

УДК 539.6.013.42

Устойчивость стержня на подвижном основании при неконсервативном нагружении

В.П. Радин, В.П. Чирков, В.Э. Цой, О.В. Новикова

НИУ «МЭИ»

Rod stability on a movable base under the non-conservative loading

V.P. Radin, V.P. Chirkov, V.E Tsoy, O.V. Novikova

National Research University — Moscow Power Engineering Institute

Исследование устойчивости механических систем при воздействии неконсервативных нагрузок нередко приводит к неожиданным результатам. Это часто связано с изменениями в расчетных схемах конструкций. Проведено исследование устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня, связанного упругим шарниром с твердым телом (основанием), которое упруго закреплено от поперечных к оси стержня смещений. Стержень нагружен потенциальной и следящей силами. С применением метода разложения решения возмущенного движения в ряд по собственным формам колебаний системы на плоскости параметров нагрузки построены границы области устойчивости. Проиллюстрирована дестабилизация системы при изменении параметра внутреннего трения в материале стержня. На прямых, пересекающих область устойчивости в зонах немонотонного изменения границ, изучено поведение характеристических показателей, ответственных за устойчивость системы.

EDN: FTRNSF, <https://elibrary/ftnsf>**Ключевые слова:** стержень на подвижном основании, потенциальная и следящая силы, устойчивость прямолинейной формы равновесия, критические нагрузки, дивергенция и флаттер, границы области устойчивости

Studying mechanical systems stability exposed to the non-conservative loads often leads to the unexpected results. This is often associated with alterations in the structure design schemes. The paper presents a study of stability of the equilibrium rectilinear-form rod connected by the elastic hinge with a rigid body (base), which is elastically fixed from displacements transverse to the rod axis. The rod is loaded with potential and tracking forces. The method of expanding the solution of the disturbed motion in a series of the system oscillations eigenmodes on the loading parameters plane is used to construct boundaries of the stability region. The paper illustrates the system destabilization with alteration in the internal friction parameter of the rod material. It analyzes behavior of the characteristic indicators responsible for the system stability on straight lines intersecting the stability region in zones of the boundaries non-monotonic alteration.

EDN: FTRNSF, <https://elibrary/ftnsf>**Keywords:** rod on a movable base, potential and tracking forces, equilibrium rectilinear-form stability, critical loads, divergence and flutter

Одним из классических примеров неконсервативных задач теории упругой устойчивости является задача Бека об устойчивости консольного стержня при сжатии следящей силой [1, 2]. Обычно на примере этой задачи в учебном процессе по курсам устойчивости механических систем показывают неприменимость статического метода и необходимость использования динамического метода при их расчете под действием неконсервативных нагрузок [3–5].

Статический метод определения критических нагрузок (метод Эйлера) [6, 7] основан на отыскании условий существования смежных форм равновесия по отношению к исследуемой на устойчивость форме. Однако известно [4, 8], что при нагружении систем неконсервативными силами смежных форм равновесия может не существовать, а потеря устойчивости исходной формы равновесия происходит с возникновением в системе колебательного процесса.

Большая часть неконсервативных задач теории упругой устойчивости механических систем была сформулирована и решена еще в первой половине прошлого столетия. В связи с некоторыми, зачастую весьма необычными особенностями поведения механических систем, находящихся в условиях неконсервативного нагружения, были и ошибочные решения, исправленные после разработки динамического метода исследования устойчивости [4].

Однако неконсервативные задачи устойчивости бывают труднообъяснимыми, а особенности некоторых из них все еще не разгаданы до конца. Достаточно назвать хотя бы парадокс Циглера [9] — дестабилизацию системы при добавлении в нее исчезающе малого трения. Если в задачах теории устойчивости при действии консервативных нагрузок изменения в расчетных схемах конструкций обычно приводят к ожидаемым результатам, то для решения неконсервативных задач требуется более широкое исследование при различных изменениях расчетных схем элементов конструкций.

