_1 i - Y_1 C_1)^2]^{0.5} - R.$$

Кривая, полученная с помощью (координационно-измерительной машины (КИМ), в системе координат системы измерения  $X^* O^* Y^*$ , соответствует реальному профилю и мало похожа на исходную дугу в связи с неизбежными погрешностями ее изготовления.

<sup>1</sup>*Прилегающий элемент* — элемент, имеющий форму номинального, соприкасающийся с реальным и расположенный вне материала детали так, чтобы отклонение от наиболее удаленной точки реального элемента поверхности в пределах нормируемого участка имело минимальное значение.

<sup>2</sup>*Средний элемент* — элемент, имеющий форму номинального и такие размеры и/или расположение, чтобы сумма квадратов расстояний между реальным и средним элементами в пределах нормируемого участка имела минимальное значение.

<sup>3</sup>*Эквидистанта* — геометрическое место точек, равноудаленных от некоторой фиксированной кривой или поверхности.

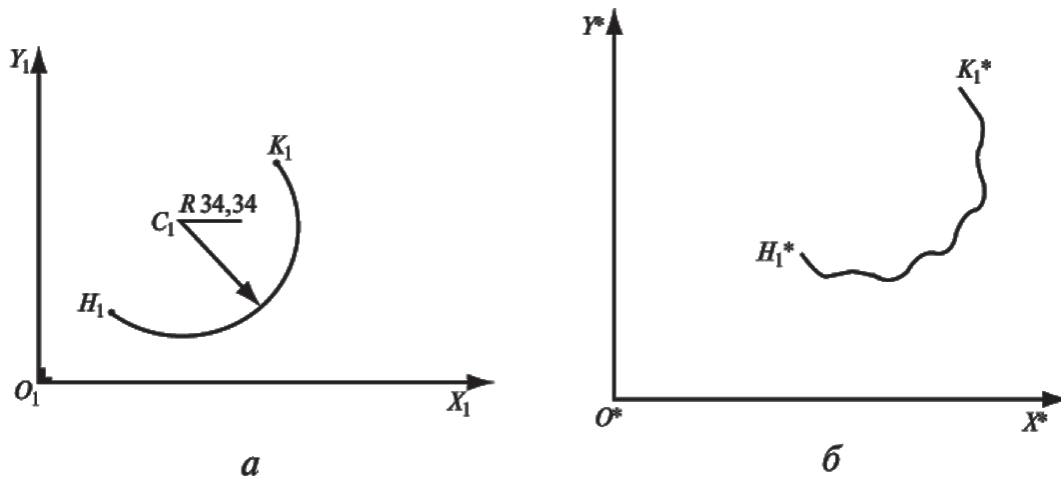


Рис. 1. Геометрия элемента:

*a* — номинальная в системе координат проекта; *б* — реальная в системе координат системы измерения

Эту кривую в соответствии с теоремой Котельникова — Найквиста дискретизируют<sup>1</sup> набором точек. Множество точек кривой и две характерных точки на концах дуги  $H_1^*$  и  $K_1^*$  соответствуют дуге круга радиуса  $R$  (рис. 1, б). Поместим в этот массив точек номинальную систему координат с номинальной геометрией по известному правилу минимума суммы квадратов отклонений реальных точек от номинального профиля, обеспечивающему однозначность результата.

Для точного выполнения этого процесса необходимо:

- определить расстояния от точек дискретизации до номинальной дуги в каком-либо случайном положении номинальной системы координат элемента, характеризуемом положением начала  $O_1$  в системе координат системы измерения  $X^*O^*Y^*$ , определяемым случайными значениями вектора  $R$  и матрицы направляющих косинусов  $A$ ;
- вычислить сумму квадратов расстояний от номинальной геометрии при этом случайном положении;
- разработать алгоритм поиска значений  $R^*$  и  $A^*$  при которых сумма квадратов отклонений будет минимальной.

