

УДК 621.643:539.3

Точное решение задачи Мичелла применительно к трубопроводам

В.С. Корнеев, С.А. Корнеев, В.В. Шалай

Омский государственный технический университет

Exact solution of the Michell's problem for the pipelines

V.S. Korneev, S.A. Korneev, V.V. Shalay

Omsk State Technical University

Для повышения точности и достоверности прочностных расчетов наиболее нагруженных участков трубопровода, проводимых с использованием теории упругих стержней, применяют методы математической теории упругости, соответствующие краевые задачи которой решают численно или аналитически. Известными примерами аналитического решения служит решение задачи Ламе для трубы, находящейся под действием внутреннего и наружного давления, и решение задачи Сен-Венана об изгибе призматического стержня кольцевого поперечного сечения, заделанного на одном конце и нагруженного поперечной силой на другом. Естественным продолжением задачи Сен-Венана является задача Мичелла, где рассматривают напряженное состояние в призматическом стержне, равномерно нагруженного по боковой поверхности. В научно-технической литературе задача Мичелла решена для общего случая призматического стержня произвольного поперечного сечений. Поэтому практическое применение имеющихся расчетных формул для кольцевого поперечного сечения трубопровода является затруднительным. В связи с этим рассмотрена и решена задача Мичелла в постановке, достаточной для нужд трубопроводного транспорта, когда на наружную и внутреннюю боковые поверхности воздействуют равномерно распределенные касательные напряжения, возникающие при осевом смещении и прокручивании трубопровода в грунте, а также при транспортировании высоковязких продуктов. Точное решение задачи Мичелла получено в напряжениях. Предварительно найдено приближенное решение задачи методами сопротивления материалов. Показано, что теория упругих стержней дает достоверные результаты для напряжений, а также достаточно точные результаты для перемещений, несмотря на деформацию поперечных сечений. Полученные результаты также могут быть полезны при разработке логически непротиворечивых математических моделей упругих стержней, работы над которыми ведутся по настоящее время.

EDN: JZQNYC, <https://elibrary/jzqnyc>**Ключевые слова:** призматический стержень, кольцевое поперечное сечение, задача Мичелла, модель растяжения и кручения стержня, точное решение в напряжениях

To improve accuracy and reliability in strength computation of the most loaded pipeline sections carried out using the theory of elastic rods, methods of the mathematical theory of elasticity are used. Their corresponding boundary value problems are solved numerically or analytically. Well-known examples of the analytical solutions include solution of the Lamé problem for a pipe exposed to internal and external pressure and solution of the Saint-Venant problem on the bending of a prismatic rod with the annular cross-section sealed at one end and loaded with a transverse force at the other. The Mitchell's problem is a natural

continuation of the Saint-Venant problem, as it considers the stress state in a prismatic rod uniformly loaded along the lateral surface. The scientific and technical literature provides solutions to the Michell's problem for a general case of the prismatic rod with the arbitrary cross-section. Therefore, practical application of the available computation formulas for the pipeline annular cross-section is problematic. The paper considers and solves the Michell's problem in a formulation satisfying the pipeline transportation requirements, when the outer and inner side surfaces are exposed to the uniformly distributed tangential stresses arising from the axial displacement and pipeline twisting in the ground, as well as in transportation of the highly viscous products. Exact solution to the Michell's problem is obtained in stresses. An approximate solution to the problem was preliminarily found by the methods of strength of materials. The paper shows that the theory of elastic rods provides reliable results for stresses, as well as fairly accurate results for the displacements, despite the cross sections warping. The results obtained could also be useful in developing the logically consistent mathematical models of elastic rods, work on which is still underway.

EDN: JZQNYC, <https://elibrary/jzqnyc>

Keywords: prismatic rod, annular cross-section, Michell's problem, rod tension and torsion model, exact solution in stresses

Транспортирование нефти и газа по магистральным трубопроводам занимает особое место в экономике нашей страны. Для обеспечения надежности и безопасности трубопроводов к расчетам привлекают их балочные, оболочечные и объемные модели [1].

Для расчета параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) проектируемого или эксплуатируемого трубопровода в основном используют балочную модель, где трубопровод рассматривают как балку (стержень) с кольцевым поперечным сечением [2–4].

Предлагаются новые подходы к описанию НДС трубопровода как по балочной модели, так и других стержневых конструкций [5–8]. Но, строго говоря, балочная модель позволяет приближенно находить только основные напряжения, т. е. действующие в поперечном сечении стержня нормальные напряжения при растяжении и изгибе, а также касательные напряжения при кручении. В типичной для теории стержней ситуации эти напряжения являются преобладающими, что позволяет пренебречь остальными, так сказать, дополнительными напряжениями. Иными словами, проблема определения напряжений выходит за рамки теории стержней [7].

При анализе НДС нагруженных участков трубопроводных конструкций более общую картину дают точные решения классической теории упругости. Наиболее известной задачей классической теории упругости, напрямую относящейся к вопросам прочности трубопроводов, является задача Ламе для прямой трубы кольцевого поперечного сечения, находящейся под действи-

ем внутреннего и внешнего давления. Точное решение задачи Ламе широко представлено в научно-технической литературе [9–12].

Другой по важности является задача Сен-Венана об изгибе заделанной балки поперечной силой, действующей на ее конце. Для кольцевого поперечного сечения точное решение задачи Сен-Венана приведено в работе [13]. В отличие от формулы Журавского [14, 15] оно позволяет точно оценить распределение касательных напряжений при действии поперечных сил.

Естественным продолжением задачи Сен-Венана является задача Мичелла [16], где рассматривают напряженное состояние в призматическом стержне, равномерно нагруженном по его боковой поверхности. Такое нагружение возникает, например, при взаимодействии трубопровода с грунтом [17] и при транспортировании по трубопроводу высоковязкой нефти [18]. В научно-технической литературе решение задачи Мичелла приведено для общего случая призматического стержня произвольного поперечного сечения. Поэтому практическое применение имеющихся расчетных формул для кольцевого поперечного сечения трубопровода является затруднительным.

