

Машиностроение и машиноведение

УДК 539.6.013.42

doi: 10.18698/0536-1044-2024-01-31-40

Устойчивость упруго закрепленного трубопровода

В.П. Радин, В.П. Чирков, В.Э. Цой

НИУ «МЭИ»

Stability of the elastically fixed pipeline

V.P. Radin, V.P. Chirkov, V.E. Tsoy

National Research University — Moscow Power Engineering Institute

Исследована устойчивость трубопровода, левый конец которого закреплен в упругой шарнирной опоре и дополнительно опирается на две упругие опоры. Уравнение возмущенного движения решено с применением метода разложения решения по формам собственных колебаний с дальнейшим использованием процедуры метода Бубнова — Галеркина. Применены два варианта систем собственных форм: стержня с упругими опорами и стержня, закрепленного на одном конце. В первом случае частоты и формы собственных колебаний определены с применением метода начальных параметров, во втором реакции упругих опор введены в уравнения с помощью дельта-функции. На плоскости параметров, характеризующих скорость и погонную массу протекающей по трубопроводу жидкости, построена граница области устойчивости с варьированием жесткостей упругих опор.

Ключевые слова: упруго закрепленный трубопровод, прямолинейная форма равновесия, параметры потока жидкости, границы области устойчивости

The paper studies stability of a pipeline, which left end is fixed in the elastic hinged support and rests on two additional elastic supports. The perturbed motion equation was solved using the method of solution decomposed into the natural oscillation modes with further use of the Bubnov-Galerkin method procedure. Two options of the rod own shape systems were used: with the elastic supports and fixed only at one end. In the first case, natural frequencies and shapes were determined using the initial parameters method. In the second case, the elastic supports reaction was introduced into the equations using the delta function. The stability region boundary with varying rigidities of the elastic supports was constructed based on the parameter plane characterizing the liquid flow speed and linear mass.

Keywords: elastically fixed pipeline, rectilinear equilibrium form, liquid flow parameters, stability region boundaries

Несмотря на почти столетний период развития исследования устойчивости систем при неконсервативном нагружении, интерес ученых к этому разделу механики не снижается. Это связано с увеличением области применения результатов таких исследований и расширением

выявленных особенностей, свойственных неконсервативным системам.

Изложенное относится и к задачам устойчивости трубопроводов с протекающей по ним жидкостью, которым, начиная с пионерской работы Пайдуссиса [1], посвящено много пуб-

ликаций, например [2–7]. Применяются различные методы, являющиеся той или иной интерпретацией динамического исследования устойчивости [8]: метод разложения по некоторым базисным функциям, метод конечных элементов и метод дифференциальных квадратур. Усложняются расчетные схемы по свойствам материалов и конструктивному исполнению устройств, исследуемых на устойчивость [9, 10], изучается устойчивость нанотрубок [4, 11].

Большая часть работ по устойчивости трубопроводов предполагает постоянство скорости протекающей жидкости. В тех технических устройствах, где можно использовать трубопроводы с переменной скоростью протекания жидкости, изучаются параметрические колебания.

Так, в трудах [12–15] исследованы параметрические резонансы при гармоническом изменении скорости протекания жидкости по трубопроводу. Показано, что на характер поведения трубопровода и тип потери его устойчивости существенно влияет способ его закрепления. Некоторые результаты в этом направлении приведены в работе [16].

Цель работы — исследование устойчивости упруго закрепленного трубопровода.

Постановка задачи. Рассмотрим прямолинейный трубопровод, один конец которого будем считать упруго закрепленным в шарнирной опоре с коэффициентом жесткости на изгибный поворот сечения c_0 , а другой — свободным от закрепления (рис. 1). Кроме того, в сечениях A и B трубопровод опирается на две упругие опоры жесткостью c . Длины пролетов l_0 принимаем одинаковыми. Несложно обобщить задачу и на случай различных жесткостей опор и геометрических характеристик их расположения.

По трубопроводу, расчетная схема которого принята как стержень с прямолинейной осью, длиной l , изгибной жесткостью EI и погонной массой m_0 , со скоростью v движется жидкость погонной массой m . Поперечные перемещения

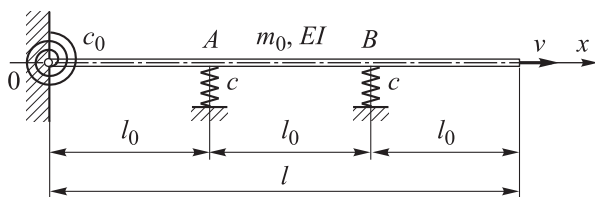


Рис. 1. Схема упруго закрепленного трубопровода

сечений трубопровода обозначим через $w(x, t)$, где x — продольная координата; t — время.

Будем трактовать жидкость как подвижную нагрузку на трубопровод с интенсивностью сил инерции, равной $-m d^2 w / dt^2$. Здесь под оператором d^2 / dt^2 понимаем полную производную по времени, вычисляемую следующим образом:

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Первый член в правой части этого выражения учитывает обычную нормальную силу инерции Даламбера. Второй член соответствует кориолисову ускорению из-за поворота потока частиц жидкости. Третий член связан с центробежными силами, определяемыми кривизной потока при колебаниях трубопровода.

Уравнение малых колебаний около невозмущенной прямолинейной формы равновесия ($w \equiv 0$) запишем как

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (m_0 + m) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2mv \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + mv^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sum_{k=1}^2 c w_k \delta(x - x_k) = 0, \quad (1)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция, с помощью которой учтены реакции опор в сечениях трубопровода $x_1 = l_0 = l/3$ и $x_2 = 2l_0 = 2l/3$; k — номер пролета.

