

УДК 539.3; 616-073.756.8

Оценка прочности полосы с вырезом при растяжении с учетом локального дефекта материала*

В.В. Прунов¹, М.Е. Кузнецов², Е.В. Кротова², О.А. Саченков¹¹ Казанский (Приволжский) федеральный университет² Казанский Национальный Исследовательский Технический Университет им А. Н. Туполева — КАИ

Strength assessment of a strip with circular cut in tension taking into account material local defect of the material

V.V. Prunov¹, M.E. Kuznetsov², E.V. Krotova², O.A. Sachenkov¹¹ Kazan (Volga region) Federal University² Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev — KAI

Использование данных цифрового прототипа изделия является передовым подходом к расчету на прочность композиционных материалов, так как позволяет учитывать технологические особенности реального изделия. Рассмотрена задача по определению прочности элемента крепления из композиционного материала в условиях эксплуатации с целью определения параметров, влияющих на его несущую способность. Выполнена оценка наибольших первых главных напряжений при растяжении полосы с вырезом при наличии дефекта материала, под которым подразумевается локальное изменение его модуля Юнга. Предполагалось, что дефект имеет форму полосы, симметрично расположенную около центра отверстия. В результате расчетов получена функция множителей от параметров, характеризующих модуль Юнга в области дефекта и геометрическую величину дефекта. Функция множителей позволяет оценить прочность изделия, так как она является множителем для наибольших первых главных напряжений, возникающих в образце без дефекта. Показано, что полученное решение можно использовать на практике при наличии данных компьютерной томографии и известных эмпирических соотношений для модуля Юнга, предела прочности и чисел Хаунсфилда.

EDN: BGIKHS**Ключевые слова:** методы неразрушающего контроля, полоса с круговым вырезом, компьютерная томография, дефект материала

Using a product digital prototype appears to be an advanced approach in calculating the composite material strength, since it makes it possible to take into account the real product technological features. The paper considers the problem of assessing strength of a fastening element made of the composite material under operation conditions to determine the fastening parameters that affect its load-bearing capacity. The highest initial principal stresses in tension of a strip with circular cut in the presence of the material defect were assessed. Local alteration in its Young's modulus was considered as such a defect. It was assumed that the defect had the shape of a strip symmetrically located near the hole center. Calculations resulted in finding a multiplier function from the parameters characterizing the Young's modulus in the defect area and the defect geometric size. The multiplier function makes it

* Исследование выполнено при финансовой поддержке, выделяемой Казанскому федеральному университету по государственному заданию в сфере научной деятельности, проект № FZSM-2023-0009.

possible to assess the product strength, since it is a multiplier for the highest initial principal stresses arising in a sample without defect. The paper shows that the resulting solution could be used in practice with the computer tomography data and the known empirical relationships for Young's modulus, tensile strength and Hounsfield numbers.

EDN: BGIKHS

Keywords: non-destructive testing methods, strip with circular cut, computer tomography, material defect

Развитие технологии изготовления композиционных материалов существенно улучшает технические характеристики летательных аппаратов. Снижение их массы при сохранении прочностных свойств позволяет повысить полезную нагрузку. Однако методы расчета на прочность летательных аппаратов отличает сложность, что обусловлено необходимостью учета не только особенностей материалов, но и возможных локальных дефектов.

В связи с этим возрос интерес к методам расчета материалов с анизотропными свойствами [1–3]. На сегодняшний день один из передовых методов расчета основан на использовании данных цифрового прототипа изделия. В этом случае имеется информация о параметрах и распределении материала в пространстве, что позволяет локализовать и учесть явные и неявные дефекты.

Методы расчета, базирующиеся на применении данных неразрушающего контроля, получили распространение не только в механике композитов [4–7], но и в биомедицине [8]. Кроме того, на основе цифрового двойника становятся возможными как прогностические расчеты [9–12], так и проектирование окружения изделия с учетом индивидуальных свойств [12, 13].

Однако, несмотря на существующий уровень развития таких методов, с точки зрения практики все еще существуют технические сложности. Наиболее трудоемкая часть — выявление ассоциативных связей между цифровым двойником и математической моделью. Чаще всего этот процесс затрагивает проблемы классификации и сегментации, что в случае реальных зашумленных сигналов приводит к увеличению трудоемкости.

Широкое распространение в исследованиях композиционных материалов получила рентгеновская компьютерная томография (далее КТ). В этом случае помимо проблем сегментации возникает отдельная задача построения сетки для расчетной модели, что еще на порядок увеличивает трудоемкость. Поэтому в настоящее

время исследуются методы, позволяющие, с одной стороны, снизить требования к расчетным сеткам, а с другой — сохранить информативность и адекватность математической модели.

К таким методам относятся геометрические, в рамках которых исследуют структурную анизотропию объекта. Например, метод средней длины пересечений предполагает построение тензора структуры, устанавливающего усредненное направление распределения ортотропных свойств [14–16]. Физические свойства материала в последующем восстанавливаются на основе полученного тензора структуры.

Метод представительных объемных элементов [17–22] предусматривает проведение серии вычислительных экспериментов для физического объема, на основе которых определяют эффективные механические свойства.

Оба метода — вычислительно сложные, так как требуют неоднократной обработки всех данных цифрового двойника.

Альтернативным является метод, использующий специальные конечные элементы, которые связаны с цифровым двойником, а конечно-элементная сетка на программном уровне — с данными об объекте. В этом случае можно определять коэффициенты ослабления в узлах сетки согласно заданному закону [23–25] или учитывать анизотропные свойства среды на основе цифрового двойника ее исходного элемента [25–28]. Вычислительная трудоемкость при таком подходе снижается, но задача построения вычислительной сетки все еще остается [29–33].

Предлагаемый подход базируется на рассмотрении параметризованной математической модели элемента крепления, параметры которого уточняются на основе цифрового двойника. Для оценки не нужно проводить дополнительные расчеты для объекта, требуется лишь извлечь необходимые параметры из данных об объекте.

Цель работы — определение параметров элемента крепления, влияющих на его несущую способность.

В рамках исследования построена математическая модель элемента крепления, исследован случай наличия локального дефекта, определены параметры, описывающие его. На основе вычислительных экспериментов локализовано место разрушения, и построена диаграмма, связывающая параметры, характеризующие дефект и снижение прочности.

Материалы и методы. В качестве узла крепления выбрана пластина с круговым вырезом, через который передается усилие. Рассмотрен случай наличия дефекта около кругового выреза. Цифровым двойником изделия выступала рентгеновская КТ.