Цель работы — точное решение задачи Мичелла в постановке, достаточной для нужд трубопроводного транспорта: на наружной и внутренней боковой поверхностях трубы действуют равномерно распределенные касательные напряжения.

Для точного решения задачи Мичелла использован полуобратный метод Сен-Венана в напряжениях. Предварительно было найдено

приближенное решение задачи методами сопротивления материалов.

Постановка задачи. Прямой трубчатый стержень длиной l с внутренним r_1 и наружным r_2 радиусами нагружен по внутренней и наружной боковым поверхностям равномерно распределенными касательными напряжениями: растягивающими τ_{1z}^{ext} , τ_{2z}^{ext} и крутящими $\tau_{1\varphi}^{ext}$, $\tau_{2\varphi}^{ext}$ (рис. 1).

Ось z декартовой системы координат совмещена с геометрической осью трубы, начало координат O совпадает с центром тяжести левого поперечного сечения, которое закреплено по контуру радиуса r_1 . Правое поперечное сечение свободно от нагрузок. Цилиндрическая система координат r, φ, z связана с декартовой системой координат x, y, z общепринятым образом (на рис. 1 не показана). Требуется определить НДС в точках трубчатого стержня.

Приближенное решение методами сопротивления материалов. В рассматриваемой задаче (см. рис. 1) математическая модель растяжения и кручения стержня включает в себя дифференциальные уравнения [14, 15]

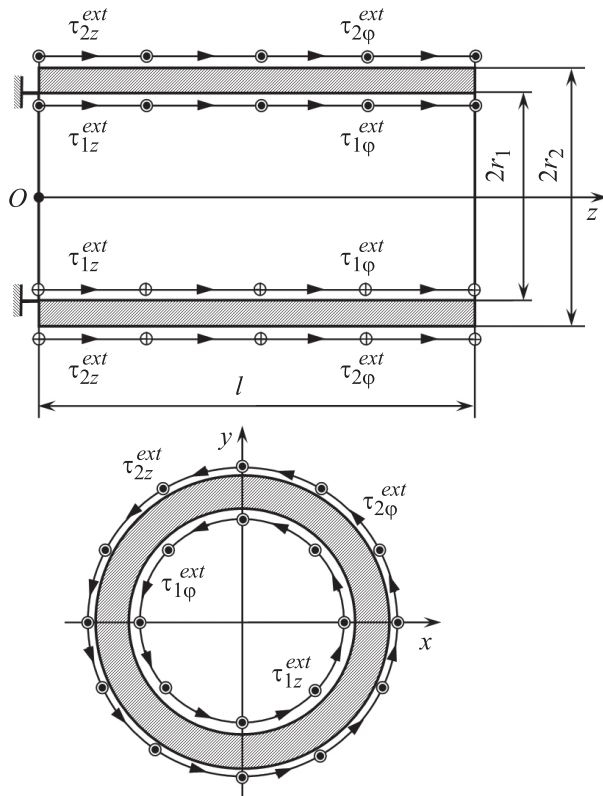


Рис. 1. Расчетная схема трубчатого стержня

$$\frac{dN}{dz} = -q_z; \quad \frac{du_z}{dz} = \frac{N}{EF}; \quad (1)$$

$$\frac{dM_z}{dz} = -m_z; \quad \frac{d\varphi_z}{dz} = \frac{M_z}{GJ_p} \quad (2)$$

с граничными условиями

$$N|_{z=l} = 0; \quad u_z|_{z=0} = 0; \quad (3)$$

$$M_z|_{z=l} = 0; \quad \varphi_z|_{z=0} = 0. \quad (4)$$

Здесь N — продольное усилие; q_z — погонная (на единицу длины стержня) внешняя силовая нагрузка; u_z — осевое перемещение; E — модуль Юнга; F и J_p — площадь и полярный момент поперечного сечения; M_z — крутящий момент; m_z — погонная внешняя моментная нагрузка; φ_z — угол закручивания; G — модуль сдвига.

В выражениях (1) и (2):

$$F = \pi(r_2^2 - r_1^2); \quad J_p = \frac{\pi}{2}(r_2^4 - r_1^4); \quad (5)$$

$$q_z = 2\pi(r_2\tau_{2z}^{ext} + r_1\tau_{1z}^{ext}); \quad (6)$$

$$m_z = 2\pi(r_2^2\tau_{2\varphi}^{ext} + r_1^2\tau_{1\varphi}^{ext}). \quad (7)$$

Решение задач (1)–(7) имеет вид

$$N = q_z(l - z); \quad u_z = \frac{q_z}{EF} \left(lz - \frac{z^2}{2} \right); \quad (8)$$

$$M_z = m_z(l - z); \quad \varphi_z = \frac{m_z}{GJ_p} \left(lz - \frac{z^2}{2} \right). \quad (9)$$

Возникающие в поперечных сечениях осевое нормальное напряжение σ_z и окружное касательное напряжение $\tau_{\varphi z}$ определяются выражениями [14, 15]

$$\sigma_z = \frac{N}{F} = 2 \frac{r_2\tau_{2z}^{ext} + r_1\tau_{1z}^{ext}}{r_2^2 - r_1^2} (l - z); \quad (10)$$

$$\tau_{\varphi z} = \frac{M_z}{J_p} r = 4 \frac{r_2^2\tau_{2\varphi}^{ext} + r_1^2\tau_{1\varphi}^{ext}}{r_2^4 - r_1^4} r (l - z). \quad (11)$$

Осевые u_z и окружные u_φ перемещения вычисляются как

$$u_z = \frac{2}{E} \frac{r_2\tau_{2z}^{ext} + r_1\tau_{1z}^{ext}}{r_2^2 - r_1^2} \left(lz - \frac{z^2}{2} \right); \quad (12)$$

$$u_\varphi = r\varphi_z = \frac{4}{G} \frac{r_2^2\tau_{2\varphi}^{ext} + r_1^2\tau_{1\varphi}^{ext}}{r_2^4 - r_1^4} r \left(lz - \frac{z^2}{2} \right). \quad (13)$$

Формулы (10)–(13) получены на основании выражений (8), (9) с учетом соотношений (5)–(7).