Уравнение (1) необходимо дополнить граничными условиями, которые будут обсуждены при определении собственного спектра системы.

Введем следующие безразмерные параметры:

$$\xi = x/l; \quad \tau = \omega_0 t; \quad \omega_0 = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m_0}}; \quad \mu = \frac{m}{m_0 + m}; \quad (2)$$

$$\alpha = v \sqrt{\frac{ml^2}{EI}}; \quad \gamma_0 = \frac{c_0 l^2}{EI}; \quad \gamma = \frac{cl^4}{EI},$$

где ξ — координата; τ — время; ω_0 — характерная частота; μ — относительная масса жидкости; α — безразмерная скорость протекания жидкости; γ_0 — жесткость упругого шарнира; γ — жесткость упругих опор.

С учетом безразмерных параметров уравнение возмущенного движения (1) принимает вид

$$(1 - \mu) \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + 2\alpha \sqrt{\mu(1 - \mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \tau} + \alpha^2 (1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + (1 - \mu) \sum_{k=1}^2 \gamma \delta(\xi - \xi_k) = 0, \quad (3)$$

где ξ_k — безразмерная координата k -го пролета.

Определение спектра собственных колебаний.

Границы области устойчивости на плоскости параметров потока жидкости $\mu-\alpha$ будем строить с помощью метода разложения решения уравнения возмущенного движения по формам собственных колебаний пустого трубопровода. Определим спектр собственных колебаний системы со всеми упругими опорами (рис. 2).

В этом случае уравнение возмущенного движения (1), решение которого предполагалось представить в виде ряда по формам собственных колебаний, следует принять без членов, учитывающих реакции опор в сечениях A и B , так как работа этих опор будет учтена в соответствующих собственных формах, т. е.

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (m_0 + m) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2mv \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + mv^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

или с учетом соотношений (2) в безразмерном виде

$$(1-\mu) \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + 2\alpha\sqrt{\mu(1-\mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \tau} + \alpha^2(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0. \quad (4)$$

Для определения собственного спектра трубопровода как упруго закрепленного стержня воспользуемся методом начальных параметров. Для удобства аналитических вычислений введем местную безразмерную координату для каждого пролета $\xi' = x/l_0$ и принимающую значения в диапазоне $0 \leq \xi' \leq 1$. Пронумеруем характерные сечения так, как это показано на рис. 2.

Уравнения свободных изгибных колебаний для прогиба $w_k(x, t)$ каждого пролета трубопровода при $0 \leq x \leq l_0$ запишем как

$$EI \frac{\partial^4 w_k}{\partial x^4} + m_0 \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Решения уравнений свободных изгибных колебаний для прогиба представим в виде

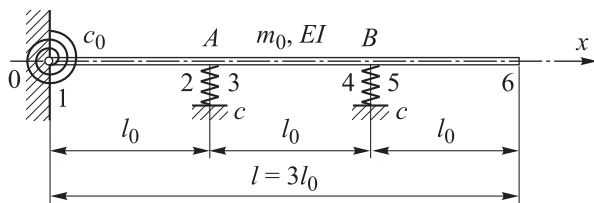


Рис. 2. Схема к определению спектра собственных колебаний системы со всеми упругими опорами:
1-6 — номера сечений

$$w_k(x, t) = \varphi_k(x) \sin(\omega t - \chi),$$

где $\varphi_k(x)$ — k -я форма колебаний системы; ω — частота собственных колебаний системы; χ — начальная фаза.

В случае безразмерной координаты ξ' для формы колебаний $\varphi_k(\xi')$ имеем уравнение

$$\frac{d^4 \varphi_k}{d\xi'^4} - \beta'^4 \varphi_k = 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

где $\beta'^4 = \omega^2 m_0 l_0^4 / (EI)$.

Это уравнение дополним граничными условиями для левого конца первого пролета, где нормальный прогиб $w_1(x, t)$ равен нулю и где при повороте сечения на угол dw_1/dx возникает изгибающий момент $EI d^2 w_1/dx^2$, равный $c_0 dw_1/dx$, и для правого конца третьего пролета, где обращаются в нуль изгибающий момент и поперечная сила:

$$\begin{aligned} w_1 &= 0; \\ \frac{\partial^2 w_3}{\partial \xi'^2} &= \gamma'_0 \frac{\partial w_1}{\partial \xi'} \quad \text{при } \xi' = 0; \\ \frac{\partial^2 w_3}{\partial \xi'^2} &= \frac{\partial^3 w_3}{\partial \xi'^3} = 0 \quad \text{при } \xi' = 1. \end{aligned}$$

Условия стыковки решений в сечениях A и B на границах пролетов запишем как

$$w_k = w_{k+1}; \quad \frac{\partial w_k}{\partial \xi'} = \frac{\partial w_{k+1}}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial^2 w_k}{\partial \xi'^2} = \frac{\partial^2 w_{k+1}}{\partial \xi'^2}; \quad k = 1, 2.$$

Поперечная сила $Q_k = EI d^3 w_k/dx^3$ в этих же сечениях при переходе с k -го пролета на $(k+1)$ -й претерпевает скачок, равный усилию в опоре $c w_k$. Обозначая безразмерную жесткость упругих опор через $\gamma' = c l_0^3 / EI$, получаем

$$\frac{d^3 w_k}{d\xi'^3} - \gamma' w_k = \frac{d^3 w_{k+1}}{d\xi'^3}, \quad k = 1, 2.$$