В связи с этим количество работ, посвященных исследованию устойчивости элементов конструкций при неконсервативном нагружении, не уменьшается [10–13].

Будем рассматривать аналог известной задачи Бека (об устойчивости консольного стержня под действием следящей силы), усложненной тем, что стержень с помощью упругого шарнира соединен с твердым телом, который упруго связан с неподвижным основанием. Стержень

сжат постоянными по величине следящей и потенциальной силами.

Исследование устойчивости консольного стержня с дополнительными опорами под действием следящей силы проведено в работе [14], где подробно изучены траектории характеристических показателей, ответственных за потерю устойчивости.

Цель работы — исследование влияния параметров закрепления стержня на границы области устойчивости при неконсервативном нагружении.

Постановка задачи. Рассмотрим стержень (рис. 1) с погонной массой m и изгибной жесткостью EI , который с помощью шарнира упруго связан на нижнем конце с твердым телом (основанием) массой M . Угловая жесткость шарнира c_1 . Масса M посредством пружин общей линейной жесткостью c_2 упруго соединена с неподвижным основанием. Стержень нагружен двумя сжимающими силами Q и P . Сила Q является потенциальной и не меняет направления при любых деформациях стержня, а P — следящая сила, т. е. ее направление при любых перемещениях совпадает с направлением касательной к изогнутой оси стержня в точке приложения.

Следуя динамическому методу исследования устойчивости, запишем уравнение возмущенного движения относительно нормального прогиба $w(x, t)$ как функции координаты x и вре-

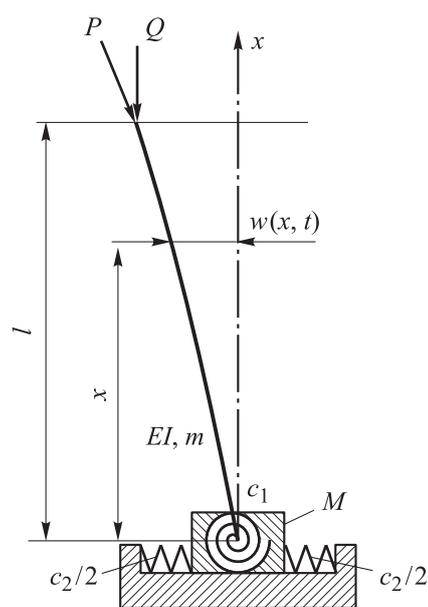


Рис. 1. Схема стержня на подвижном инерционном основании

мени t в окрестности вертикального невозмущенного положения стержня

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + b_i EI \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + mb_e \frac{\partial w}{\partial t} + (Q + P) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где b_i — коэффициент внутреннего трения, принятого в соответствии с моделью Фойхта; b_e — коэффициент внешнего трения.

Граничные условия для заданного способа закрепления стержня получаем из уравнений равновесия для сил и моментов

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - c_1 \frac{\partial w}{\partial x} = 0; EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - M \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_2 w = 0 \text{ при } x = 0;$$

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + Q \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ при } x = l.$$

Введем следующие безразмерные параметры:

$$\xi = \frac{x}{l}; \omega_0 = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}; \tau = \omega_0 t; \varepsilon_i = b_i \omega_0; \varepsilon_e = \frac{b_e}{\omega_0};$$

$$\alpha = \frac{Ql^2}{EI}; \beta = \frac{Pl^2}{EI}; \gamma_1 = \frac{c_1 l}{EI}; \gamma_2 = \frac{c_2 l^3}{EI}; \gamma_3 = \frac{M}{ml},$$

где ξ — безразмерная координата сечений стержня; ω_0 — характерная частота; τ — безразмерное время; ε_i и ε_e — параметры внутреннего и внешнего трения; α и β — параметры внешней нагрузки; γ_1 и γ_2 — параметры угловой и линейной жесткости; γ_3 — безразмерная масса твердого тела.