По закону парности внешние осевые касательные напряжения τ_{1z}^{ext} , τ_{2z}^{ext} и внешние окружные касательные напряжения $\tau_{1\varphi}^{ext}$, $\tau_{2\varphi}^{ext}$

(см. рис. 1) должны вызывать внутренние касательные напряжения τ_{rz} и $\tau_{\varphi z}$ соответственно. Чтобы определить распределение указанных касательных напряжений, можно воспользоваться приемом, который в сопротивлении материалов приводит к формуле Журавского для распределения касательных напряжений при поперечном изгибе балки.

Рассмотрим элемент трубчатого стержня бесконечно малой длины dz с наружным r_2 и внутренним r радиусами (рис. 2). К наружной боковой поверхности элемента приложены осевые τ_{2z}^{ext} и окружные $\tau_{2\varphi}^{ext}$ внешние касательные напряжения, а к внутренней боковой поверхности — искомые касательные напряжения — осевые τ_{rz} и окружные $\tau_{r\varphi}$.

В поперечных сечениях элемента действуют продольная сила N^* и крутящий момент M_z^* , которые с учетом выражений (10) и (11) имеют вид

$$\begin{aligned} N^* &= \int_{F^*} \sigma_z dF^* = 2\pi \int_r^{r_2} \sigma_z r dr = \\ &= 2\pi \frac{r_2 \tau_{2z}^{ext} + r_1 \tau_{1z}^{ext}}{r_2^2 - r_1^2} (l-z)(r_2^2 - r^2); \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} M_z^* &= \int_{F^*} r \tau_{\varphi z} dF^* = 2\pi \int_r^{r_2} r^2 \tau_{\varphi z} dr = \\ &= 2\pi \frac{r_2^2 \tau_{2\varphi}^{ext} + r_1^2 \tau_{1\varphi}^{ext}}{r_2^4 - r_1^4} (l-z)(r_2^4 - r^4), \end{aligned} \quad (15)$$

где F^* — площадь поперечного сечения элемента.

Рассмотрим равновесие элемента стержня (рис. 2) и составим уравнение проекций сил на

ось z и уравнение моментов относительно оси z :

$$N^* + dN^* - N^* + 2\pi r_2 \tau_{2z}^{ext} dz - 2\pi r \tau_{rz} dz = 0;$$

$$M_z^* + dM_z^* - M_z^* + 2\pi r_2^2 \tau_{2\varphi}^{ext} dz - 2\pi r^2 \tau_{r\varphi} dz = 0.$$

Отсюда имеем

$$\tau_{rz} = \frac{1}{2\pi r} \frac{dN^*}{dz} + \frac{r_2}{r} \tau_{2z}^{ext}; \quad \tau_{r\varphi} = \frac{1}{2\pi r^2} \frac{dM_z^*}{dz} + \frac{r_2^2}{r^2} \tau_{2\varphi}^{ext}.$$

После подстановки в эти формулы выражений (14) и (15) получаем

$$\tau_{rz} = \frac{r_2 \tau_{2z}^{ext} + r_1 \tau_{1z}^{ext}}{r_2^2 - r_1^2} r - \frac{r_1 r_2 (r_1 \tau_{2z}^{ext} + r_2 \tau_{1z}^{ext})}{(r_2^2 - r_1^2) r}; \quad (16)$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{r_2^2 \tau_{2\varphi}^{ext} + r_1^2 \tau_{1\varphi}^{ext}}{r_2^4 - r_1^4} r^2 - \frac{r_1^2 r_2^2 (r_1^2 \tau_{2\varphi}^{ext} + r_2^2 \tau_{1\varphi}^{ext})}{(r_2^4 - r_1^4) r^2}. \quad (17)$$

Таким образом, осталось выяснить, насколько точными являются приближенные формулы (10)–(13), (16), (17).

Точное решение в напряжениях. Будем следовать полуобратному методу Сен-Венана [9–12]. На основании решения (10), (11), (16), (17), полученного методами сопротивления материалов, принимаем в качестве гипотезы следующее:

$$T_{rr} = 0; \quad T_{\varphi\varphi} = 0;$$

$$T_{zz} = \sigma_z = 2 \frac{r_2 \tau_{2z}^{ext} + r_1 \tau_{1z}^{ext}}{r_2^2 - r_1^2} (l-z); \quad (18)$$

$$\begin{aligned} T_{r\varphi} &= \tau_{r\varphi} = \\ &= \frac{r_2^2 \tau_{2\varphi}^{ext} + r_1^2 \tau_{1\varphi}^{ext}}{r_2^4 - r_1^4} r^2 - \frac{r_1^2 r_2^2 (r_1^2 \tau_{2\varphi}^{ext} + r_2^2 \tau_{1\varphi}^{ext})}{(r_2^4 - r_1^4) r^2}; \end{aligned} \quad (19)$$