Нормальную фундаментальную систему для случая собственных изгибных колебаний сформируем на основе функций Крылова [17] следующим образом:

$$\begin{aligned} K_1(\beta' \xi') &= \frac{1}{2} (\text{ch} \beta' \xi' + \cos \beta' \xi'); \\ K_2(\beta' \xi') &= \frac{1}{2} (\text{sh} \beta' \xi' + \sin \beta' \xi'); \\ K_3(\beta' \xi') &= \frac{1}{2} (\text{ch} \beta' \xi' - \cos \beta' \xi'); \\ K_4(\beta' \xi') &= \frac{1}{2} (\text{sh} \beta' \xi' - \sin \beta' \xi'). \end{aligned}$$

Учитывая свойства функций Крылова и принимая $\beta'\xi' = z$, запишем

$$\frac{d}{dz} K_1(z) = K_4(z); \quad \frac{d}{dz} K_2(z) = K_1(z);$$

$$\frac{d}{dz} K_3(z) = K_2(z); \quad \frac{d}{dz} K_4(z) = K_3(z).$$

Нормальная фундаментальная система решений Коши уравнения свободных колебаний, на основе которой образован вектор $\mathbf{K}(\beta'\xi')$, будет иметь вид

$$\mathbf{K}(\beta'\xi') = \begin{bmatrix} K_1(\beta'\xi') \\ \frac{1}{\beta'} K_2(\beta'\xi') \\ \frac{1}{\beta'^2} K_3(\beta'\xi') \\ \frac{1}{\beta'^3} K_4(\beta'\xi') \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Каждому сечению с номером i поставим в соответствие вектор

$$\mathbf{v}_i = [\varphi_i \quad \varphi'_i \quad M_i \quad Q_i]^T,$$

где φ_i — перемещение; φ'_i — угол поворота, $\varphi'_i = d\varphi_i / d\xi_i$; M_i и Q_i — изгибающий момент и поперечная сила.

С учетом граничных условий векторы для первого (упругий шарнир, $i=1$) и шестого (свободный конец, $i=6$) сечений трубопровода принимают соответствующий вид:

$$\mathbf{v}_1 = [0 \quad \varphi'_1 \quad \gamma_0 \varphi'_1 \quad Q_1]^T; \quad \mathbf{v}_6 = [\varphi_6 \quad \varphi'_6 \quad 0 \quad 0]^T.$$

Согласно методу начальных параметров, составим матрицу $\mathbf{K}(\beta'\xi')$ размера 4×4 , первая строка которой состоит из функций (5), вторая — из их первых производных, третья — из вторых производных, четвертая — из третьих производных от функций Крылова. При $\xi' = 0$ матрица становится единичной.

Матрица перехода, определяющая вектор в сечении конца пролета \mathbf{v}_{i+1} по вектору \mathbf{v}_i в сечении его начала, имеет вид

$$\mathbf{P}_{i,i+1} = \begin{bmatrix} K_1(\beta') & \frac{1}{\beta} K_2(\beta') & \frac{1}{\beta^2} K_3(\beta') & \frac{1}{\beta^3} K_4(\beta') \\ \beta' K_4(\beta') & K_1(\beta') & \frac{1}{\beta'} K_2(\beta') & \frac{1}{\beta'^2} K_3(\beta') \\ \beta'^2 K_3(\beta') & \beta' K_4(\beta') & K_1(\beta') & \frac{1}{\beta'} K_2(\beta') \\ \beta'^3 K_2(\beta') & \beta'^2 K_3(\beta') & \beta' K_4(\beta') & K_1(\beta') \end{bmatrix}.$$

Векторы \mathbf{v}_{i+1} и \mathbf{v}_i для нечетных номеров сечений i связаны соотношением

$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{P}_{i,i+1} \mathbf{v}_i.$$

Для четных номеров векторов при переходе через упругую опору имеем матрицу перехода

$$\mathbf{R}_{i,i+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и соотношение, связывающее векторы \mathbf{v}_{i+1} и \mathbf{v}_i ,

$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{R}_{i,i+1} \mathbf{v}_i. \quad (6)$$

Векторы, учитывающие граничные условия в системе, связаны следующим образом:

$$\mathbf{v}_6 = \mathbf{P}(\mathbf{R}\mathbf{P})^2 \mathbf{v}_1. \quad (7)$$

Введем следующие векторы:

$$\mathbf{m} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T; \quad \mathbf{n} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T;$$

$$\mathbf{p} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T.$$

С учетом соотношений (6) и (7) вычислим вспомогательные векторы

$$\mathbf{f} = \mathbf{P}(\mathbf{R}\mathbf{P})^2 (\mathbf{m} + \gamma_0 \mathbf{n}); \quad \mathbf{g} = \mathbf{P}(\mathbf{R}\mathbf{P})^2 \mathbf{p}.$$

Тогда связь между изгибающим моментом M_1 и поперечной силой Q_1 в заделке и вектором \mathbf{v}_6 , учитывающим краевые условия на свободном конце, определяется выражением

$$\varphi'_1 \mathbf{f}(\beta') + Q_1 \mathbf{g}(\beta') = \mathbf{v}_6 = \begin{bmatrix} \varphi_6 \\ \varphi'_6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Из условия нетривиальности решения однородной системы уравнений относительно φ_1 и Q_1 (третье и четвертое уравнения) имеем частотное уравнение

$$\Delta(\beta') = f_3(\beta') g_4(\beta') - f_4(\beta') g_3(\beta') = 0, \quad (8)$$

где $\Delta(\beta')$ — определитель этой системы.