С учетом безразмерных параметров уравнение (1) приобретает вид

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \varepsilon_i \frac{\partial^5 w}{\partial \xi^4 \partial \tau} + 2\varepsilon_e \frac{\partial w}{\partial \tau} + (\alpha + \beta) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0. \quad (2)$$

Граничные условия в безразмерном виде

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \gamma_1 \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0; \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + \gamma_2 w - \gamma_3 \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0 \text{ при } \xi = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0; \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + \alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \xi = 1.$$

Метод решения. Для исследования устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня и построения границ области устойчивости на плоскости параметров нагружения воспользуемся методом разложения решения уравнения возмущенного движения в ряд по формам свободных колебаний.

Как и в работе [11], уберем из граничных условий (3) параметр потенциальной силы α и с помощью дельта-функции $\delta(\xi)$ введем его проекцию в дифференциальное уравнение (2). Тогда уравнение возмущенного движения принимает вид

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \varepsilon_i \frac{\partial^5 w}{\partial \xi^4 \partial \tau} + 2\varepsilon_e \frac{\partial w}{\partial \tau} + (\alpha + \beta) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - \alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} \delta(\xi - 1) = 0, \quad (4)$$

а граничные условия

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \gamma_1 \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0; \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + \gamma_2 w - \gamma_3 \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0 \text{ при } \xi = 0;$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0; \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} = 0 \text{ при } \xi = 1.$$

Представим решение уравнения (4) в виде ряда по формам свободных колебаний незатухающей системы

$$w(\xi, \tau) = \mathbf{q}^T(\tau) \boldsymbol{\varphi}(\xi); \quad (5)$$

$$\mathbf{q}(\tau) = \begin{bmatrix} q_1(\tau) \\ q_2(\tau) \\ \dots \\ q_n(\tau) \end{bmatrix}; \boldsymbol{\varphi}(\xi) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\chi_1 \xi) \\ \varphi_2(\chi_2 \xi) \\ \dots \\ \varphi_n(\chi_n \xi) \end{bmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{q}(\tau)$ — вектор обобщенных координат; $\boldsymbol{\varphi}(\xi)$ — вектор форм свободных колебаний, компоненты которого $\varphi_k(\chi_k \xi)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^4 \varphi_k}{d\xi^4} - \chi_k^4 \varphi_k = 0, \chi_k^4 = \frac{m\omega_k^2 l^4}{EI} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

где χ_k — частотные параметры, которые с учетом граничных условий

$$\frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} - \gamma_1 \frac{d\varphi}{d\xi} = 0; \frac{d^3 \varphi}{d\xi^3} + (\gamma_3 \chi^4 + \gamma_2) \varphi = 0 \text{ при } \xi = 0;$$

$$\frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} = 0; \frac{d^3 \varphi}{d\xi^3} = 0 \text{ при } \xi = 1$$

определяются из уравнения

$$\det \begin{bmatrix} -\gamma_1 \chi & -\chi^2 & \gamma_1 \chi & \chi^2 \\ -\chi^3 & \gamma_2 - \gamma_3 \chi^4 & \gamma_2 \chi^3 & \gamma_2 - \gamma_3 \chi^4 \\ -\sin \chi & -\cos \chi & \text{sh } \chi & \text{ch } \chi \\ -\cos \chi & \sin \chi & \text{ch } \chi & \text{sh } \chi \end{bmatrix} = 0.$$

Число членов ряда n определяет точность нахождения критических нагрузок и, соответственно, точность положения границ областей устойчивости. Варьирование числа членов ряда в работе [11] для некоторых неконсервативных задач устойчивости показало, что достаточно

высокая точность этих величин достигается при $n = 8$.

Применим к уравнению возмущенного движения процедуру метода Бубнова — Галеркина, для чего подставим в уравнение (4) выражение (5). Затем поочередно умножим полученное уравнение на каждую собственную форму $\varphi_k(\chi_k \xi)$ и проинтегрируем найденные выражения по ξ от 0 до 1. В результате придем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат $q_k(\tau)$.