Метод КТ. Этот метод основан на измерении ослабления рентгеновского излучения, проходящего через материалы разной плотности. В результате взаимодействия с материалами изначальный поток рентгеновского излучения ослабляется по закону

$$\Phi = \Phi_0 e^{-\mu x},$$

где Φ_0 — поток начального рентгеновского излучения; μ — линейный коэффициент его ослабления; x — глубина его проникновения.

Линейный коэффициент ослабления определяется выражением

$$\mu = \mu_k + \mu_{н.к} + \mu_\phi,$$

где μ_k и $\mu_{н.к}$ — вклад когерентного (без изменения длины волны) и некогерентного (с изменением длины волны) рассеяния; μ_ϕ — вклад фотоэффекта.

Следует отметить, что рентгеновское излучение ослабляется в зависимости от количества атомов материала, через которые проходит данный поток. Если сжать исследуемое тело в H раз вдоль продольной оси, то ослабление пучка останется неизменным:

$$\mu_1 x_1 = \mu_2 x_2 = \mu_2 \frac{x_1}{H},$$

где μ_1 , μ_2 и x_1 , x_2 — линейные коэффициенты ослабления и глубины проникновения для материалов без дефекта и с дефектом соответственно.

Так как число атомов материала не меняется, размер тела просто уменьшится в H раз:

$$\mu_1 = \frac{\mu_2}{H}.$$

Это приводит к изменению линейного коэффициента ослабления в зависимости от плотности. Линейное ослабление изучаемого материала удобно нормировать относительно коэффициента ослабления дистиллированной воды и воздуха. Такая нормировка называется шкалой Хаунсфилда. Число Хаунсфилда для исследуемого материала определяется выражением [16]

$$HU = 1000 \frac{\mu_x - \mu_w}{\mu_w - \mu_a},$$

где μ_x — линейный коэффициент ослабления исследуемого материала в заданной точке x ; μ_w и μ_a — линейные коэффициенты ослабления воды и воздуха.

При отображении данных КТ чаще всего величины шкалы Хаунсфилда в точке обозначают цветом (в градиенте серого). По результатам большого количества эмпирических исследований [23, 34, 35] выявлены следующие зависимости между числами Хаунсфилда и механическими параметрами материала [23, 33, 35]:

$$\rho = a_\rho + b_\rho HU; \quad (1)$$

$$E = a_E \rho^{b_E}; \quad (2)$$

$$\sigma_{кр} = a_\sigma \rho^{b_\sigma}, \quad (3)$$

где ρ — плотность материала; a_ρ , b_ρ , a_E , b_E , a_σ , b_σ — коэффициенты, определяемые экспериментальным путем; E — модуль Юнга материала; $\sigma_{кр}$ — предел прочности материала.

Зависимость (1) устанавливает линейную связь между оптической и физической плотностями, а выражения (2) и (3) экспоненциально связывают модуль Юнга материала и его локальную прочность с физической плотностью [36–38]. Таким образом, данные КТ позволяют определить распределение механических свойств в материале.

Постановка задачи. Рассмотрена задача о растяжении пластины с круговым вырезом в плоской напряженной постановке. Расчетная схема ее нагружения приведена на рис. 1, а.

Система координат расположена в центре отверстия радиусом R , ширина пластины равна $2W$, высота — $L_1 + L_2$. Вся пластина изготовлена из однородного изотропного материала с модулем Юнга E_1 , по центру кругового выреза пластины есть полоса шириной $2H$ с модулем Юнга E_2 .

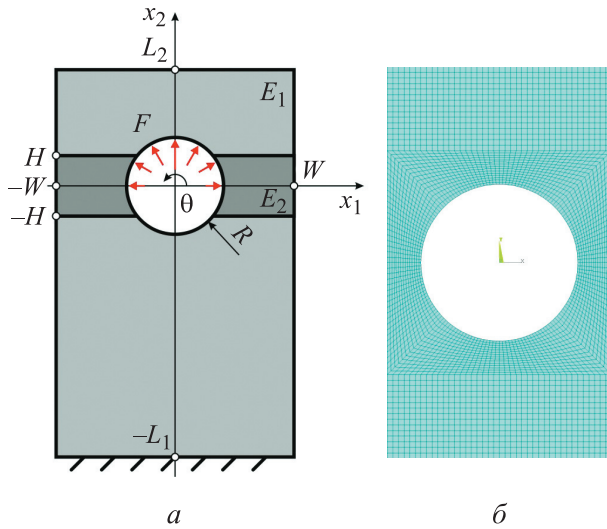


Рис. 1. Расчетная схема нагружения пластины с круговым вырезом (а) и расчетная сетка в области выреза (б)

Тогда расчетную область V можно представить как

$$V = [-L_1, L_2] \times [-W, W] / (x_1^2 + x_2^2);$$

$$x_1^2 + x_2^2 < R^2.$$

Уравнения равновесия имеют вид

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in V \subset \mathbb{R}^2. \quad (4)$$

Для связи деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ и перемещений \mathbf{u} использованы соотношения Коши:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T], \quad \forall \mathbf{x} \in V \subset \mathbb{R}^2.$$

Статические и кинематические граничные условия заданы в виде

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = F \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \mathbf{n};$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \mathbf{x} \in x_1^2 + x_2^2 = R^2, \quad x_2 \geq 0;$$

$$F = \iint_{x_1^2 + x_2^2 = R^2, x_2 \geq 0} p(x_1, x_2) \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} ds;$$

$$\mathbf{u}(x_1, -L_1) = 0, \quad x_1 \in [-W, W],$$

где $p(x_1, x_2)$ — закон распределения давления по дуге кругового выреза; ds — элемент дуги кругового выреза.

Рассмотрим физические соотношения в упругой постановке. Предполагая, что модуль Юнга в исследуемой области может изменяться, представим его в мультипликативной форме

$$E_2 = \varphi(\mathbf{x}) E_1$$

или в терминах тензора упругих констант

$$\mathbf{C}_2 = \varphi(\mathbf{x}) \mathbf{C}_1. \quad (5)$$

Здесь $\varphi(\mathbf{x})$ — функция, характеризующая распределение упругих свойств внутри исследуемой области; \mathbf{C}_2 и \mathbf{C}_1 — тензоры упругих констант для материала с дефектом и без дефекта.