Формула (8) есть трансцендентное уравнение относительно частотных параметров β' . После определения корней β'_k этого уравнения частоты собственных колебаний системы определяются как

$$\omega_k = \frac{\beta'^2_k}{l_0^2} \sqrt{\frac{EI}{m_0}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Чтобы проверить правильность аналитического построения уравнения (8), для частотных параметров β'_k проведены вычисления при поворотной жесткости шарнира $\gamma'_0 = 500$ и линейной жесткости опор A и B $\gamma' = 0,1$. В этом случае по существу имеем стержень длиной $3l_0$, заземленный на одном конце. В результате определены первые четыре частотных параметра

$$\beta'_1 = 0,665; \beta'_2 = 1,568; \beta'_3 = 2,618; \beta'_4 = 3,663.$$

Умножив эти значения на три, получим частотные параметры для стержня длиной l

$$\beta_1 = 1,995; \beta_2 = 4,705; \beta_3 = 7,855; \beta_4 = 10,988$$

и сравним их с табличными значениями, которые, как известно, являются корнями уравнения $\text{ch}\beta \cos\beta = -1$:

$$\beta_1 = 1,875; \beta_2 = 4,694; \beta_3 = 7,855; \beta_4 = 10,996.$$

С учетом конечного значения жесткости γ'_0 и ненулевых значений жесткостей γ' становится очевидным, что вычисления корней уравнения (8) дают правильный результат.

Формы собственных колебаний получим, объединив фрагменты форм в каждом пролете. Эти фрагменты для каждого i -го пролета и k -й формы определим согласно методу начальных параметров:

$$\varphi_{(i)k}(\beta'_k, \xi') = \mathbf{K}(\beta'_k \xi')^T \mathbf{v}_{(i)k}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Объединяя указанные фрагменты, получаем k -ю форму собственных колебаний системы

$$\varphi_k(\beta'_k \xi') = \bigcup_{i=1}^3 \mathbf{K}(\beta'_k \xi')^T \mathbf{v}_i. \quad (9)$$

Применение метода собственных функций для построения границ области устойчивости.

С учетом очевидных соотношений $\gamma = 27\gamma'$ и $\gamma_0 = 3\gamma'_0$ будем использовать безразмерные параметры, введенные в формулах (2). Представим решение уравнения возмущенного движения (4) $w(\xi, \tau)$ в виде ряда по собственным формам колебаний

$$w(\xi', \tau) = \mathbf{q}^T(\tau) \boldsymbol{\varphi}(\xi');$$

$$\mathbf{q}(\tau) = \begin{bmatrix} q_1(\tau) \\ q_2(\tau) \\ \dots \\ q_n(\tau) \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varphi}(\xi') = \begin{bmatrix} \varphi_1(\xi') \\ \varphi_2(\xi') \\ \dots \\ \varphi_n(\xi') \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где $\mathbf{q}(\tau)$ — вектор обобщенных координат; $\boldsymbol{\varphi}(\xi')$ — вектор форм собственных колебаний

пустого многопролетного трубопровода (здесь, в отличие от формулы (9), частотный параметр β'_k опущен), n — число удерживаемых членов ряда.

Запишем выражение (10) в скалярной форме

$$w(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^n q_k(\tau) \varphi_k(\xi). \quad (11)$$

После подстановки формулы (11) в уравнение возмущенного движения (4) применим метод Бубнова — Галеркина, для чего поочередно умножим члены уравнения на каждую форму собственных колебаний $\varphi_j(\xi')$, $j = 1, 2, \dots, n$, и проинтегрируем полученные выражения по ξ' .

В результате приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат $q_k(\tau)$, которую запишем в матричной форме

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + 2\alpha\sqrt{\mu(1-\mu)}\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + (1-\mu)(\mathbf{C} + \alpha^2\mathbf{D})\mathbf{q} = 0, \quad (12)$$

где $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ — матрицы размера $n \times n$,

$$\mathbf{A} = \int_0^3 \boldsymbol{\varphi}(\xi') \boldsymbol{\varphi}^T(\xi') d\xi';$$

$$\mathbf{B} = \int_0^3 \boldsymbol{\varphi}(\xi') \left[\frac{d\boldsymbol{\varphi}(\xi')}{d\xi'} \right]^T d\xi';$$

$$\mathbf{C} = \int_0^3 \boldsymbol{\varphi}(\xi') \left[\frac{d^4 \boldsymbol{\varphi}(\xi')}{d\xi'^4} \right]^T d\xi';$$

$$\mathbf{D} = \int_0^3 \boldsymbol{\varphi}(\xi') \left[\frac{d^2 \boldsymbol{\varphi}(\xi')}{d\xi'^2} \right]^T d\xi'. \quad (13)$$

Граница области устойчивости. Представим вектор обобщенных координат в виде

$$\mathbf{q}(\tau) = \mathbf{q}_0 \exp(\lambda\tau),$$

где λ — характеристический показатель.

Подставляя это выражение в уравнение (12), получаем алгебраическую проблему собственных значений в виде матричного полинома

$$\mathbf{P}_2 \lambda^2 + \mathbf{P}_1 \lambda + \mathbf{P}_0 = 0,$$

где $\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_0$ — коэффициенты-матрицы характеристического полинома,

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{A}; \quad \mathbf{P}_1 = 2\epsilon_e \mathbf{A} + 2\alpha\sqrt{\mu(1-\mu)}\mathbf{B} + \epsilon_i(1-\mu)\mathbf{C};$$

$$\mathbf{P}_0 = (1-\mu)(\mathbf{C} + \alpha^2\mathbf{D}).$$

Варьируя параметры протекающей по трубопроводу жидкости μ , α и фиксируя их значения, при которых хотя бы один характеристический показатель λ переходит в правую

полуплоскость, можно построить границу области устойчивости.