В матричной форме эту систему уравнений запишем как

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + (2\varepsilon_e \mathbf{A} + \varepsilon_i \mathbf{C})\dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{C} + (\alpha + \beta)\mathbf{D} - \alpha\mathbf{B}]\mathbf{q} = 0,$$

где \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} — матрицы размера $n \times n$,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \int_0^1 \boldsymbol{\varphi}(\xi) \boldsymbol{\varphi}^T(\xi) d\xi; \\ \mathbf{B} &= \int_0^1 \boldsymbol{\varphi}(\xi) \left[\frac{d\boldsymbol{\varphi}(\xi)}{d\xi} \right]^T \delta(\xi - 1) d\xi; \\ \mathbf{C} &= \int_0^1 \boldsymbol{\varphi}(\xi) \left[\frac{d^4 \boldsymbol{\varphi}(\xi)}{d\xi^4} \right]^T d\xi; \\ \mathbf{D} &= \int_0^1 \boldsymbol{\varphi}(\xi) \left[\frac{d^2 \boldsymbol{\varphi}(\xi)}{d\xi^2} \right]^T d\xi. \end{aligned}$$

Границы области устойчивости. Чтобы построить границы области устойчивости, сформулируем достаточные условия для уравнений возмущенного движения, записанных в нормальной форме Коши

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{G}\mathbf{y}.$$

Здесь точка означает дифференцирование по времени; \mathbf{G} — матрица; \mathbf{y} — вектор фазовых переменных,

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{A}^{-1}[\mathbf{C} + (\alpha + \beta)\mathbf{D} - \alpha\mathbf{B}] & -\mathbf{A}^{-1}(2\varepsilon_e \mathbf{A} + \varepsilon_i \mathbf{C}) \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{0}$ и \mathbf{E} — нулевая и единичная матрицы размера $n \times n$.

Представим решение в виде

$$\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{y}_0 \exp(\lambda\tau),$$

где \mathbf{y}_0 — вектор начальных значений фазовых переменных; λ — характеристический показатель.

Из требования существования нетривиального решения

$$\det[\mathbf{G} - \lambda\mathbf{E}] = 0$$

для определения характеристических показателей λ получаем полином степени $m = 2n$

$$p_0 \lambda^m + p_1 \lambda^{m-1} + \dots + p_{m-1} \lambda + p_m = 0, \quad (6)$$

где p_0, \dots, p_m — коэффициенты полинома.

Устойчивость системы (тривиального решения уравнения возмущенного движения) определяется расположением характеристических показателей λ на комплексной плоскости. Популярным критерием отрицательности действительных частей характеристических показателей λ является критерий Рауса — Гурвица. Формулировка критерия основана на свойствах матрицы Гурвица \mathbf{H} , составленной из коэффициентов характеристического полинома (6). Согласно этому критерию, чтобы все корни полинома с вещественными коэффициентами имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы \mathbf{H} были положительными.

Однако для исследования устойчивости, в частности для построения границ области устойчивости механических систем под действием неконсервативных нагрузок, из всего набора условий этого критерия достаточно использовать только два: границы дивергенции (переход хотя бы одного показателя в правую полуплоскость через начало координат) и флаттера (переход через мнимую ось). Граница дивергенции определяет условие равенства нулю свободного члена характеристического полинома ($b_m = 0$). Границе флаттера соответствует равенство нулю главного минора матрицы Гурвица порядка $m-1$, т. е. $\Delta_{m-1} = 0$.