Тогда физические соотношения можно записать как

$$\boldsymbol{\sigma} = \varphi(\mathbf{x}) E_1 \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \forall \mathbf{x} \in V \subset \mathbb{R}^2,$$

где \mathbf{C} — тензор упругих констант, определенный для материала с единичным модулем Юнга.

Предполагаем, что дефект материала равномерно распределен по полосе шириной $2H$ вдоль всего образца, симметрично расположенной около центра выреза (см. рис. 1, а, темная зона). Ширину полосы удобно нормировать к диаметру кругового отверстия.

Тогда введенная функция $\varphi(\mathbf{x})$, характеризующая распределение упругих свойств внутри исследуемой области, имеет вид

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \lambda, & x_2 \in [-\beta R, \beta R]; \\ 1, & x_2 \notin [-\beta R, \beta R], \end{cases}$$

где λ — параметр жесткостей,

$$\lambda = E_2 / E_1; \quad (6)$$

β — относительный размер полосы с дефектом,

$$\beta = H / R. \quad (7)$$

Сформулируем теорему о решении в напряжениях для связанной задачи.

Теорема. Рассмотрим однородную B^H и неоднородную B^I геометрически идентичные упругие области и соответствующие тензоры упругих констант $\mathbf{C}^H(\mathbf{x})$ и $\mathbf{C}^I(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) \mathbf{C}^H(\mathbf{x})$. Тогда можно рассмотреть две следующие статические упругие задачи:

$$P^H : \{ \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = 0 \quad \mathbf{x} \in B^H,$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad \mathbf{x} \in \partial B_\sigma^H, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^0 \quad \mathbf{x} \in \partial B_u^H \};$$

$$P^I : \{ \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = 0 \quad \mathbf{x} \in B^I,$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n} = \varphi(\mathbf{x}) \mathbf{t} \quad \mathbf{x} \in \partial B_\sigma^I, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^0 \quad \mathbf{x} \in \partial B_u^I \},$$

где \mathbf{t} — вектор давления; ∂B_σ^H , ∂B_σ^I и ∂B_u^H , ∂B_u^I — контуры статических и кинематических граничных условий однородной и неоднородной области соответственно; \mathbf{u}^0 — заданные перемещения; $\varphi(\mathbf{x}) \in C^2(B) | \forall \mathbf{x} \in B, \quad \varphi(\mathbf{x}) > \alpha > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+$.

Если \mathbf{u}^H есть решение в перемещениях однородной задачи P^H , то равенство полей перемещений $\mathbf{u}^H = \mathbf{u}^I$ будет выполняться тогда и только тогда, когда

$$\forall \mathbf{x} \in B, \forall \mathbf{v} \in V, \boldsymbol{\sigma}^H : (\nabla \varphi(\mathbf{x}) \mathbf{v}) = 0.$$

Следствие. Если известно решение однородной задачи $\Psi^H = \{\mathbf{u}^H, \boldsymbol{\varepsilon}^H, \boldsymbol{\sigma}^H\}$, то в условиях теоремы решение для неоднородной задачи может быть получено как $\Psi^I = \{\mathbf{u}^H, \boldsymbol{\varepsilon}^H, \varphi(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma}^H\}$.

Для оценки напряжения следует проанализировать выражение, получаемое после подстановки выражения (5) в формулу (4):

$$\nabla \cdot \varphi(\mathbf{x}) E_1 \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{x}) E_1 \mathbf{C} : \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = 0, \\ \forall \mathbf{x} \in V \subset \mathbb{R}^2.$$

Тогда, согласно теореме о решении в напряжениях в связанной задаче, чтобы продолжить решение для образца с дефектом необходимо, чтобы

$$\nabla \cdot \varphi(\mathbf{x}) = 0.$$

Для кусочно-постоянной функции получаем

$$\nabla \cdot \varphi(\mathbf{x}) = \{0, (\lambda - 1)\delta(x_2 + \beta R) - (1 - \lambda)\delta(x_2 - \beta R)\},$$

где δ — дельта-функция Дирака.

Это значит, что особенности могут возникнуть только на границе дефекта. В областях постоянного модуля Юнга градиент функции $\varphi(\mathbf{x})$ обращается в нуль, а следовательно, согласно теореме о решении в напряжениях, для неоднородной задачи решения можно достроить на основе однородной задачи.

Предположим, что наибольшие напряжения для однородного случая возникают около отверстия при углах $\theta = 0$ и 180° (см. рис. 1, а). Тогда для неоднородной задачи будем ожидать, что локальный максимум напряжений тоже будет образовываться в этих областях. Чтобы ответить на вопрос, будут ли эти максимумы глобальными, необходимо оценить напряжения на границе материалов.

В целях проверки сформулированных гипотез с помощью метода конечных элементов построена численная параметризованная модель. Для сеточной модели использован восьмиузловой конечный элемент с квадратичной аппроксимацией. Вычисления проведены на регулярной сетке (рис. 1, б), оценка сетки и сгущения выполнена на основании оценки ошибки энергии [26]. Параметрами модели были параметр жесткостей λ (6) и относительный размер полосы с дефектом β (7).

Результаты и обсуждение. В вычислительных экспериментах варьировали параметры модели λ, β и результирующую прикладываемых сил F . Диапазоны и шаг для варьирования параметров приведены в таблице.

Численные результаты подтвердили линейность задачи относительно результирующей прикладываемых сил F , что подтверждает адекватность последующей нормировки полученных данных по напряжениям. Коэффициент Пуассона для обоих материалов составлял 0,3.

Исследование напряженно-деформированного состояния подтвердило локализацию наибольших напряжений в области выреза. При оценке прочности особое внимание уделяли первым главным напряжениям (рис. 2), так как максимум эквивалентных напряжений по энергетической теории прочности Хубера — Мизеса локализовался в той же области, а наибольшее относительное отклонение первого главного напряжения от эквивалентных напряжений равнялось 1,5 %.

Подробное исследование первых главных напряжений в области выреза показало, что наибольшие значения во всей конструкции (и, в частности, в области выреза) достигаются в точках, соответствующих углам $\theta = 0^\circ$ и $\theta = 180^\circ$. Эта тенденция сохранялась при варьировании как параметра жесткостей λ (рис. 2, а), так и относительного размера полосы с дефектом β (рис. 2, б). Небольшие отклонения максимума от точки при угле $\theta = 0^\circ$ можно объяснить дискретизацией конечными элементами и несимметричностью задачи ($L_1 \neq L_2$). В силу симметрии задачи на рис. 2 показаны значения θ правой полуплоскости.