Кроме того, можно использовать критерий Рауса — Гурвица. Как показано в работе [17], равенство нулю главного минора матрицы Гурвица, составленной из коэффициентов характеристического уравнения (13), порядка $2n-1$, т. е. $\Delta_{2n-1} = 0$, определяет границу области флаттера, а равенство нулю определителя матрицы Гурвица (равенство нулю свободного члена характеристического полинома) — границу области дивергенции.

Точность построения границ области устойчивости методом нормальных координат зависит от числа удерживаемых членов в выражении (11). Как показано в работе [17], достаточная точность построения границы области устойчивости достигается при $n = 8$, что было принято для данного исследования.

По описанным алгоритмам составлена программа вычислений для построения границы области устойчивости на плоскости параметров потока жидкости $\mu - \alpha$. Проверим правильность расчетных формул. Для проверки вычислений частотных параметров построим границу флаттера для системы с теми же параметрами, с которыми проводились расчеты.

Как уже указывалось, выбранные жесткости крепления соответствуют тому, что система близка к трубопроводу, защемленному на одном конце, для которого границей флаттера служит известная кривая Пайдуссиса, показанная на рис. 3 тонкой линией.

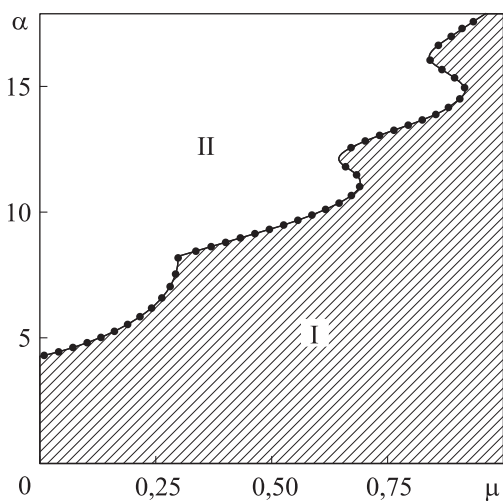


Рис. 3. Результаты проверки правильности определения границы устойчивости на плоскости параметров потока жидкости $\mu - \alpha$: I — область устойчивости; II — область флаттера

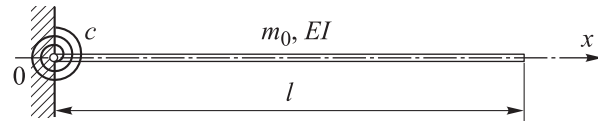


Рис. 4. Схема упруго закрепленного стержня без дополнительных опор

Результаты определения положения границы устойчивости системы (см. рис. 3, точки) указывают практически на совпадение с упомянутой кривой, построенной не только методом разложения по формам собственных колебаний, но и точным методом путем непосредственного интегрирования и применения методов оптимизации [17].

С учетом достаточного количества удерживаемых членов в выражении (11) можно использовать и более упрощенный вариант формирования системы собственных функций. Определим спектр собственных колебаний стержня с упруго закрепленным от поворота левым сечением (рис. 4)

Нахождение собственного спектра такой системы подробно изложено в работе [18]. Если принять для расчета собственные функции такой системы, то вместо уравнения возмущенного движения (4) необходимо использовать уравнение (3) с включенными в него реакциями упругих опор, т. е., как это было изначально в уравнении (1).

Применяя метод разложения и процедуру Бубнова — Галеркина, получаем уравнение в матричном виде

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + 2\alpha\sqrt{\mu(1-\mu)}\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + (1-\mu)\left(\mathbf{C} + \alpha^2\mathbf{D} + \gamma\sum_{k=1}^2\mathbf{F}_k\right)\mathbf{q} = 0.$$

Здесь \mathbf{F}_k — матрицы, характеризующие работу упругих опор,

$$\mathbf{F}_k = \boldsymbol{\varphi}(\xi_k)\boldsymbol{\varphi}^T(\xi_k), \quad \xi_k = 0 \dots 1,$$

где $\boldsymbol{\varphi}(\xi)$ — вектор форм собственных колебаний для схемы, показанной на рис. 4.

При жесткостях $\gamma_0 = 10$ и $\gamma = 100$ сравним результаты построения границы области флаттера с использованием системы первых форм собственных колебаний стержня с дополнительными опорами и без них (рис. 5).

Тонкая линия на рис. 5 соответствует границе флаттера для первого случая форм собственных колебаний. Точками отмечена кривая для второго варианта использования форм собственных колебаний с разложением решения

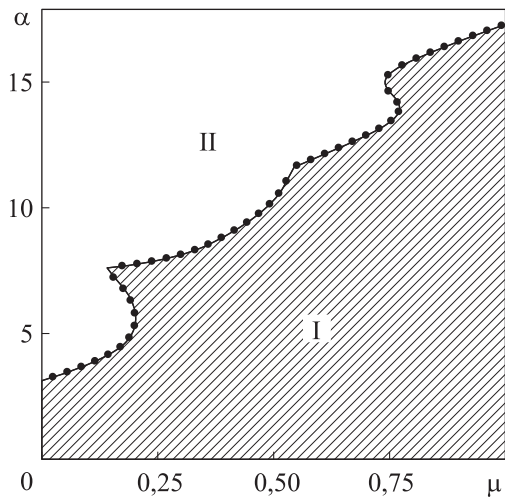


Рис. 5. Границы области флаттера для стержня с дополнительными опорами (—) и без них (•) при жесткостях $\gamma_0 = 10$ и $\gamma = 100$:
I — область устойчивости; II — область флаттера