Этот факт подтвержден большим количеством решений неконсервативных задач теории упругой устойчивости и наглядно иллюстрирует рис. 2. Здесь для рассматриваемой системы на плоскости $\alpha-\beta$ при параметрах $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 5$, $\gamma_3 = 2$, $\varepsilon_e = 0,2$ и $\varepsilon_i = 0$ кроме границы дивергенции $b_m = 0$ (кривая AB) и границы флаттера $\Delta_{m-1} = 0$ (кривая BCD) построены еще три кривые, соответствующие обращению в нуль миноров более низких порядков. Кривая 1 соответствует $\Delta_{m-2} = 0$, кривая 2 — $\Delta_{m-3} = 0$, кривая 3 — $\Delta_{m-4} = 0$.

Эти кривые никак не влияют на границы заштрихованной области устойчивости $ABCD$. Линии нулевых уровней еще более низших ми-

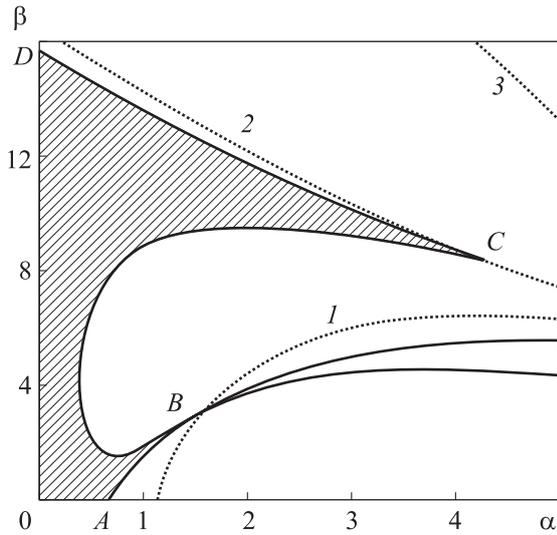


Рис. 2. Область устойчивости и нулевые уровни для миноров

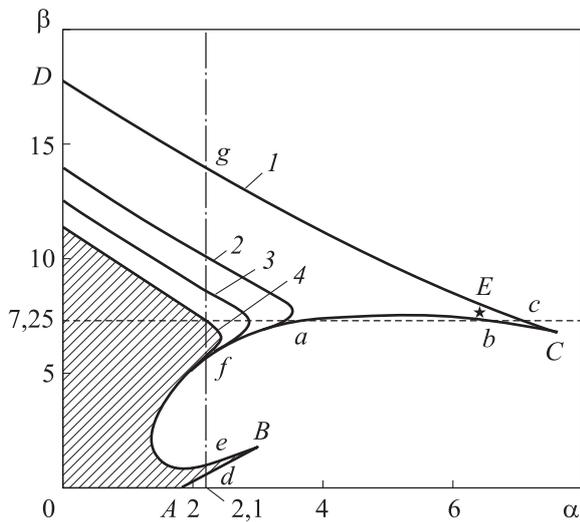


Рис. 3. Границы области устойчивости при параметре внешнего трения $\epsilon_e = 0,1$ и параметре внутреннего трения $\epsilon_i = 0$ (1), 0,005 (2), 0,010 (3) и 0,020 (4)

норов матрицы Гурвица проходят вне области, показанной на рис. 2. Также следует отметить необычную конфигурацию границы флаттера: ее немонотонность и неоднозначность по направлениям обеих осей α и β .

Необычная форма области устойчивости сохраняется и при более высоких значениях параметров основания. На рис. 3 построены границы области устойчивости при $\gamma_1 = 20$, $\gamma_2 = 50$ и $\gamma_3 = 20$. Параметр внешнего трения $\epsilon_e = 0,1$, а параметр внутреннего трения принимает различные значения: $\epsilon_i = 0$ (кривая 1 — ABCD); $\epsilon_i = 0,005$ (кривая 2); $\epsilon_i = 0,010$ (кривая 3); $\epsilon_i = 0,020$ (кривая 4).