Отдельно оценивали первые главные направления в точках, где они достигают максимума. Так, на рис. 3 показано распределение углов первого главного направления: несмотря на наличие выбросов, все значения лежат в области 90° (максимальное отклонение составило $8,4^\circ$).

Диапазоны и шаг варьирования параметров

Параметр	Значение		Шаг варьирования
	минимальное	максимальное	
F, H	50	250	50
λ	0,5	2,0	0,1
β	0,1	1,6	0,1

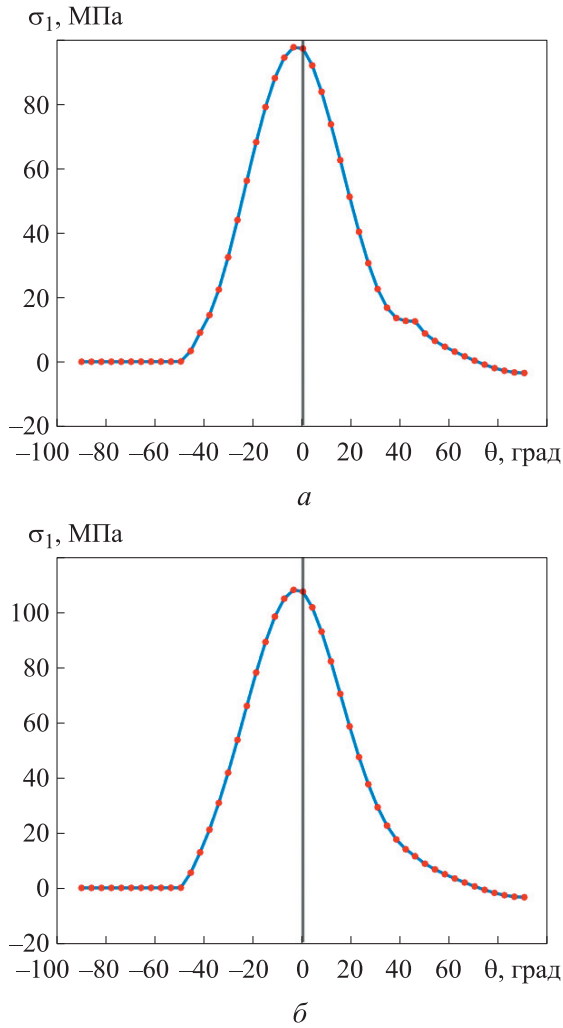


Рис. 2. Зависимости первого главного напряжения σ_1 от угла θ при параметре жесткостей $\lambda = 0,5$ (а) и относительном размере полосы с дефектом $\beta = 0,86$ (б)

Полученные результаты позволяют сфокусироваться на первом главном напряжении на окружности выреза в точке при угле $\theta = 0^\circ$. Линейность по прикладываемой силе позволяет провести нормировку исследуемых напряжений. При этом под исследуемыми напряжениями можно понимать некую функцию от введенных параметров λ и β :

$$\psi(\lambda, \beta) = \frac{\max_{x \in V} \sigma_1(\lambda, \beta)}{\max_{x \in V} \sigma_1(1, \beta)}$$

Полученная функция в графическом виде приведена на рис. 4, где черной горизонтальной линией отмечен уровень $\psi(1, \beta)$, а черной вертикальной — $\psi(\lambda, 1)$. Значение в заданной точке на графике соответствует множителю для

наибольших первых главных напряжений относительно задачи без дефекта.

Анализ полученных зависимостей показывает, что дефект может влиять на прочность как положительно, так и негативно. Положительным будем называть уменьшение относительно значения первого главного напряжения, отрицательным — его возрастание.

Таким образом, при повышении параметра жесткостей λ первое главное напряжение σ_1 уменьшается, а при снижении λ — σ_1 увеличивается. При $\lambda = 1,5$ первое главное напряжение σ_1 уменьшилось на 5...7 %, а при $\lambda = 2,0$ — на 10...15 %.

Зависимость первого главного напряжения σ_1 от относительного размера полосы с дефектом β является не столь очевидной. При $\lambda = 1,00...1,25$ и $\beta = 0...1$ параметр β не оказывает существенного влияния на σ_1 . Но с уменьшением λ при $\beta = 0...0,25$ наблюдается возрастание первого главного напряжения до 10 %, при $\beta = 0,25...0,70$ — до 15 %, а затем при $\beta = 0,90$ и более — до 10 %.

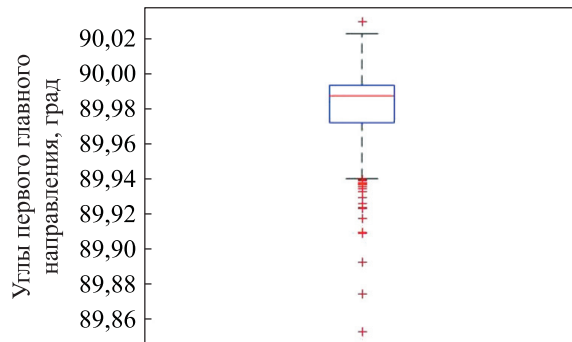


Рис. 3. Распределение углов первого главного направления в точке при угле $\theta = 0^\circ$ для всех значений параметров λ и β

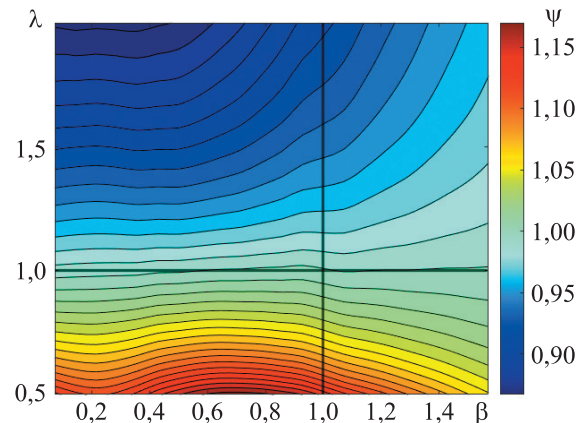


Рис. 4. Зависимости функции ψ от параметра жесткостей λ и относительного размера полосы с дефектом β