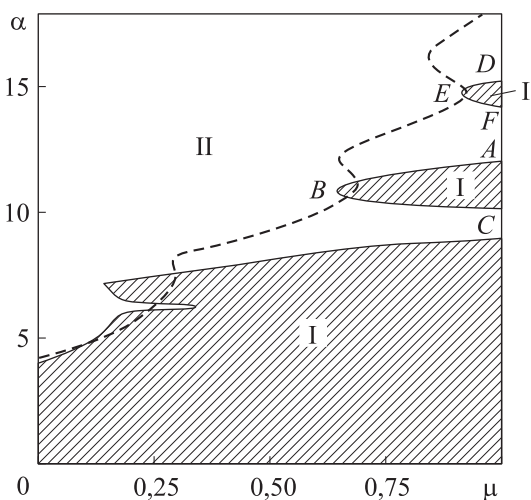


Рис. 6. Границы области устойчивости при поворотной жесткости шарнира стержня $\gamma_0 = 0,01$ и жесткости упругих опор $\gamma = 0$:
I — область устойчивости; II — область флаттера

уравнения возмущенного движения. Многочисленные вычисления при различных значениях параметров системы γ_0 и γ показали аналогичные совпадения.

Границы области устойчивости, полученные при поворотной жесткости шарнира стержня $\gamma_0 = 0,01$ и жесткости упругих опор $\gamma = 0$, приведены на рис. 6. В этом случае отрезок трубопровода по существу шарнирно закреплен на одном конце. Для сравнения штриховой линией показана кривая Пайдуссиса.

Здесь и далее сохраняется немонотонность границы устойчивости. Существенное снижение критических значений безразмерной ско-

рости протекания жидкости α наблюдается при $\mu > 0,25$. Другая особенность неконсервативных задач проявляется в том, что область устойчивости неодносвязная. Кроме основной области устойчивости, примыкающей к оси 0μ , имеются области ABC и DEF.

Границы области устойчивости, построенные при жесткости упругих опор $\gamma = 100$ и поворотной жесткости шарнира $\gamma_0 = 0,1; 2,5; 5,0$ и $10,0$, приведены на рис. 7. При малых значениях поворотной жесткости шарнира помимо части границы, соответствующей потере устойчивости по типу флаттера, имеются участки, соот-

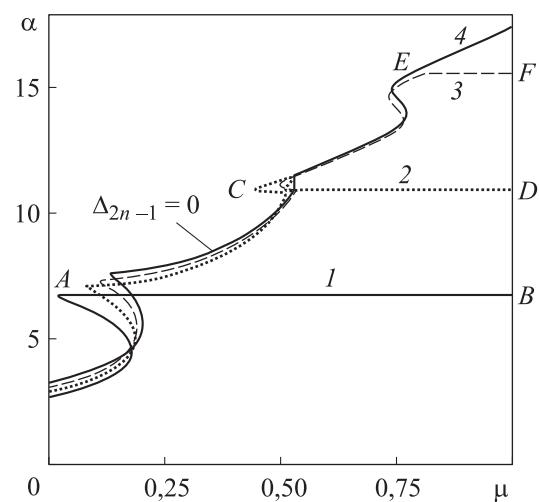


Рис. 7. Границы области устойчивости при жесткости упругих опор $\gamma = 100$ и поворотной жесткости шарнира $\gamma_0 = 0,1$ (1), 2,5 (2), 5,0 (3) и 10,0 (4)

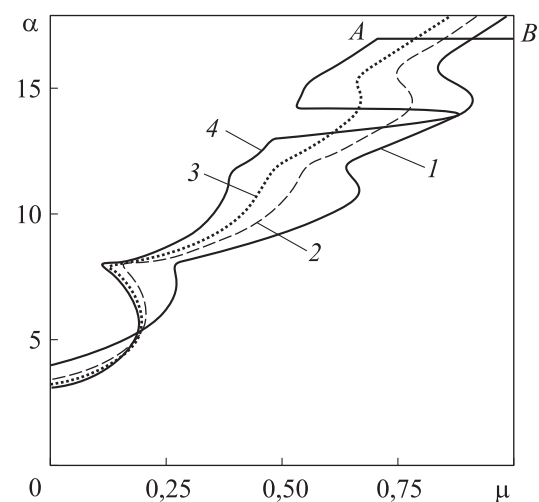


Рис. 8. Границы области устойчивости при поворотной жесткости шарнира $\gamma_0 = 50$ и жесткости упругих опор $\gamma = 10$ (1), 100 (2), 200 (3) и 400 (4)

ветствующие дивергенции. Это участок AB при $\gamma_0 = 0,1$ (кривая 1), участок CD при $\gamma_0 = 2,5$ (кривая 2) и участок EF при $\gamma_0 = 5,0$ (кривая 3). Для границы дивергенции характерна ее независимость от относительной массы жидкости μ . При $\gamma_0 = 10,0$ вся граница (кривая 4) принадлежит границе флаттера.

Если зафиксировать жесткость упругого шарнира $\gamma_0 = 50$ и увеличивать жесткость упругих опор (рис. 8), то будет наблюдаться эволюция кривой Пайдуссиса от классической формы при $\gamma = 10$ (кривая 1) с увеличением критических значений скорости потока жидкости (кривые 2 и 3). При $\gamma = 400$ (кривая 4) часть границы флаттера преобразуется в границу дивергенции AB .

Выводы

1. При применении метода разложения решения уравнения возмущенного движения для построения системы базисных функций можно использовать различные исходные системы, удовлетворяющие соответствующим условиям. При этом важным фактором является число членов ряда в разложении решения.