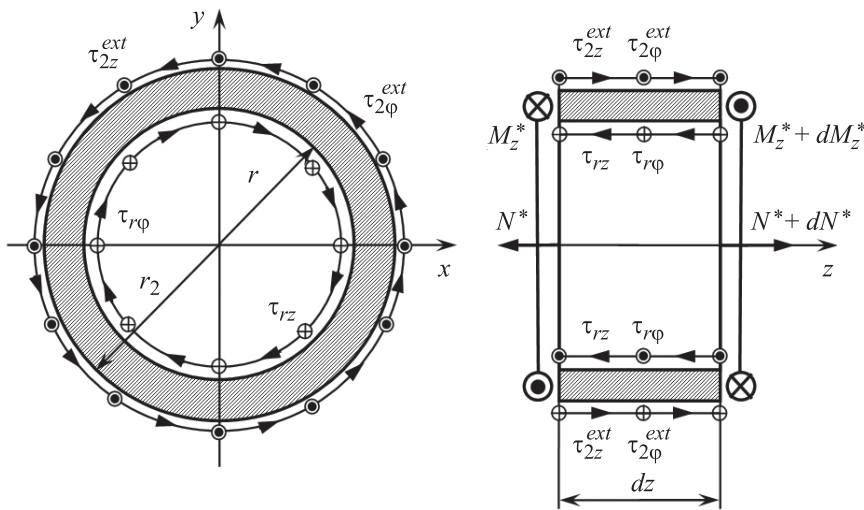


Рис. 2. Расчетная схема элемента трубчатого стержня

$$T_{rz} = \tau_{rz} = \frac{r_2 \tau_{2z}^{ext} + r_1 \tau_{1z}^{ext}}{r_2^2 - r_1^2} r - \frac{r_1 r_2 (r_1 \tau_{2z}^{ext} + r_2 \tau_{1z}^{ext})}{(r_2^2 - r_1^2) r}; \quad (20)$$

$$T_{\varphi z} = \tau_{\varphi z} = 4 \frac{r_2^2 \tau_{2\varphi}^{ext} + r_1^2 \tau_{1\varphi}^{ext}}{r_2^4 - r_1^4} r (l - z). \quad (21)$$

Здесь T_{rr} , $T_{\varphi\varphi}$, T_{zz} , $T_{r\varphi}$, T_{rz} и $T_{\varphi z}$ — тензорные обозначения, использованные вместо технических обозначений Кармана σ_r , σ_φ , σ_z , $\tau_{r\varphi}$, τ_{rz} и $\tau_{\varphi z}$.

Математическая модель упругого деформируемого твердого тела классической теории упругости при отсутствии внешних массовых сил включает в себя:

- уравнения равновесия [10]

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\varphi\varphi}}{r} &= 0; \\ \frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial T_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r} T_{r\varphi} &= 0; \quad (22) \\ \frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{zr}}{r} &= 0; \end{aligned}$$

- обратный закон Гука

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} T_{ij} - 3 \frac{\nu}{E} \sigma \delta_{ij} \quad (i, j = r, \varphi, z); \quad (23)$$

- дифференциальные зависимости Коши для компонентов тензора деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right); \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right); \\ \varepsilon_{\varphi z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right); \quad (24) \end{aligned}$$

- уравнения совместности деформаций Сен-Венана

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\varphi}}{\partial r \partial \varphi} + \\ + \frac{1}{r} \left(2 \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial r} - \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial \varepsilon_{r\varphi}}{\partial \varphi} \right) &= 0; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{rz}}{\partial r \partial z} &= 0; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \varphi \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\varphi z}}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\varphi}}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rz}}{\partial r \partial \varphi} + \\ + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varepsilon_{\varphi z}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{r\varphi}}{\partial z} - \frac{\varepsilon_{\varphi z}}{r} \right) &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rz}}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\varphi}}{\partial \varphi \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{\varphi z}}{\partial r \partial \varphi} + \\ + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{\varphi z}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial z} \right) &= 0; \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial r} - \\ - \frac{2}{r} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{\varphi z}}{\partial \varphi \partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{rz}}{\partial z} \right) &= 0, \quad (25) \end{aligned}$$

где ν — коэффициент Пуассона, связанный с модулем сдвига через модуль Юнга следующим образом:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad (26)$$

σ — среднее напряжение,

$$\sigma = \frac{T_{rr} + T_{\varphi\varphi} + T_{zz}}{3}; \quad (27)$$

δ_{ij} — символы Кронекера.

Приведенные соотношения получены для цилиндрической системы координат.

Отметим, что принятая гипотеза (18)–(21) автоматически удовлетворяет граничным условиям на боковых поверхностях трубы (см. рис. 1)

$$\begin{aligned} T_{rr}|_{r=r_2} = 0; \quad T_{rr}|_{r=r_1} = 0; \quad T_{r\varphi}|_{r=r_2} = \tau_{2\varphi}^{ext}; \\ T_{r\varphi}|_{r=r_1} = -\tau_{1\varphi}^{ext}; \quad T_{rz}|_{r=r_2} = \tau_{2z}^{ext}; \quad T_{rz}|_{r=r_1} = -\tau_{1z}^{ext}. \end{aligned}$$

Благодаря ранее принятым граничным условиям (3) и (4) соблюдено условие отсутствия нагрузок на правом поперечном сечении

$$\begin{aligned} N|_{z=l} = \int_F T_{zz}|_{z=l} dF = 0; \\ M_z|_{z=l} = \int_F r T_{\varphi z}|_{z=l} dF = 0. \end{aligned}$$

Остальные граничные условия сформулируем позже.

После подстановки выражений (18)–(21) в уравнения равновесия (22) очевидным образом убеждаемся в их строгом соблюдении.