Решив все перечисленные задачи в системе координат системы измерения, получим точное

положение в ней системы координат проекта с номинальной геометрией элемента (рис. 2, а).

Полученный результат показывает:

- метод наименьших квадратов позволяет однозначно определить положение номинальной системы координат номинального элемента в системе координат системы измерения;
- форма реального элемента похожа на номинальный элемент;
- величина реального элемента отличается от величины номинального элемента, поскольку точки  $H_1$ ,  $H_1^*$  и  $K_1$ ,  $K_1^*$  не совпадают.

Вследствие несовпадения точек  $H_1$ ,  $H_1^*$  и  $K_1$ ,  $K_1^*$  использование номинального элемента в качестве среднего элемента непригодно для определения отклонения формы реальной геометрии от номинальной, поскольку номинальный элемент имеет одну *номинальную величину*, а реальный элемент может иметь *величину* как больше, так и меньше номинальной (рис. 2, а).

Как учесть *величину* реального элемента?

Для этого сформируем эквидистанту к номинальному элементу в системе координат проекта. Кривизна дуг отлична от нуля. Характерные точки начала и конца дуги при определении координат одноименных характерных точек на эквидистанте смещаются по нормали к дуге и расстояния между ними увеличиваются или уменьшаются по отношению к номинальной геометрии.

<sup>1</sup>Дискретизировать — заменить непрерывный процесс набором дискретных значений.

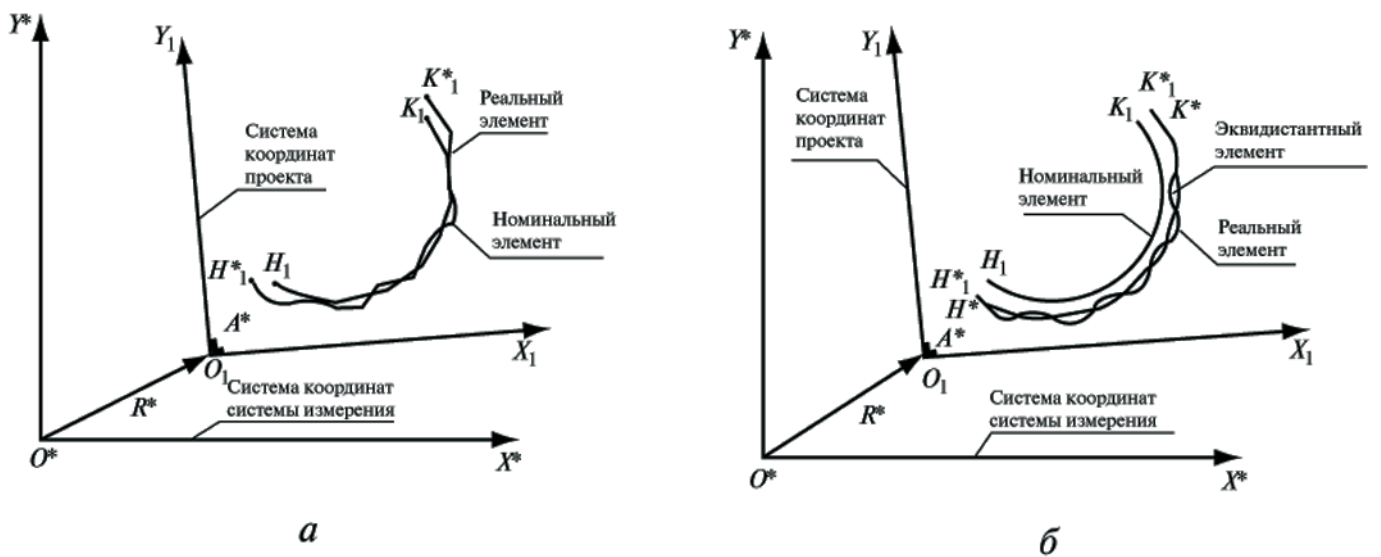


Рис. 2. Привязка системы координат номинальной геометрии элемента к реальной геометрии:

а — по номинальной геометрии элемента; б — по эквидистанте к номинальной геометрии

Увеличивая или уменьшая величину эквидистанты, определяют эквидистанту, при которой сумма квадратов отклонений точек реального элемента будет наименьшей из возможных. Искомый «минимум минимум» возможен только при одном единственном значении эквидистанты. Положение номинальной системы координат номинального элемента, соответствующее минимальной сумме квадратов отклонений точек реального элемента. Оно и будет искомым *положением реальной системы координат реального элемента в системе координат системы измерения.*

Заметим, что точки начала  $H'$  и конца  $K'$  эквидистанты смещены относительно начала  $H$  и конца  $K$  номинального элемента также по нормали к номинальному элементу (см. рис. 2, а). Эти точки можно использовать для оценки величины эквидистанты к номинальному элементу в системе координат проекта. Если подобрать эквидистанту к номинальной геометрии в системе координат проекта такую, чтобы ее точки  $H'_1$  и  $K'_1$  совпали с точками  $H_1^*$  и  $K_1^*$  в системе координат системы измерения, то положение системы координат проекта можно считать системой координат дуги в системе координат системы измерения  $X^*O^*Y^*$  (рис. 2, б).

Вектор  $R^*$  и матрица направляющих косинусов  $A^*$  определяют положение системы координат проекта элемента в системе координат системы измерения, а расстояние точек реальной геометрии элемента от номинальной — отклонение формы элемента. Повторяя описанную процедуру для всех реальных элементов с кривизной, ограничивающих геометрические элементы детали по эквидистантам к номинальным элементам, получим взаимное расположение их в системе координат системы измерения.

**Отклонение расположения реального элемента** определяют по отличию расположения систем координат реальных элементов в системе координат системы измерения от расположения систем координат номинальных элементов в системе координат проекта по отношению к выбранной базе<sup>1</sup>. Такой выбранной базой [4] может быть система координат одного из элементов как в системе координат проекта, так и аналогичного ему в системе координат системы измерения.

Рассмотрим задачу определения отклонения расположения двух дуг от их номинального расположения в системе координат проекта. Пусть в системе координат проекта задана но-

<sup>1</sup>Выбранная база — система координат, относительно которой определяется положение систем координат элементов.