С точки зрения дефектоскопии полученные результаты можно использовать при наличии данных сканирования и известных эмпирических констант в выражениях (1)–(3). Для этого необходимо из данных сканирования КТ определить соответствующие значения, связывающие числа Хаунсфилда и модуль Юнга материала. Тогда, используя выражение (2), получаем

$$\lambda = \frac{a_{E1} \rho^{b_{E1}}}{a_{E2} \rho^{b_{E2}}}.$$

Относительный размер полосы с дефектом β определяют непосредственным измерением на данных сканирования. Полученные множители (функция $\psi(\lambda, \beta)$) позволяют найти первые главные напряжения, которые можно оценить с точки зрения прочности данных сканирования и выражения (3). В силу линейности задачи относительно результирующей прикладываемых сил F разрушающую (критическую) силу можно определить по выражению

$$F_{кр} = \psi(\lambda, \beta) \sigma_{кр} k = \psi(\lambda, \beta) a_{\sigma} \rho^{b_{\sigma}} k,$$

где k — коэффициент, связывающий линейно наибольшие первые главные напряжения и результирующую прикладываемых сил.

Ввиду малого различия между первыми главными и эквивалентными напряжениями по энергетической теории прочности Хубера — Мизеса полученную диаграмму можно применять и для них.

Выводы

1. Рассмотрена задача по оценке наибольших первых главных напряжений при растяжении полосы с вырезом при наличии дефекта материала, под которым подразумевается локальное изменение модуля Юнга материала. Предполагалось, что дефект имеет форму полосы, симметрично расположенной около центра отверстия. В результате расчетов получена функция множителей (множителей наибольших первых главных напряжений для образца без дефекта) от параметров, характеризующих модуль Юнга в области дефекта и геометрическую величину дефекта.

2. Показано, что найденное решение можно использовать на практике при наличии данных КТ и известных эмпирических соотношений для модуля Юнга, предела прочности и чисел Хаунсфилда.

Литература

- [1] Харин Н.В., Воробьев О.В., Бережной Д.В. и др. Методика построения репрезентативной модели по данным компьютерной томографии. *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2018, т. 3, с. 95–102, doi: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.3.10>
- [2] Schwen L.O., Wolfram U., Wilke H.-J. et al. Determining effective elasticity parameters of microstructured materials. *15th Workshop on the Finite Element Method in Biomedical Engineering*, 2008, pp. 41–62.
- [3] Kayumov R.A. Structure of nonlinear elastic relationships for the highly anisotropic layer of a nonthin shell. *Mech. Compos. Mater.*, 1999, vol. 35, no. 5, pp. 409–418, doi: <https://doi.org/10.1007/BF02329327>
- [4] Kasiviswanathan V., Arockiarajan A. Analytical, numerical and experimental studies on effective properties of layered (2–2) multiferroic composites. *Sens. Actuator A Phys.*, 2015, vol. 236, pp. 380–393, doi: <https://doi.org/10.1016/j.sna.2015.11.010>
- [5] Mohammadi Shah M., Komeili M., Phillion A.B. et al. Toward better understanding of the effect of fiber distribution on effective elastic properties of unidirectional composite yarns. *Comput. Struct.*, 2016, vol. 163, pp. 29–40, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2015.10.002>
- [6] Vilchevskaya E., Sevostianov I. Effective elastic properties of a particulate composite with transversely-isotropic matrix. *Int. J. Eng. Sci.*, 2015, vol. 94, pp. 139–149, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2015.05.006>
- [7] Vahterova Y.A., Min Y.N. Effect of shape of armoring fibers on strength of composite materials. *TURCOMAT*, 2021, vol. 12, no. 2, pp. 2703–2708, doi: <https://doi.org/10.17762/turcomat.v12i2.2295>
- [8] Vanlenthe G., Hagenmuller H., Bohner M. et al. Nondestructive micro-computed tomography for biological imaging and quantification of scaffold–bone interaction in vivo. *Biomaterials*, 2007, vol. 28, no. 15, pp. 2479–2490, doi: <https://doi.org/10.1016/j.biomaterials.2007.01.017>

- [9] Viceconti M., Qasim M., Bhattacharya P. et al. Are CT-based finite element model predictions of femoral bone strengthening clinically useful? *Curr. Osteoporos. Rep.*, 2018, vol. 16, no. 3, pp. 216–223, doi: <https://doi.org/10.1007/s11914-018-0438-8>
- [10] Semenova E., Gerasimov O., Koroleva E. et al. Automatic processing and analysis of the quality healing of derma injury. In: *Biomechanics 2018*. Springer, 2019, pp. 107–113, doi: https://doi.org/10.1007/978-3-319-97286-2_10
- [11] Silva-Henao J., Synek A., Pahr D.H. et al. Selection of animal bone surrogate samples for orthopaedic screw testing based on human radius CT-derived bone morphology. *Med. Eng. Phys.*, 2022, vol. 103, art. 103786, doi: <https://doi.org/10.1016/j.medengphy.2022.103786>
- [12] Донник А.М., Коссович Л.Ю., Оленко Е.С. Поведение сегмента грудного отдела позвоночника при оскольчатом переломе позвонка до и после хирургического лечения. Биомеханический эксперимент. *Российский журнал биомеханики*, 2022, т. 26, № 1, с. 25–39.
- [13] Маслов Л.Б., Дмитрюк А.Ю., Жмайло М.А. и др. Исследование прочности эндопротеза тазобедренного сустава из полимерного материала. *Российский журнал биомеханики*, 2022, № 4, с. 19–33.
- [14] Moreno R., Borga M., Smedby Ö. Techniques for computing fabric tensors: a review. In: *Visualization and processing of tensors and higher order descriptors for multi-valued data*. Springer, 2014, pp. 271–292, doi: https://doi.org/10.1007/978-3-642-54301-2_12
- [15] Moreno R., Smedby Ö., Borga M. On the efficiency of the mean intercept length tensor. *SSBA Symposium*, 2011. URL: <http://liu.diva-portal.org/smash/get/diva2:533443/FULLTEXT01.pdf> (дата обращения: 30.08.2023).
- [16] Smit T.H., Schneider E., Odgaard A. Star length distribution: a volume-based concept for the characterization of structural anisotropy. *J. Microsc.*, 1998, vol. 191, no. 3, pp. 249–257, doi: <https://doi.org/10.1046/j.1365-2818.1998.00394.x>
- [17] Carniel T.A., Klahr B., Fancello E.A. On multiscale boundary conditions in the computational homogenization of an RVE of tendon fascicles. *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.*, 2019, vol. 91, pp. 131–138, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2018.12.003>
- [18] Marcián P., Lošák P., Kaiser J. et al. Estimation of orthotropic mechanical properties of human alveolar bone. *ICEM*, 2016, pp. 399–402.
- [19] Gueguen Y., Ravalec M.L., Ricard L. Upscaling: effective medium theory, numerical methods and the fractal dream. *Pure Appl. Geophys.*, 2006, vol. 163, no. 5–6, pp. 1175–1192, doi: <https://doi.org/10.1007/s00024-006-0053-y>
- [20] Hollister S.J., Kikuchi N. A comparison of homogenization and standard mechanics analyses for periodic porous composites. *Comput. Mech.*, 1992, vol. 10, no. 2, pp. 73–95, doi: <https://doi.org/10.1007/BF00369853>
- [21] Marcián P., Florian Z., Horáčková L. et al. Microstructural finite-element analysis of influence of bone density and histomorphometric parameters on mechanical behavior of mandibular cancellous bone structure. *Solid State Phenom.*, 2016, vol. 258, pp. 362–365, doi: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/SSP.258.362>
- [22] Kayumov R.A., Muhamedova I.Z., Tazyukov B.F. et al. Parameter determination of hereditary models of deformation of composite materials based on identification method. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2018, vol. 973, art. 012006, doi: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/973/1/012006>
- [23] Саченков О.А., Герасимов О.В., Королева Е.В. и др. Построение негомогенной конечно-элементной модели по данным компьютерной томографии. *Российский журнал биомеханики*, 2018, т. 22, № 3, с. 332–344.
- [24] Gerasimov O.V., Kharin N.V., Fedyanin A.O. et al. Bone stress-strain state evaluation using CT based FEM. *Front. Mech. Eng.*, 2021, vol. 7, art. 688474, doi: <https://doi.org/10.3389/fmech.2021.688474>
- [25] Maquer G., Musy S.N., Wandel J. et al. Bone volume fraction and fabric anisotropy are better determinants of trabecular bone stiffness than other morphological variables. *J. Bone Miner. Res.*, 2015, vol. 30, no. 6, pp. 1000–1008, doi: <https://doi.org/10.1002/jbmr.2437>
- [26] Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 1987, vol. 24, no. 2, pp. 337–357, doi: <https://doi.org/10.1002/nme.1620240206>