Подставляя выражения (18)–(21) в обратный закон Гука (23), с учетом формул (26) и (27) определяем компоненты тензора деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\varphi\varphi} &= -\frac{\nu}{\mu(1+\nu)} \frac{r_2 \tau_{2z}^{ext} + r_1 \tau_{1z}^{ext}}{r_2^2 - r_1^2} (l - z); \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{r_2 \tau_{2z}^{ext} + r_1 \tau_{1z}^{ext}}{\mu(1+\nu)(r_2^2 - r_1^2)} (l - z); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2\mu(r_2^4 - r_1^4)} \times \\ &\times \left[(r_2^2 \tau_{2\varphi}^{ext} + r_1^2 \tau_{1\varphi}^{ext}) r^2 - (r_1^2 \tau_{2\varphi}^{ext} + r_2^2 \tau_{1\varphi}^{ext}) \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} \right]; \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2\mu(r_2^2 - r_1^2)} \times \\ &\times \left[(r_2 \tau_{2z}^{ext} + r_1 \tau_{1z}^{ext}) r - (r_1 \tau_{2z}^{ext} + r_2 \tau_{1z}^{ext}) \frac{r_1 r_2}{r} \right]; \\ \varepsilon_{\varphi z} &= 2 \frac{r_2^2 \tau_{2\varphi}^{ext} + r_1^2 \tau_{1\varphi}^{ext}}{\mu(r_2^4 - r_1^4)} r(l-z).\end{aligned}\quad (28)$$

Подстановка выражений (28) в уравнения совместности деформаций Сен-Венана (25) показывает, что они выполняются полностью.

Чтобы найти перемещения, обратимся к дифференциальным зависимостям Коши в цилиндрической системе координат (24). Применительно к рассматриваемой задаче, которая является осесимметричной, запишем

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ 2\varepsilon_{r\varphi} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}; \quad 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}; \quad 2\varepsilon_{\varphi z} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}\end{aligned}$$

или с учетом выражений (28)

$$u_r = r\varepsilon_{\varphi\varphi} = -\frac{\nu}{\mu(1+\nu)} \frac{r_2 \tau_{2z}^{ext} + r_1 \tau_{1z}^{ext}}{r_2^2 - r_1^2} (l-z)r; \quad (29)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_z}{\partial r} &= 2\varepsilon_{rz} - \frac{\partial u_r}{\partial z} = \\ &= \frac{r_2 \tau_{2z}^{ext} + r_1 \tau_{1z}^{ext}}{\mu(1+\nu)(r_2^2 - r_1^2)} r - \frac{r_1 r_2 (r_1 \tau_{2z}^{ext} + r_2 \tau_{1z}^{ext})}{\mu(r_2^2 - r_1^2)} \frac{1}{r};\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \varepsilon_{zz} = \frac{r_2 \tau_{2z}^{ext} + r_1 \tau_{1z}^{ext}}{\mu(1+\nu)(r_2^2 - r_1^2)} (l-z);$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} &= r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) = 2\varepsilon_{r\varphi} = \\ &= \frac{r_2^2 \tau_{2\varphi}^{ext} + r_1^2 \tau_{1\varphi}^{ext}}{\mu(r_2^4 - r_1^4)} r^2 - \frac{r_1^2 r_2^2 (r_1^2 \tau_{2\varphi}^{ext} + r_2^2 \tau_{1\varphi}^{ext})}{\mu(r_2^4 - r_1^4)} \frac{1}{r^2};\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} = r \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) = 2\varepsilon_{\varphi z} = 4 \frac{r_2^2 \tau_{2\varphi}^{ext} + r_1^2 \tau_{1\varphi}^{ext}}{\mu(r_2^4 - r_1^4)} r(l-z).$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned}du_z &= \frac{\partial u_z}{\partial r} dr + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz = \\ &= \frac{r_2 \tau_{2z}^{ext} + r_1 \tau_{1z}^{ext}}{\mu(1+\nu)(r_2^2 - r_1^2)} d \left(\frac{r^2}{2} + lz - \frac{z^2}{2} \right) -\end{aligned}$$

$$- \frac{r_1 r_2 (r_1 \tau_{2z}^{ext} + r_2 \tau_{1z}^{ext})}{\mu(r_2^2 - r_1^2)} d(\ln r);$$

$$\begin{aligned}d \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) dr + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) dz = \\ &= \frac{r_2^2 \tau_{2\varphi}^{ext} + r_1^2 \tau_{1\varphi}^{ext}}{\mu(r_2^4 - r_1^4)} d \left[\frac{r^2}{2} + 4 \left(lz - \frac{z^2}{2} \right) \right] + \\ &+ \frac{r_1^2 r_2^2 (r_1^2 \tau_{2\varphi}^{ext} + r_2^2 \tau_{1\varphi}^{ext})}{2\mu(r_2^4 - r_1^4)} d \frac{1}{r^2}.\end{aligned}$$

Исходя из условий закрепления (см. рис. 1)

$$u_z \Big|_{z=0} = 0; \quad u_\varphi \Big|_{z=0} = 0,$$

интегрированием получаем

$$\begin{aligned}u_z &= \frac{r_2 \tau_{2z}^{ext} + r_1 \tau_{1z}^{ext}}{\mu(1+\nu)(r_2^2 - r_1^2)} \left(\frac{r^2 - r_1^2}{2} + lz - \frac{z^2}{2} \right) - \\ &- \frac{r_1 r_2 (r_1 \tau_{2z}^{ext} + r_2 \tau_{1z}^{ext})}{\mu(r_2^2 - r_1^2)} \ln \frac{r}{r_1};\end{aligned}\quad (30)$$

$$\begin{aligned}u_\varphi &= \frac{r_2^2 \tau_{2\varphi}^{ext} + r_1^2 \tau_{1\varphi}^{ext}}{\mu(r_2^4 - r_1^4)} \left[\frac{r^2 - r_1^2}{2} + 4 \left(lz - \frac{z^2}{2} \right) \right] r + \\ &+ \frac{r_1^2 r_2^2 (r_1^2 \tau_{2\varphi}^{ext} + r_2^2 \tau_{1\varphi}^{ext})}{2\mu(r_2^4 - r_1^4)} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) r.\end{aligned}\quad (31)$$

Обсуждение результатов. Точные выражения (29)–(31) для перемещений показывают, что при действии внешних растягивающих нагрузок имеет место депланация поперечных сечений, которая неоднородна по длине трубы. Напротив, при действии закручивающих внешних нагрузок поперечные сечения остаются плоскими. На внутренней боковой поверхности (т. е. при $r = r_1$) точные формулы для осевых (30) и окружных (31) перемещений совпадают с соответствующими приближенными формулами (12) и (13) сопротивления материалов.