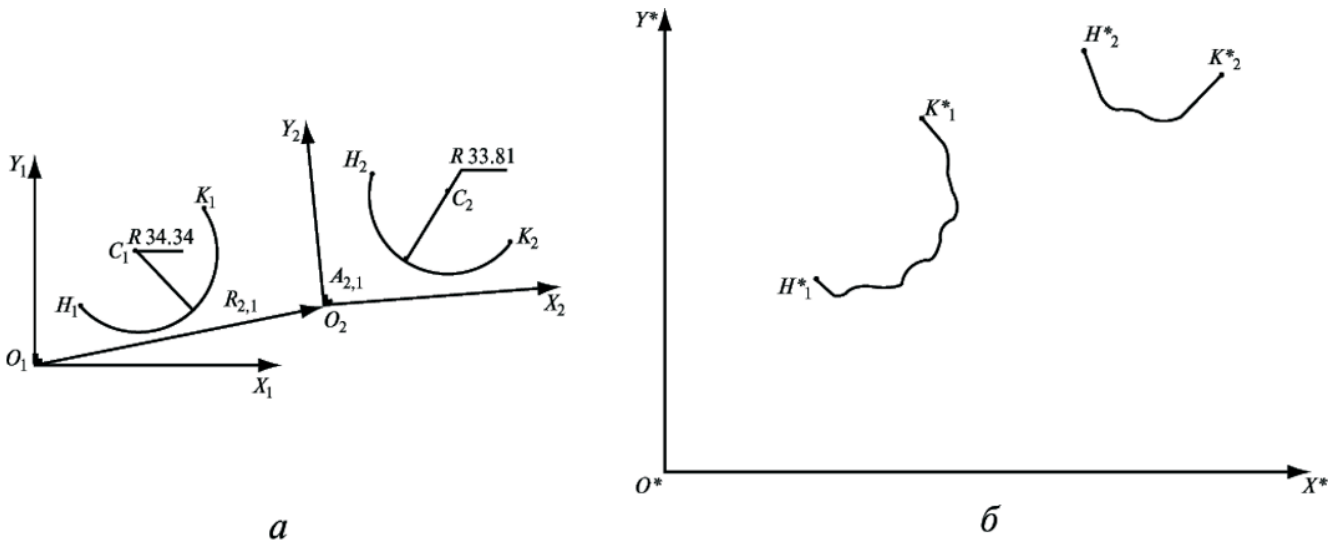


Рис. 3. Взаимное расположение элементов:  
а — номинальных; б — реальных

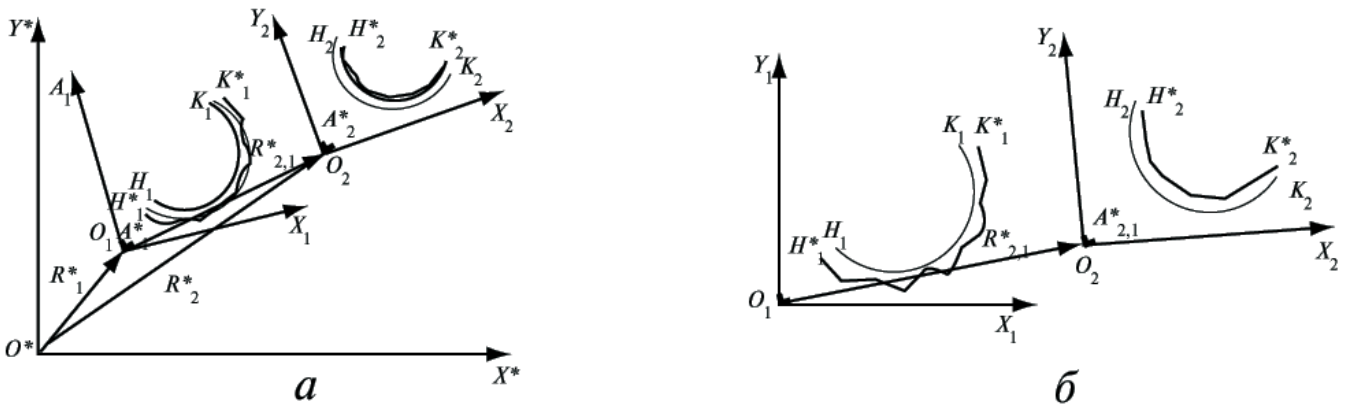


Рис. 4. Взаимное расположение элементов в системе координат базы:  
а — в системе координат системы измерения; б — в системе координат базы

минальная геометрия двух дуг, каждая из которых представлена в номинальной системе координат элемента (рис. 3, а).

После измерения получим измеренные реальные элементы в системе координат системы измерения  $X^*O^*Y^*$  (рис. 3, б). Прделав с ними описанные выше процедуры по вписыванию эквидистанты к номинальной геометрии элемента в системах координат проекта, имеющей наименьшую из возможных сумму квадратов отклонений от реальной геометрии, получим расположение систем координат проекта элементов  $X_1, O_1, Y_1$  и  $X_2, O_2, Y_2$  в системе координат системы измерения  $X^*O^*Y^*$  (рис. 4, а). Для того чтобы это положение в системе координат системы измерения  $X^*O^*Y^*$  совпало с положением тех же номинальных систем координат

в системе координат проекта, надо за базу выбрать систему координат  $X_1O_1Y_1$  (рис. 4, б). Если в системе координат базы рассматривать относительное расположение систем координат  $X_1O_1Y_1$  и  $X_2O_2Y_2$  (например, системы координат  $X_2O_2Y_2$  по отношению к системе координат базы  $X_1O_1Y_1$ ), то разницу их относительного расположения как по положению начал координат,  $O_2$  относительно  $O_1$ , определяемую радиус-векторами  $R_{2,1}$  и  $R^*_{2,1}$ , так и по разнице матриц направляющих косинусов  $A_{2,1}$  и  $A^*_{2,1}$  (рис. 5).