- [27] Grassi L., Schileo E., Taddei F. et al. Accuracy of finite element predictions in sideways load configurations for the proximal human femur. *J. Biomech.*, 2012, vol. 45, no. 2, pp. 394–399, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2011.10.019>
- [28] Giovannelli L., Ródenas J.J., Navarro-Jiménez J.M. et al. Direct medical image-based Finite Element modelling for patient-specific simulation of future implants. *Finite Elem. Anal. Des.*, 2017, vol. 136, pp. 37–57, doi: <https://doi.org/10.1016/j.finel.2017.07.010>
- [29] Герасимов О.В., Бережной Д.В., Большаков П.В. и др. Построение механической модели элементов гетерогенной среды на основе численно-цифрового алгоритма обработки данных компьютерной томографии. *Российский журнал биомеханики*, 2019, vol. 23, № 1, с. 104–116, doi: <https://doi.org/10.15593/RJBiomech/2019.1.10>
- [30] Gerasimov O., Kharin N., Statsenko E. et al. Patient-specific bone organ modeling using CT based FEM. In: Mesh methods for boundary-value problems and applications. *Springer*, 2022, pp. 125–139, doi: https://doi.org/10.1007/978-3-030-87809-2_10
- [31] Воробьев О.В., Семенова Е.В., Мухин Д.А. и др. Конечнo-элементная оценка деформированного состояния по данным компьютерной томографии. *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2021, № 2, с. 44–54, doi: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.2.05>
- [32] Gerasimov O., Sharafutdinova K., Rakhmatullin R. et al. Application of a digital prototype for CT-based bone strength analysis. *ITNT*, 2022, doi: <https://doi.org/10.1109/ITNT55410.2022.9848693>
- [33] Gerasimov O., Kharin N., Yaikova V. et al. Direct image-based micro finite element modeling of bone tissue. *MATEC Web Conf.*, 2020, vol. 329, art. 03072, doi: <https://doi.org/10.1051/mateconf/202032903072>
- [34] Rho J.Y., Hobatho M.C., Ashman R.B. Relations of mechanical properties to density and CT numbers in human bone. *Med. Eng. Phys.*, 1995, vol. 17, no. 5, pp. 347–355, doi: [https://doi.org/10.1016/1350-4533\(95\)97314-f](https://doi.org/10.1016/1350-4533(95)97314-f)
- [35] Kieser D.C., Kanade S., Waddell N.J. et al. The deer femur — a morphological and biomechanical animal model of the human femur. *Biomed. Mater. Eng.*, 2014, vol. 24, no. 4, pp. 1693–1703, doi: <https://doi.org/10.3233/BME-140981>
- [36] Шакирзянов Ф.Р., Каюмов Р.А., Паймушин В.Н. и др. О причинах потери несущей способности композитного тест-образца при трехточечном изгибе. *Ученые записки Казанского университета. Сер. Физико-математические науки*, 2022, т. 164, № 2–3, с. 221–243.
- [37] Crenshaw T.D., Peo Jr.E.R., Lewis A.J. et al. Bone strength as a trait for assessing mineralization in swine: a critical review of techniques involved. *J. Anim. Sci.*, 1981, vol. 53, no. 3, pp. 827–835, doi: <https://doi.org/10.2527/JAS1981.533827X>
- [38] Imai K. Computed tomography-based finite element analysis to assess fracture risk and osteoporosis treatment. *World J. Exp. Med.*, 2015, vol. 5, no. 3, pp. 182–187, doi: <https://doi.org/10.5493/wjem.v5.i3.182>

References

- [1] Kharin N.V., Vorobyev O.V., Berezhnoy D.V. et al. Construction of a representative model based on computed tomography. *Vestnik PNIPIU. Mekhanika* [PNRPU Mechanics Bulletin], 2018, vol. 3, pp. 95–102, doi: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.3.10> (in Russ.).
- [2] Schwen L.O., Wolfram U., Wilke H.-J. et al. Determining effective elasticity parameters of microstructured materials. *15th Workshop on the Finite Element Method in Biomedical Engineering*, 2008, pp. 41–62.
- [3] Kayumov R.A. Structure of nonlinear elastic relationships for the highly anisotropic layer of a nonthin shell. *Mech. Compos. Mater.*, 1999, vol. 35, no. 5, pp. 409–418, doi: <https://doi.org/10.1007/BF02329327>
- [4] Kasiviswanathan V., Arockiarajan A. Analytical, numerical and experimental studies on effective properties of layered (2-2) multiferroic composites. *Sens. Actuator A Phys.*, 2015, vol. 236, pp. 380–393, doi: <https://doi.org/10.1016/j.sna.2015.11.010>
- [5] Mohammadi Shah M., Komeili M., Phillion A.B. et al. Toward better understanding of the effect of fiber distribution on effective elastic properties of unidirectional composite yarns.