Выражения для напряжений (18)–(21), полученные методами сопротивления материалов, являются точными с точки зрения классической теории упругости. Данный факт можно назвать почти ожидаемым, но не закономерным. Например, формула Журавского для касательных напряжений в прямоугольном поперечном сечении при поперечном изгибе балки не относится к точным выражениям, так как определяемое в сопротивлении материалов напряженное состояние не удовлетворяет усло-

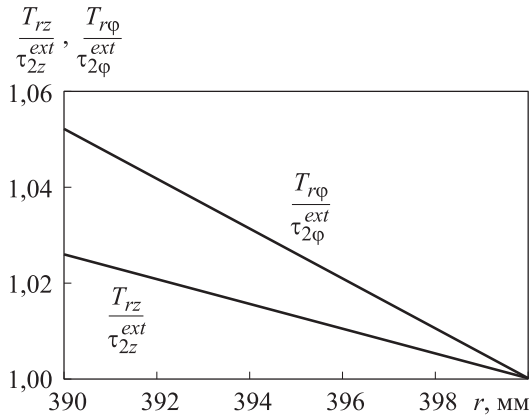


Рис. 3. Распределение дополнительных напряжений по толщине стенки стальной трубы ($E = 200$ ГПа, $\nu = 0,3$, $r_2 = 400$ мм, $r_1 = l = 390$ мм) при погонных нагрузках $q_z = 0$, $m_z = 0$

виям совместности Сен-Венана, вследствие чего не может существовать в изотропном теле [13, 19].

На практике осевые нормальные напряжения T_{zz} при растяжении и окружные касательные напряжения $T_{\phi z}$ при кручении считаются основными. Дополнительные касательные напряжения при растяжении T_{rz} и кручении $T_{r\phi}$, как правило, не принимают во внимание. Однако в том случае, когда погонные нагрузки

$$q_z = 2\pi(r_2\tau_{2z}^{ext} + r_1\tau_{1z}^{ext}) = 0$$

$$\text{и } m_z = 2\pi(r_2^2\tau_{2\phi}^{ext} + r_1^2\tau_{1\phi}^{ext}) = 0,$$

по формулам (18) и (21) основные напряжения T_{zz} и $T_{\phi z}$ равны нулю, тогда как по выражениям (19) и (20) дополнительные напряжения T_{rz} и $T_{r\phi}$ отличны от нуля (рис. 3).

В общем случае, если сравнить между собой формулы (18), (20) и выражения (19), (21), то дополнительные напряжения T_{rz} , $T_{r\phi}$ могут иметь такой же порядок величины, как и основные напряжения T_{zz} , $T_{\phi z}$ для коротких труб, длина которых соизмерима со средним радиусом. Но и для коротких труб соотношение значений напряжений T_{rz} , $T_{r\phi}$ и T_{zz} , $T_{\phi z}$ зависит от характера нагружения.

Например (рис. 4), когда $\tau_{2z}^{ext} = \tau_{1z}^{ext}$ и $\tau_{2\phi}^{ext} = \tau_{1\phi}^{ext}$, дополнительные напряжения T_{rz} , $T_{r\phi}$ распределены по толщине стенки практически по линейному закону, а их величина в 100 раз меньше максимального значения основных напряжений T_{zz} , $T_{\phi z}$ при $z = 0$. Напротив, когда $\tau_{2z}^{ext} = -\tau_{1z}^{ext}$ и $\tau_{2\phi}^{ext} = -\tau_{1\phi}^{ext}$, дополнительные напряжения T_{rz} , $T_{r\phi}$ распределены почти по параболическому закону и имеют такой

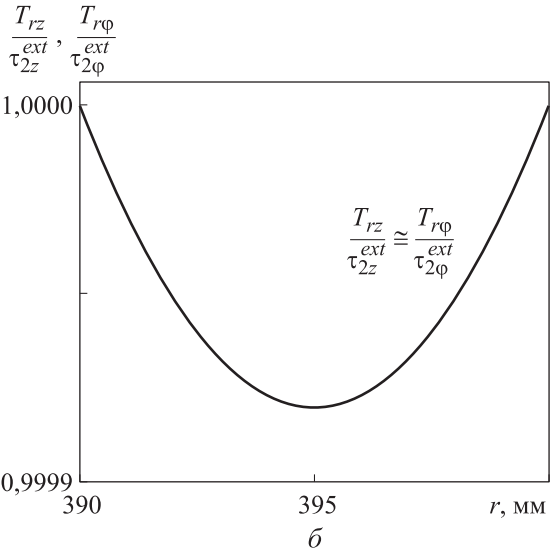
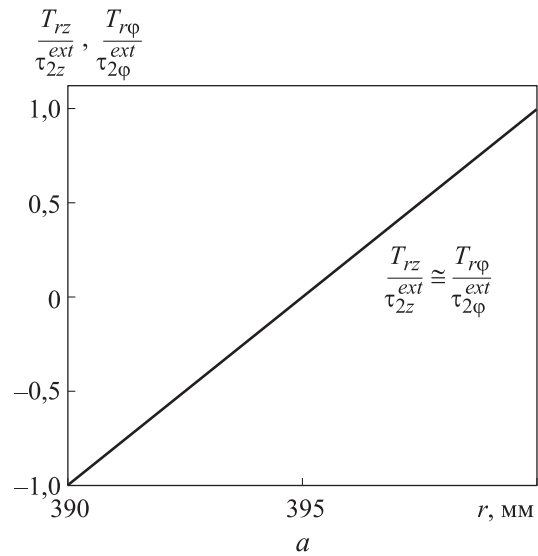


Рис. 4. Распределение дополнительных напряжений по толщине стенки стальной трубы ($E = 200$ ГПа, $\nu = 0,3$, $r_2 = 400$ мм, $r_1 = l = 390$ мм) при $\tau_{2z}^{ext} = \tau_{1z}^{ext}$, $\tau_{2\phi}^{ext} = \tau_{1\phi}^{ext}$ (а) и $\tau_{2z}^{ext} = -\tau_{1z}^{ext}$, $\tau_{2\phi}^{ext} = -\tau_{1\phi}^{ext}$ (б)

же порядок величины, как максимальные значения основных напряжений T_{zz} , $T_{\phi z}$ при $z = 0$.