Безусловно, трение (и внешнее, и внутреннее) не влияет на границу дивергенции. Приведенный рисунок демонстрирует интересное свойство границ флаттера для заданной системы. Существенное влияние на поведение границы флаттера с ростом параметра следящей силы β внутреннее трение оказывает не с начала, т. е. в конечной точке границы дивергенции, а лишь в окрестности ее поворота к оси β . Кроме того, при выбранных малых значениях параметра внутреннего трения ϵ_i четко проявляется аналог парадокса Циглера. С ростом ϵ_i до значения 0,02 имеет место весьма существенная дестабилизация системы, граница флаттера снижается.

Однако, как показали вычисления, при дальнейшем увеличении параметра ϵ_i растет и критическое значение следящей силы. Следует отметить, что упомянутый парадокс Циглера был обнаружен [9] и получил некоторые пояснения [15] для систем с конечным числом степеней свободы. В данном случае речь идет о внутреннем трении, соответствующем модели Фойхта.

Необычная форма границы области устойчивости, например, большие значения параметра α для узкой области значений β (окрестность точки C), проверена непосредственным интегрированием уравнения возмущенного движения (2). На рис. 4 показан закон движения концевого сечения стержня при параметрах нагрузки $\alpha = 6,4$ и $\beta = 7,5$. Эта точка отмечена звездочкой на рис. 3. Затухающий характер движения очевиден.

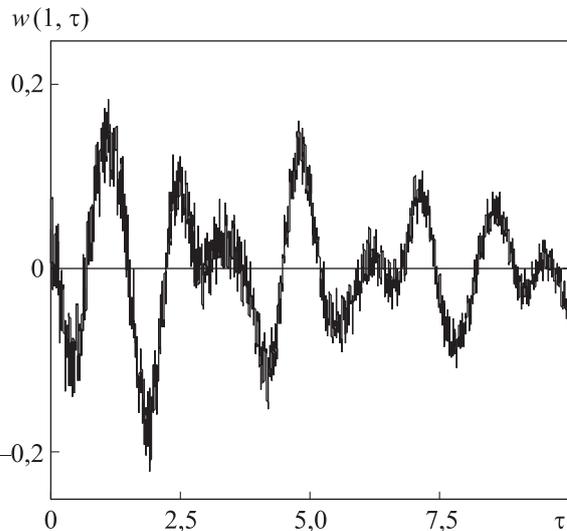


Рис. 4. Закон движения концевого сечения стержня при параметрах нагрузки $\alpha = 6,4$ и $\beta = 7,5$

Поведение частот при изменении параметров нагрузки. Исследуем поведение характеристических показателей λ (и частот колебаний как мнимых частей этих характеристических показателей) при изменении параметров нагрузки. Эту процедуру проведем двумя способами для двух траекторий: $\beta = 7,25$ при $0 < \alpha < 8$ и $\alpha = 2,1$ при $0 < \beta < 15$. Эти траектории отмечены сплошной и штрихпунктирной линиями на рис. 3.

Первый способ основан на рассмотренном методе разложения решения возмущенного движения в ряд по формам свободных колебаний ненагруженной системы. Второй способ является процедурой непосредственного решения несамосопряженной однородной краевой задачи с дополнительным применением методов оптимизации.

Решение уравнения (2) представим в виде

$$w(\xi, \tau) = W(\xi) \exp(\lambda \tau),$$

где $W(\xi)$ — форма потери устойчивости — функция координаты ξ .

Как и в случае применения метода обобщенных координат, если действительные части всех характеристических показателей λ отрицательные, то решение $w(\xi, \tau)$ затухает во времени, и прямолинейная форма равновесия стержня (тривиальное решение уравнения (2)) является устойчивой.

Неустойчивость (дивергенция или флаттер) наступает, когда хотя бы один из характеристических показателей переходит в правую полуплоскость, т. е. его действительная часть становится положительной.