- Comput. Struct.*, 2016, vol. 163, pp. 29–40, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2015.10.002>
- [6] Vilchevskaya E., Sevostianov I. Effective elastic properties of a particulate composite with transversely-isotropic matrix. *Int. J. Eng. Sci.*, 2015, vol. 94, pp. 139–149, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2015.05.006>
- [7] Vahterova Y.A., Min Y.N. Effect of shape of armoring fibers on strength of composite materials. *TURCOMAT*, 2021, vol. 12, no. 2, pp. 2703–2708, doi: <https://doi.org/10.17762/turcomat.v12i2.2295>
- [8] Vanlenthe G., Hagenmuller H., Bohner M. et al. Nondestructive micro-computed tomography for biological imaging and quantification of scaffold–bone interaction in vivo. *Biomaterials*, 2007, vol. 28, no. 15, pp. 2479–2490, doi: <https://doi.org/10.1016/j.biomaterials.2007.01.017>
- [9] Viceconti M., Qasim M., Bhattacharya P. et al. Are CT-based finite element model predictions of femoral bone strengthening clinically useful? *Curr. Osteoporos. Rep.*, 2018, vol. 16, no. 3, pp. 216–223, doi: <https://doi.org/10.1007/s11914-018-0438-8>
- [10] Semenova E., Gerasimov O., Koroleva E. et al. Automatic processing and analysis of the quality healing of derma injury. In: *Biomechanics 2018. Springer*, 2019, pp. 107–113, doi: https://doi.org/10.1007/978-3-319-97286-2_10
- [11] Silva-Henao J., Synek A., Pahr D.H. et al. Selection of animal bone surrogate samples for orthopaedic screw testing based on human radius CT-derived bone morphology. *Med. Eng. Phys.*, 2022, vol. 103, art. 103786, doi: <https://doi.org/10.1016/j.medengphy.2022.103786>
- [12] Donnik A.M., Kossovich L.Yu., Olenko E.S. Biomechanics of the spine in fracture of the spine before and after surgical treatment. Biomechanical experiment. *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki* [Russian Journal of Biomechanics], 2022, vol. 26, no. 1, pp. 25–39. (In Russ.).
- [13] Maslov L.B., Dmitryuk A.Yu., Zhmaylo M.A. et al. Study of the strength of a hip endoprosthesis made of polymeric material. *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki* [Russian Journal of Biomechanics], 2022, no. 4, pp. 19–33. (In Russ.).
- [14] Moreno R., Borga M., Smedby Ö. Techniques for computing fabric tensors: a review. In: *Visualization and processing of tensors and higher order descriptors for multi-valued data. Springer*, 2014, pp. 271–292, doi: https://doi.org/10.1007/978-3-642-54301-2_12
- [15] Moreno R., Smedby Ö., Borga M. On the efficiency of the mean intercept length tensor. *SSBA Symposium*, 2011. URL: <http://liu.diva-portal.org/smash/get/diva2:533443/FULLTEXT01.pdf> (accessed: 30.08.2023).
- [16] Smit T.H., Schneider E., Odgaard A. Star length distribution: a volume-based concept for the characterization of structural anisotropy. *J. Microsc.*, 1998, vol. 191, no. 3, pp. 249–257, doi: <https://doi.org/10.1046/j.1365-2818.1998.00394.x>
- [17] Carniel T.A., Klahr B., Fancello E.A. On multiscale boundary conditions in the computational homogenization of an RVE of tendon fascicles. *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.*, 2019, vol. 91, pp. 131–138, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2018.12.003>
- [18] Marcián P., Lošák P., Kaiser J. et al. Estimation of orthotropic mechanical properties of human alveolar bone. *ICEM*, 2016, pp. 399–402.
- [19] Gueguen Y., Ravalec M.L., Ricard L. Upscaling: effective medium theory, numerical methods and the fractal dream. *Pure Appl. Geophys.*, 2006, vol. 163, no. 5–6, pp. 1175–1192, doi: <https://doi.org/10.1007/s00024-006-0053-y>
- [20] Hollister S.J., Kikuchi N. A comparison of homogenization and standard mechanics analyses for periodic porous composites. *Comput. Mech.*, 1992, vol. 10, no. 2, pp. 73–95, doi: <https://doi.org/10.1007/BF00369853>
- [21] Marcián P., Florian Z., Horáčková L. et al. Microstructural finite-element analysis of influence of bone density and histomorphometric parameters on mechanical behavior of mandibular cancellous bone structure. *Solid State Phenom.*, 2016, vol. 258, pp. 362–365, doi: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/SSP.258.362>
- [22] Kayumov R.A., Muhamedova I.Z., Tazyukov B.F. et al. Parameter determination of hereditary models of deformation of composite materials based on identification method. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2018, vol. 973, art. 012006, doi: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/973/1/012006>