Выводы

1. Получено точное решение задачи Мичелла для призматического стержня с кольцевым поперечным сечением. Определены напряжения и перемещения, возникающие в точках стержня под действием касательных напряжений, равномерно распределенных по наружной и внутренней боковым поверхностям.

2. Проведен сравнительный анализ точного решения теории упругости и приближенного

решения сопротивления материалов. Показано, что в рассмотренной задаче методы технической теории стержней позволяют получать достоверные результаты для напряжений в таком же объеме, как и точные методы классической теории упругости. Для перемещений приближенное решение обеспечивает достаточную для практики точность, несмотря на деформацию поперечных сечений.

3. В отдельных случаях нагружения как длинных стержней, так и коротких дополни-

тельные касательные напряжения, зачастую не принимаемые во внимание, могут быть сопоставимыми по величине с основными растягивающими и скручивающими напряжениями.

4. Полученные результаты предназначены для проведения уточненных прочностных расчетов наиболее нагруженных участков трубопроводов и могут быть полезны при разработке новых логически непротиворечивых математических моделей тонких упругих стержней по примеру модели, приведенной в работе [8].

Литература

- [1] Селезнев В.Е., Алешин В.В., Прялов С.Н. Основы численного моделирования магистральных трубопроводов. Москва, URSS, 2005. 492 с.
- [2] Айнбиндер А.Б., Камерштейн А.Г. Расчет магистральных трубопроводов на прочность и устойчивость. Москва, Недра, 1982. 343 с.
- [3] Азметов Х.А., Матлашов И.А., Гумеров А.Г. Прочность и устойчивость подземных трубопроводов. Санкт-Петербург, Недра, 2005. 248 с.
- [4] Гумеров К.М., Харисов Р.А., Распопов А.А. Численно-аналитический расчет напряженного состояния подземного трубопровода с учетом его конфигурации. *Наука и технологии трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов*, 2018, т. 8, № 1, с. 44–53.
- [5] Шаммазов А.М., Зарипов Р.М., Чичелов В.А. и др. Расчет и обеспечение прочности трубопроводов в сложных инженерно-геологических условиях. Т. 1. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния и устойчивости трубопроводов. Москва, Интер, 2005. 706 с.
- [6] Левин В.Е., Пустовой Н.В. Механика деформирования криволинейных стержней. Новосибирск, Изд-во НГТУ, 2008. 208 с.
- [7] Жилин П.А. Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней. Санкт-Петербург, Изд-во Политех. ун-та, 2007. 101 с.
- [8] Елисеев В.В. Механика упругих тел. Санкт-Петербург, Изд-во СПбГПУ, 2003. 336 с.
- [9] Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. Москва, Наука, 1979. 560 с.
- [10] Демидов С.П. Теория упругости. Москва, Высшая школа, 1979. 432 с.
- [11] Кац А.М. Теория упругости. Санкт-Петербург, Лань, 2002. 208 с.
- [12] Снеддон И.Н., Берри Д.С. Классическая теория упругости. Москва, Физматгиз, 1961. 220 с.
- [13] Лав А. Математическая теория упругости. Москва, Ленинград, ОНТИ, 1935. 674 с.
- [14] Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. Москва, Высшая школа, 2003. 560 с.
- [15] Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 590 с.
- [16] Лурье А.И. Теория упругости. Москва, Наука, 1970. 940 с.
- [17] Бородавкин П.П. Механика грунтов в трубопроводном строительстве. Москва, Недра, 1976. 224 с.
- [18] Литвинов В.Г. Движение нелинейно-вязкой жидкости. Москва, Наука, 1982. 376 с.
- [19] Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. Москва, Ленинград, Гостехиздат, 1947. 465 с.

References

- [1] Seleznev V.E., Aleshin V.V., Pryalov S.N. *Osnovy chislennogo modelirovaniya magistralnykh truboprovodov* [Fundamentals of numerical modelling of trunk pipelines]. Moscow, URSS Publ., 2005. 492 p. (In Russ.).