В системе координат базы  $X_6O_6Y_6$  (рис. 5, а) номинальная система координат элемента  $X_nO_nY_n$  определена радиус-вектором  $R_n$  и матрицей направляющих косинусов  $A_n$ ; система координат реального элемента  $X_pO_pY_p$  — ра-

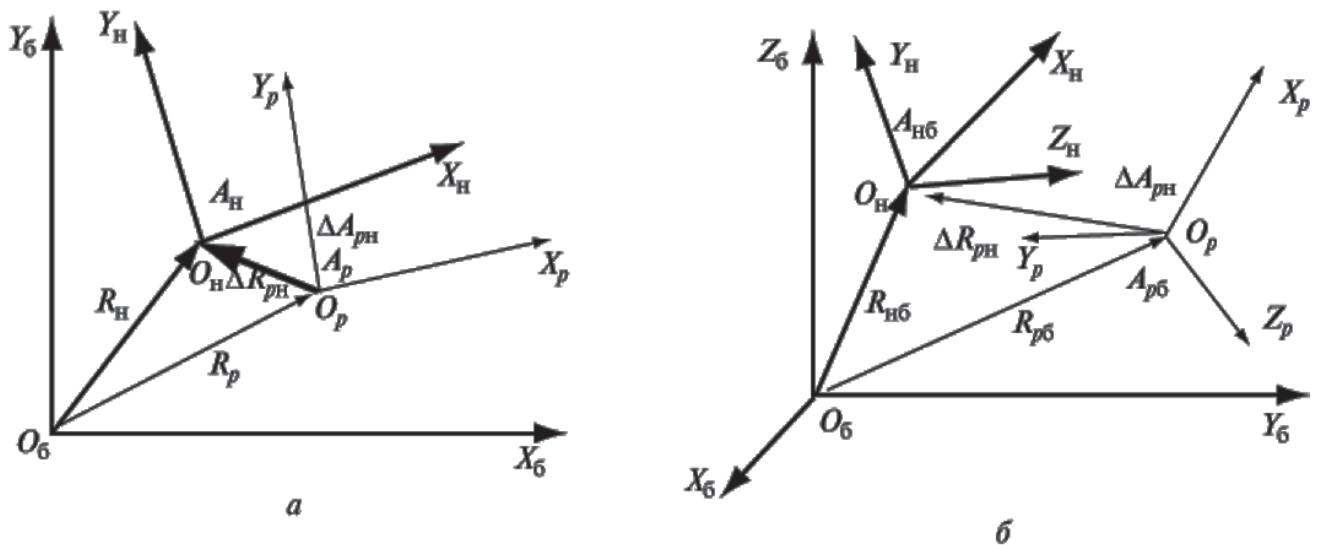


Рис. 5. Погрешности расположения элементов:  
 а — в 2D-пространства; б — в 3D-пространства

диус-вектором  $R_p$  и матрицей направляющих косинусов  $A_p$ . Расположение реальной системы координат относительно номинальной системы координат определяется вектором  $\Delta R_{pn}$  и матрицей направляющих косинусов  $\Delta A_{pn}$ .

Здесь

$$\Delta R_{pn} = A_n^T (R_p - R_n);$$

$$\Delta A_{pn} = A_n^T A_p$$

где  $A_n^T$  — транспонированная матрица  $A_n$ .

На рис. 5, б представлена схема погрешностей в 3D-пространстве [5].

Параметры  $\Delta R_{pn}$  и  $\Delta A_{pn}$  являются погрешностями расположения по месту и углу, а отклонения формы реального элемента от номинального можно считать погрешностями формы.