2. Показано, что различные способы крепления трубопровода существенно влияют не только на конфигурацию границы области устойчивости, но на тип потери устойчивости при пересечении этих границ. Это следует учитывать как при исследовании устойчивости, так и при расчетах на прочность.

Литература

- [1] Paidoussis M.P. Dynamics of tubular cantilevers conveying fluid. *J. Mech. Eng. Sci.*, 1970, vol. 12, no. 2, pp. 85–103, doi: https://doi.org/10.1243/JMES_JOUR_1970_012_017_02
- [2] Elishakoff I., Vittori P. A paradox of non-monotonicity in stability of pipes conveying fluid. *Theor. Appl. Mech.*, 2005, vol. 32, no. 3, pp. 235–282, doi: <https://doi.org/10.2298/TAM0503235E>
- [3] Marzani A., Mazzotti M., Viola E. et al. FEM formulation for dynamic instability of fluid-conveying pipe on nonuniform elastic foundation. *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, 2012, vol. 40, no. 1, pp. 83–95, doi: <https://doi.org/10.1080/15397734.2011.618443>
- [4] Bahaadini R., Hosseini M. Flow-induced and mechanical stability of cantilever carbon nanotubes subjected to an axial compressive load. *Appl. Math. Model.*, 2018, vol. 59, pp. 597–613, doi: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.02.015>
- [5] Wang L., Dai H., Ni Q. Nonconservative pipes conveying fluid: evolution of mode shapes with increasing flow velocity. *J. Vib. Control*, 2014, vol. 21, no. 16, pp. 3359–3367, doi: <https://doi.org/10.1177/1077546314522490>
- [6] Bahaadini R., Mohammad R.D., Mohammad H. et al. Stability analysis of composite thin-walled pipes conveying fluid. *Ocean Eng.*, 2018, vol. 160, pp. 311–323, doi: <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2018.04.061>
- [7] Tornabene F., Marzani A., Viola E. et al. Critical flow speeds of pipes conveying fluid using the generalized differential quadrature method. *Adv. Theor. Appl. Mech.*, 2010, vol. 3, no. 3, pp. 121–138.
- [8] Болотин В.В. *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*. Москва, Физматгиз, 1961. 340 с.
- [9] Askarian A., Permoon M., Zahedi M. et al. Stability analysis of viscoelastic pipes conveying fluid with different boundary conditions described by fractional Zener model. *Appl. Math. Model.*, 2022, vol. 103, no. 3, pp. 750–763, doi: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.11.013>
- [10] Aspelund S., Mukherjee R., Hellum A. Feedback-induced flutter instability of a flexible beam in fluid flow. *J. Sound Vib.*, 2023, vol. 547, art. 117488, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2022.117488>
- [11] Hosseini M., Bahaadini R., Jamali B. Nonlocal instability of cantilever piezoelectric carbon nanotubes by considering surface effects subjected to axial flow. *J. Vib. Control*, 2016, vol. 24, no. 9, pp. 1809–1825, doi: <https://doi.org/10.1177/1077546316669063>
- [12] Васина В.Н. Параметрические колебания участка трубопровода с протекающей жидкостью. *Вестник МЭИ*, 2007, № 1, с. 1–11.
- [13] Болотин В.В., Чирков В.П., Радин В.П. и др. Параметрические колебания в неконсервативных системах. В: *Проблемы прикладной механики, динамики и прочности машин*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005, с. 22–31.

- [14] Радин В.П., Чирков В.П., Щугорев А.В. и др. Устойчивость и параметрические резонансы в системе Реута. *Справочник. Инженерный журнал*, 2018, № 11, с. 20–27.
- [15] Радин В.П., Чирков В.П., Новикова О.В. и др. Влияние скорости потока на границы устойчивости трубопровода. *Вестник Московского университета. Сер. 1: Математика. Механика*, 2022, № 1, с. 48–54.
- [16] Радин В.П., Самогин Ю.Н., Чирков В.П. и др. *Решение неконсервативных задач теории устойчивости*. Москва, Физматлит, 2017. 240 с.
- [17] Болотин В.В., ред. *Вибрации в технике. Справочник*. Т. 1. *Колебания линейных систем*. Москва, Машиностроение, 1999. 504 с.
- [18] Радин В.П., Чирков В.П., Щугорев А.В. и др. Устойчивость стержня с упругим шарниром при нагружении распределенной неконсервативной нагрузкой. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2023, № 5, с. 3–13, doi: <https://doi.org/10.18698/0536-1044-2023-5-3-13>