- [2] Aynbinder A.B., Kamershteyn A.G. *Raschet magistralnykh truboprovodov na prochnost i ustoychivost* [Calculation of trunk pipelines on strength and stability]. Moscow, Nedra Publ., 1982. 343 p. (In Russ.).
- [3] Azmetov Kh.A., Matlashov I.A., Gumerov A.G. *Prochnost i ustoychivost podzemnykh truboprovodov* [Strength and stability of underground pipelines.]. Sankt-Petersburg, Nedra Publ., 2005. 248 p. (In Russ.).
- [4] Gumerov K.M., Kharisov R.A., Raspopov A.A. Numerical and analytical calculation of the stress condition of an underground pipeline with due consideration of its configuration. *Nauka i tekhnologii truboprovodnogo transporta nefti i nefteproduktov* [Science and Technologies: Oil and Oil Products Pipeline Transportation], 2018, vol. 8, no. 1, pp. 44–53. (In Russ.).
- [5] Shammazov A.M., Zaripov R.M., Chichelov V.A. et al. *Raschet i obespechenie prochnosti truboprovodov v slozhnykh inzhenerno-geologicheskikh usloviyakh*. T. 1. *Chislennoe modelirovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya i ustoychivosti truboprovodov* [Calculation and ensuring the strength of pipelines in complex engineering and geological conditions. Vol. 1. Numerical modelling of stress-strain state and stability of pipelines]. Moscow, Inter Publ., 2005. 706 p. (In Russ.).
- [6] Levin V.E., Pustovoy N.V. *Mekhanika deformirovaniya krivolinyeynykh sterzhney* [Deformation mechanics of curvilinear rods]. Novosibirsk, Izd-vo NGTU Publ., 2008. 208 p. (In Russ.).
- [7] Zhilin P.A. *Prikladnaya mekhanika. Teoriya tonkikh uprugikh sterzhney* [Applied mechanics. Theory of thin elastic rods]. Sankt-Petersburg, Izd-vo Politekh. un-ta Publ., 2007. 101 p. (In Russ.).
- [8] Eliseev V.V. *Mekhanika uprugikh tel* [Mechanics of elastic bodies]. Sankt-Petersburg, Izd-vo SPbGPU Publ., 2003. 336 p. (In Russ.).
- [9] Timoshenko S., Goodier J.N. *Theory of elasticity*. McGraw-Hill, 1951. 506 p. (Russ. ed.: *Teoriya uprugosti*. Moscow, Nauka Publ., 1979. 560 p.)
- [10] Demidov S.P. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1979. 432 p. (In Russ.).
- [11] Kats A.M. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Sankt-Petersburg, Lan Publ., 2002. 208 p. (In Russ.).
- [12] Sneddon J.N., Berry D.S. *The classical theory of elasticity*. Springer, 1958. (Russ. ed.: *Klassicheskaya teoriya uprugosti*. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961. 220 p.)
- [13] Love A.E.H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge University Press, 2013. 662 p. (Russ. ed.: *Matematicheskaya teoriya uprugosti*. Moscow, Leningrad, ONTI Publ., 1935. 674 p.)
- [14] Aleksandrov A.V., Potapov V.D., Derzhavin B.P. *Soprotivlenie materialov* [Strength of materials]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2003. 560 p. (In Russ.).
- [15] Feodosyev V.I. *Soprotivlenie materialov* [Strength of materials]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2010. 590 p. (In Russ.).
- [16] Lurye A.I. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 940 p. (In Russ.).
- [17] Borodavkin P.P. *Mekhanika gruntov v truboprovodnom stroitelstve* [Mechanics of soils in pipeline construction]. Moscow, Nedra Publ., 1976. 224 p. (In Russ.).
- [18] Litvinov V.G. *Dvizhenie nelineynno-vyazkoy zhidkosti* [Movement of nonlinear-viscous liquid]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 376 p. (In Russ.).
- [19] Leybenzon L.S. *Kurs teorii uprugosti* [Course of theory of elasticity]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1947. 465 p. (In Russ.).

Статья поступила в редакцию 28.02.2024

Информация об авторах

КОРНЕЕВ Владимир Сергеевич — доктор технических наук, профессор кафедры «Нефтегазовое дело, стандартизация и метрология». Омский государственный технический университет (644050, Омск, Российская Федерация, пр. Мира, д. 11, e-mail: vskorneev@omgtu.ru).

КОРНЕЕВ Сергей Александрович — доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Нефтегазовое дело, стандартизация и метрология». Омский государственный технический университет (644050, Омск, Российская Федерация, пр. Мира, д. 11, e-mail: korsa_home@mail.ru).

ШАЛАЙ Виктор Владимирович — доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой «Нефтегазовое дело, стандартизация и метрология». Омский государственный технический университет (644050, Омск, Российская Федерация, пр. Мира, Пр. Мира, д. 11, e-mail: shalay@omgtu.ru).

Information about the authors

KORNEEV Vladimir Sergeevich — Doctor of Science (Eng.), Professor, Department of Oil and Gas Industry, Standardization and Metrology. Omsk State Technical University (644050, Omsk, Russian Federation, Mir Ave., Bldg. 11, e-mail: vskorneev@omgtu.ru).

KORNEEV Sergey Aleksandrovich — Doctor of Science (Eng.), Professor, Professor of the Department of Oil and Gas Industry, Standardization and Metrology. Omsk State Technical University (644050 Omsk, Russian Federation, Mir Ave., Bldg. 11, e-mail: korsa_home@mail.ru).

SHALAY Viktor Vladimirovich — Doctor of Science (Eng.), Professor, Head of the Department of Oil and Gas Industry, Standardization and Metrology. Omsk State Technical University (644050, Omsk, Russian Federation, Mir Ave., Bldg. 11, e-mail: shalay@omgtu.ru).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Корнеев В.С., Корнеев С.А., Шалай В.В. Точное решение задачи Мичелла применительно к трубопроводам. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2024, № 12, с. 11–20.

Please cite this article in English as:

Korneev V.S., Korneev S.A., Shalay V.V. Exact solution of the Michell's problem for the pipelines. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2024, no. 12, pp. 11–20.



Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана предлагает читателям материалы конференции «Сварка и диагностика : I Всероссийская научно-техническая конференция имени академика РАН Н.П. Алешина»

Конференция приурочена к 90-летию кафедры «Сварка, диагностика и специальная робототехника» МГТУ им. Н.Э. Баумана и посвящена вопросам современного состояния сварки и родственных процессов, а также современным разработкам в области неразрушающего контроля: в области разработки сварочных материалов, в том числе наплавочных и предназначенных для подводного применения, современного состояния различных способов сварки, включая сварку взрывом, конденсаторную сварку, сварку токами высокой частоты, электронно-лучевые процессы и дуговую сварку, использования ультразвукового контроля, электромагнитно-акустической дефектоскопии, вихретокового контроля. Освещены вопросы применения цифровых технологий в области неразрушающего контроля и сварочного производства.

По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;
press@bmstu.ru; <https://press.bmstu.ru>