Такой же подход к элементу с кривизной, равной нулю, неприемлем. Эквидистанта к прямой будет та же прямая линия и расстояния между одноименными характерными точками будут одинаковы. Поэтому для элемента без кривизны среднюю линию определяют как прямую ортогональной средней квадратической регрессии [6], называемую *линией ортогональной регрессии*. Пользуясь распространенной механической аналогией, точкам реального элемента в 2D-пространстве, представляемого в системе координат проекта прямой линией, в системе координат системы измерения соответствуют точки  $x_i, y_i$ , которым приписывают единичные массы. Положение этой прямой

проходит через центр тяжести системы точек, а направление совпадает с осью вращения, обеспечивающей данной механической системе наименьший момент инерции. Номинальная система координат элемента в этом случае привязана к прямой линии.

Все сказанное выше справедливо для плоских (2D) элементов с кривизной переносится формально и на пространственные (3D) элементы. Для плоскости по координатам измеренных точек реальной поверхности в системе координат системы измерения необходимо найти точку, через которую проходит средняя плоскость и направление нормали к плоскости.

### Основные результаты

Представленное доказательство имеет существенное значение для практики машиностроения.

1. Для координатно-измерительных машин — систему обработки данных измерения деталей, ограниченных реальными поверхностями, с точным определением отклонений формы и расположения поверхностей.

2. Для инженерной компьютерной графики — систему моделирования геометрии недеформируемых деталей с реальными поверхностями, позволяющую еще на ранних стадиях проектирования облика изделия учесть отклонения формы и расположения элементов,

которые учитывают возможности используемых средств производства.

## Выводы

1. Проведенный анализ адекватности представления измеренной реальной геометрии поверхностей недеформируемой детали в действующих отечественных нормативных документах показал, что выбор *прилегающих отсчетных элементов* неприемлем из-за нереализуемости, несоответствия отсчетной геометрии номинальной и неоднозначности, недопустимой и для технических измерений. *Средние отсчетные элементы* однозначны, но также не соответствуют номинальной геометрии.

2. Однозначная привязка системы координат проекта номинального геометрического элемента, имеющего кривизну, к системе координат системы измерения с измеренным реальным элементом может быть осуществлена по наименьшей из возможных эквидистант к геометрическому элементу в системе координат проекта, обеспечивающей минимум суммы квадратов отклонений измеренных точек от минимальной эквидистанты.

3. Для элементов, не имеющих кривизны (плоскость), положение их в системе координат системы измерения определяется положением центра тяжести массива точек реального элемента, а ориентация в системе координат системы измерения в 3D-пространстве соответствует направлению нормали к плоскости, вписанной в этот же массив по минимуму суммы квадратов отклонений измеренных точек от плоскости.

4. Отклонение формы реального элемента в системе координат системы измерения от номинального элемента СК проекта имеет две компоненты:

- 1) эквидистантное смещение относительно номинальной поверхности;
- 2) искривление номинальной поверхности, аналогичное по смыслу волнистости и шероховатости.

5. Отклонение расположения системы координат реального элемента от его номинального расположения в системе координат элемента, принятого за базу, также имеет две компоненты:

- 1) смещение системы координат реального элемента относительно системы координат номинального элемента;
- 2) поворот системы координат реального элемента относительно системы координат номинального элемента.

## Литература

1. ГОСТ 2. 103—68. ЕСКД. Стадии разработки.
2. ГОСТ 3.1102—81 ЕСТД. Стадии разработки и виды документов.
3. ГОСТ 24642—81. Допуски формы и расположения поверхностей.
4. ГОСТ 21495—76. Базирование и базы в машиностроении.
5. *Тарасов В.А., Кашиба Л.А.* Теоретические основы технологии ракетостроения. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 351 с.
6. *Дунин—Барковский И.В., Карташова А.Н.* Измерения и анализ шероховатости, волнистости и некруглости поверхности. М., Машиностроение. 1978. 231 с.

Статья поступила в редакцию 12.12.2011