Для определения параметров $W(\xi)$ и λ получаем несамосопряженную краевую задачу на собственные значения с уравнением

$$\lambda^2 W + \lambda \left(\varepsilon_i \frac{d^4 W}{d\xi^4} + 2\varepsilon_e W \right) + \frac{d^4 W}{d\xi^4} + (\alpha + \beta) \frac{d^2 W}{d\xi^2} = 0 \quad (7)$$

и граничными условиями, аналогичными (3)

$$\frac{d^2 W}{d\xi^2} - \gamma_1 \frac{dW}{d\xi} = 0; \quad \frac{d^3 W}{d\xi^3} + (\gamma_2 - \gamma_3 \lambda^2) W = 0 \quad \text{при } \xi = 0; \quad (8)$$

$$\frac{d^2 W}{d\xi^2} = 0; \quad \frac{d^3 W}{d\xi^3} + \alpha \frac{dW}{d\xi} = 0 \quad \text{при } \xi = 1.$$

Решение краевой задачи (7), (8) будем искать в виде $W(\xi) = C \exp(r\xi)$. После подстановки

этого выражения в уравнение (7) для показателей r получаем биквадратное уравнение

$$(1 + \lambda \varepsilon_i) r^4 + (\alpha + \beta) r^2 + \lambda^2 + 2\lambda \varepsilon_e = 0.$$

Удовлетворяя граничным условиям (8), из условия нетривиальности решения системы однородных алгебраических уравнений для констант $C_1 \dots C_4$ имеем трансцендентное уравнение, связывающее параметры нагрузки системы α, β , характеристический показатель λ и параметры опорного основания γ_1, γ_2 и γ_3

$$f(\alpha, \beta, \lambda) = \det \begin{bmatrix} r_1^2 - \gamma_1 r_1 & & r_4^2 - \gamma_1 r_4 \\ r_1^3 + \gamma_2 - \gamma_3 \lambda^2 & \dots & r_4^3 + \gamma_2 - \gamma_3 \lambda^2 \\ r_1^2 e^{r_1} & & r_4^2 e^{r_4} \\ (r_1^3 + \alpha r_1) e^{r_1} & & (r_4^3 + \alpha r_4) e^{r_4} \end{bmatrix} = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) представляет собой неявную зависимость характеристических показателей λ от параметров краевой задачи. Критические состояния соответствуют такой совокупности значений параметров α и β , при которых хотя бы один из характеристических показателей λ пересекает мнимую ось. Таким образом, корни λ уравнения (9) являются одновременно и точками абсолютного локального минимума функции $F(\alpha, \beta, \lambda) = \text{abs}[f(\alpha, \beta, \lambda)]$.

Следовательно, границу области устойчивости можно построить путем минимизации функции $F(\alpha, \beta, \lambda)$ по параметру λ . Точки плоскости α, β , соответствующие обращению $\lambda = 0$ (дивергенция) или $\text{Re} \lambda = 0$ (флаттер), принадлежат границе области устойчивости. Для неконсервативных задач устойчивости со следящими силами характерно взаимодействие собственных частот, которое реализуется между низшими частотами.

Изменение действительных и мнимых частей характеристических показателей λ_1, λ_2 и λ_3 по горизонтальной прямой при $\beta = 7,25$ показано на рис. 5, а. Прямая пересекает область устойчивости до точки a , а мнимые части первых двух показателей сближаются. Их действительные части $\text{Re} \lambda_1, \text{Re} \lambda_2$, как и $\text{Re} \lambda_3$, остаются меньше нуля. В точке a первая и вторая частоты становятся равными ($\text{Im} \lambda_1 = \text{Im} \lambda_2$), а действительная часть одного из них оказывается больше нуля. Прямая входит в область флаттера.