- [23] Sachenkov O.A., Gerasimov O.V., Koroleva E.V. et al. Building the inhomogeneous finite element model by the data of computed tomography. *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki* [Russian Journal of Biomechanics], 2018, vol. 22, no. 3, pp. 332–344. (In Russ.).
- [24] Gerasimov O.V., Kharin N.V., Fedyanin A.O. et al. Bone stress-strain state evaluation using CT based FEM. *Front. Mech. Eng.*, 2021, vol. 7, art. 688474, doi: <https://doi.org/10.3389/fmech.2021.688474>
- [25] Maquer G., Musy S.N., Wandel J. et al. Bone volume fraction and fabric anisotropy are better determinants of trabecular bone stiffness than other morphological variables. *J. Bone Miner. Res.*, 2015, vol. 30, no. 6, pp. 1000–1008, doi: <https://doi.org/10.1002/jbmr.2437>
- [26] Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 1987, vol. 24, no. 2, pp. 337–357, doi: <https://doi.org/10.1002/nme.1620240206>
- [27] Grassi L., Schileo E., Taddei F. et al. Accuracy of finite element predictions in sideways load configurations for the proximal human femur. *J. Biomech.*, 2012, vol. 45, no. 2, pp. 394–399, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2011.10.019>
- [28] Giovannelli L., Ródenas J.J., Navarro-Jiménez J.M. et al. Direct medical image-based Finite Element modelling for patient-specific simulation of future implants. *Finite Elem. Anal. Des.*, 2017, vol. 136, pp. 37–57, doi: <https://doi.org/10.1016/j.finel.2017.07.010>
- [29] Gerasimov O.V., Berezhnoy D.V., Bolshakov P.V. et al. Mechanical model of a heterogeneous continuum based on numerical-digital algorithm processing computer tomography data. *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki* [Russian Journal of Biomechanics], 2019, vol. 23, no. 1, pp. 104–116, doi: <https://doi.org/10.15593/RJBiomech/2019.1.10> (in Russ.).
- [30] Gerasimov O., Kharin N., Statsenko E. et al. Patient-specific bone organ modeling using CT based FEM. In: Mesh methods for boundary-value problems and applications. *Springer*, 2022, pp. 125–139, doi: https://doi.org/10.1007/978-3-030-87809-2_10
- [31] Vorobyev O.V., Semenova E.V., Mukhin D.A. et al. The image-based finite element evaluation of the deformed state. *Vestnik PNIPU. Mekhanika* [PNRPU Mechanics Bulletin], 2021, no. 2, pp. 44–54, doi: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.2.05> (in Russ.).
- [32] Gerasimov O., Sharafutdinova K., Rakhmatullin R. et al. Application of a digital prototype for CT-based bone strength analysis. *ITNT*, 2022, doi: <https://doi.org/10.1109/ITNT55410.2022.9848693>
- [33] Gerasimov O., Kharin N., Yaikova V. et al. Direct image-based micro finite element modeling of bone tissue. *MATEC Web Conf.*, 2020, vol. 329, art. 03072, doi: <https://doi.org/10.1051/mateconf/202032903072>
- [34] Rho J.Y., Hobatho M.C., Ashman R.B. Relations of mechanical properties to density and CT numbers in human bone. *Med. Eng. Phys.*, 1995, vol. 17, no. 5, pp. 347–355, doi: [https://doi.org/10.1016/1350-4533\(95\)97314-f](https://doi.org/10.1016/1350-4533(95)97314-f)
- [35] Kieser D.C., Kanade S., Waddell N.J. et al. The deer femur — a morphological and biomechanical animal model of the human femur. *Biomed. Mater. Eng.*, 2014, vol. 24, no. 4, pp. 1693–1703, doi: <https://doi.org/10.3233/BME-140981>
- [36] Shakirzyanov F.R., Kayumov R.A., Paymushin V.N. et al. About the causes of the bearing capacity loss of a composite beam under three-point bending. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Ser. Fiziko-matematicheskie nauki*, 2022, vol. 164, no. 2–3, pp. 221–243. (In Russ.).
- [37] Crenshaw T.D., Peo Jr.E.R., Lewis A.J. et al. Bone strength as a trait for assessing mineralization in swine: a critical review of techniques involved. *J. Anim. Sci.*, 1981, vol. 53, no. 3, pp. 827–835, doi: <https://doi.org/10.2527/JAS1981.533827X>
- [38] Imai K. Computed tomography-based finite element analysis to assess fracture risk and osteoporosis treatment. *World J. Exp. Med.*, 2015, vol. 5, no. 3, pp. 182–187, doi: <https://doi.org/10.5493/wjem.v5.i3.182>

Статья поступила в редакцию 24.08.2023

Информация об авторах

ПРУНОВ Валерий Вячеславович — лаборант-исследователь кафедры теоретической механики. Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета (420008, Казань, Российская Федерация, ул. Кремлевская, д. 18, e-mail: wipstr80@gmail.com).

КУЗНЕЦОВ Михаил Евгеньевич — ведущий инженер ИЛ ПНК ЛА ИАТТ. Казанский национальный исследовательский технический университет им А.Н. Туполева — КАИ (420111, Казань, Российская Федерация, ул. Карла Маркса, д. 10, e-mail: mekuznetsov@kai.ru).

КРОТОВА Екатерина Викторовна — ведущий инженер ИЛ ПНК ЛА ИАТТ. Казанский национальный исследовательский технический университет им А.Н. Туполева — КАИ (420111, Казань, Российская Федерация, ул. Карла Маркса, д. 10, e-mail: kati_mit@mail.ru).

САЧЕНКОВ Оскар Александрович — кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой компьютерной математики и информатики. Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета (420008, Казань, Российская Федерация, ул. Кремлевская, д. 18, e-mail: 4works@bk.ru).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Прунов В.В., Кузнецов М.Е., Кротова Е.В., Саченков О.А. Оценка прочности полосы с вырезом при растяжении с учетом локального дефекта материала. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2024, № 2, с. 10–21.

Please cite this article in English as:

Prunov V.V., Kuznetsov M.E., Krotova E.V., Sachenkov O.A. Strength assessment of a strip with circular cut in tension taking into account material local defect of the material. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2024, no. 2, pp. 10–21.

Information about the authors

PRUNOV Valeriy Vyacheslavovich — Laboratory Researcher, Department of Theoretical Mechanics. N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics. Kazan (Volga Region) Federal University (420008, Kazan, Russian Federation, Kremlin St., Bldg. 18, e-mail: wipstr80@gmail.com).

KUZNETSOV Mikhail Evgenyevich — Leading Engineer, IL PNC LA IATT. Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev — KAI (420111, Kazan, Russian Federation, K. Marx St., Bldg. 10, e-mail: mekuznetsov@kai.ru).

KROTOVA Ekaterina Viktorovna — Leading Engineer, IL PNC LA IATT. Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev — KAI (420111, Kazan, Russian Federation, K. Marx St., Bldg. 10, e-mail: kati_mit@mail.ru).

SACHENKOV Oskar Alexandrovich — Candidate of Science (Phys.-Math.), Head of the Department of Computer Mathematics and Informatics. N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan (Volga Region) Federal University (420008, Kazan, Russian Federation, Kremlin St., Bldg. 18, e-mail: 4works@bk.ru).