References

- [1] Paidoussis M.P. Dynamics of tubular cantilevers conveying fluid. *J. Mech. Eng. Sci.*, 1970, vol. 12, no. 2, pp. 85–103, doi: https://doi.org/10.1243/JMES_JOUR_1970_012_017_02
- [2] Elishakoff I., Vittori P. A paradox of non-monotonicity in stability of pipes conveying fluid. *Theor. Appl. Mech.*, 2005, vol. 32, no. 3, pp. 235–282, doi: <https://doi.org/10.2298/TAM0503235E>
- [3] Marzani A., Mazzotti M., Viola E. et al. FEM formulation for dynamic instability of fluid-conveying pipe on nonuniform elastic foundation. *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, 2012, vol. 40, no. 1, pp. 83–95, doi: <https://doi.org/10.1080/15397734.2011.618443>
- [4] Bahaadini R., Hosseini M. Flow-induced and mechanical stability of cantilever carbon nanotubes subjected to an axial compressive load. *Appl. Math. Model.*, 2018, vol. 59, pp. 597–613, doi: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.02.015>
- [5] Wang L., Dai H., Ni Q. Nonconservative pipes conveying fluid: evolution of mode shapes with increasing flow velocity. *J. Vib. Control*, 2014, vol. 21, no. 16, pp. 3359–3367, doi: <https://doi.org/10.1177/1077546314522490>
- [6] Bahaadini R., Mohammad R.D., Mohammad H. et al. Stability analysis of composite thin-walled pipes conveying fluid. *Ocean Eng.*, 2018, vol. 160, pp. 311–323, doi: <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2018.04.061>
- [7] Tornabene F., Marzani A., Viola E. et al. Critical flow speeds of pipes conveying fluid using the generalized differential quadrature method. *Adv. Theor. Appl. Mech.*, 2010, vol. 3, no. 3, pp. 121–138.
- [8] Bolotin V.V. *Nekonservativnye zadachi teorii uprugoy ustoychivosti* [Non-conservative problems of elastic stability theory]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961. 340 p. (In Russ.).
- [9] Askarian A., Permoon M., Zahedi M. et al. Stability analysis of viscoelastic pipes conveying fluid with different boundary conditions described by fractional Zener model. *Appl. Math. Model.*, 2022, vol. 103, no. 3, pp. 750–763, doi: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.11.013>
- [10] Aspelund S., Mukherjee R., Hellum A. Feedback-induced flutter instability of a flexible beam in fluid flow. *J. Sound Vib.*, 2023, vol. 547, art. 117488, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2022.117488>
- [11] Hosseini M., Bahaadini R., Jamali B. Nonlocal instability of cantilever piezoelectric carbon nanotubes by considering surface effects subjected to axial flow. *J. Vib. Control*, 2016, vol. 24, no. 9, pp. 1809–1825, doi: <https://doi.org/10.1177/1077546316669063>
- [12] Vasina V.N. Parametric oscillations of the pipeline division with flowing liquid. *Vestnik MEI* [Bulletin of Moscow Power Engineering Institute], 2007, no. 1, pp. 1–11. (In Russ.).
- [13] Bolotin V.V., Chirkov V.P., Radin V.P. et al. Parametricheskie kolebaniya v nekonservativnykh sistemakh [Parametric oscillations in non-conservative systems]. V: *Problemy prikladnoy mekhaniki, dinamiki i prochnosti mashin* [In: Problems of applied mechanics, dynamics and strength of machines]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2005, pp. 22–31. (In Russ.).

- [14] Radin V.P., Chirkov V.P., Shchugorev A.V. et al. The stability and parametric resonances in the system of Reut. *Spravochnik. Inzhenernyy zhurnal* [Handbook. An Engineering Journal], 2018, no. 11, pp. 20–27. (In Russ.).
- [15] Radin V.P., Chirkov V.P., Novikova O.V. et al. Influence of flow velocity variability on pipeline stability boundaries. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1: Matematika. Mekhanika*, 2022, no. 1, pp. 48–54. (In Russ.). (Eng. version: *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2022, vol. 77, no. 1, pp. 12–18, doi: <https://doi.org/10.3103/S0027133022010034>)
- [16] Radin V.P., Samogin Yu.N., Chirkov V.P. et al. *Reshenie nekonservativnykh zadach teorii ustoychivosti* [Solution of non-conservative problems of stability theory]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2017. 240 p. (In Russ.).
- [17] Bolotin V.V., ed. *Vibratsii v tekhnike. Spravochnik. T. 1. Kolebaniya lineynykh system* [Vibrations in engineering. Reference book. Vol. 1. Vibrations of linear systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1999. 504 p. (In Russ.).
- [18] Radin V.P., Chirkov V.P., Shchugorev A.V. et al. Stability of a rod with the elastic joint exposed to distributed non-conservative load. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie* [BMSTU Journal of Mechanical Engineering], 2023, no. 5, pp. 3–13, doi: <https://doi.org/10.18698/0536-1044-2023-5-3-13> (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 27.06.2023

Информация об авторах

РАДИН Владимир Павлович — кандидат технических наук, профессор кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». НИУ «МЭИ» (111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14, e-mail: radinvp@gmail.com).

ЧИРКОВ Виктор Петрович — доктор технических наук, профессор кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». НИУ «МЭИ» (111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14, e-mail: victor.p.chirkov@gmail.com).

ЦОЙ Валерьян Эдуардович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». НИУ «МЭИ» (111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14, e-mail: tsoyve@mpei.ru).

Information about the authors

RADIN Vladimir Pavlovich — Candidate of Science (Eng.), Professor, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines. National Research University — Moscow Power Engineering Institute (111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14, e-mail: radinvp@gmail.com).

CHIRKOV Victor Petrovich — Doctor of Science (Eng.), Professor, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines. National Research University — Moscow Power Engineering Institute (111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14, e-mail: victor.p.chirkov@gmail.com).

TSOY Valeryan Eduardovich — Candidate of Science (Physics & Math), Associate Professor, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines. National Research University — Moscow Power Engineering Institute (111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14, e-mail: tsoyve@mpei.ru).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Радин В.П., Чирков В.П., Цой В.Э. Устойчивость упруго закрепленного трубопровода. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2024, № 1, с. 31–40, doi: [10.18698/0536-1044-2024-01-31-40](https://doi.org/10.18698/0536-1044-2024-01-31-40)

Please cite this article in English as:

Radin V.P., Chirkov V.P., Tsoy V.E. Stability of the elastically fixed pipeline. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2024, no. 1, pp. 31–40, doi: [10.18698/0536-1044-2024-01-31-40](https://doi.org/10.18698/0536-1044-2024-01-31-40)