Вследствие немонотонности границы в точке b обе действительные части первых характеристических показателей снова становятся

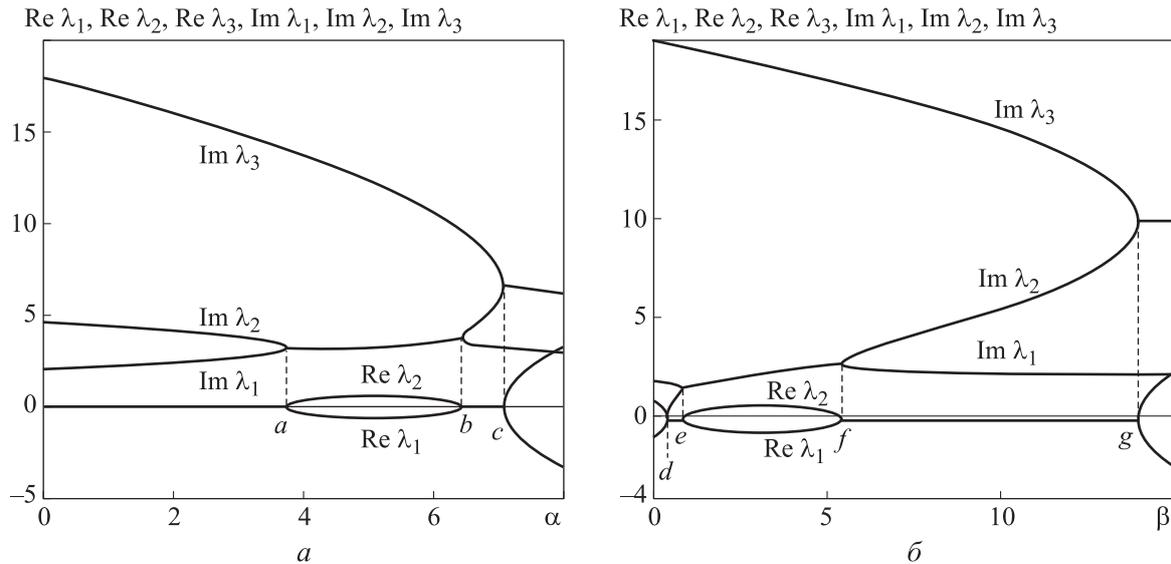


Рис. 5. Траектории характеристических показателей при различных значениях параметров нагрузки: $a - \beta = 7,25, \alpha = \text{var}$; $b - \alpha = 2,1, \beta = \text{var}$

отрицательными, мнимые части расщепляются и до точки c система устойчива. В точке c переход к флаттеру сопровождается слиянием мнимых частей второго и уже третьего характеристического показателя, а действительная часть одного из них становится положительной.

Изменение действительных и мнимых частей тех же характеристических показателей по вертикальной прямой при $\alpha = 2,1$ (см. рис. 3) показано на рис. 5, б. Здесь движение начинается из области дивергенции. До точки d один из характеристических показателей имеет нулевую мнимую часть и положительную действительную часть. В точке d система входит в узкую область устойчивости, а в точке e — в область флаттера с равными мнимыми частями и одним из λ с положительной действительной частью. В точке f опять начинается область устойчивости с практически постоянной $\text{Im} \lambda_1$ и воз-

растающей мнимой частью $\text{Im} \lambda_2$, которая в точке g сливается с $\text{Im} \lambda_3$. Система покидает область устойчивости и входит в зону флаттера.

Вывод

Анализ результатов расчета полностью подтвердил необходимость тщательного исследования влияния различных конструктивных особенностей механических систем на критические неконсервативные нагрузки. Несущественные на первый взгляд отклонения свойств конструкций от расчетных значений, а именно схематизация опорных закреплений, могут привести к значительным отклонениям в определении предельных значений нагрузок, а при комбинированном нагружении — к сложным конфигурациям границ областей устойчивости. Все это отражается на оценке показателей надежности механической системы.

Литература

- [1] Beck M. Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedruckten Stabes. *ZAMP*, 1952, vol. 3, no. 3, pp. 225–228, doi: <https://doi.org/10.1007/BF02008828>
- [2] Pfluger A. *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*. Springer, 1964. 472 p.
- [3] Пановко Я.Г., Губанова И.И. *Устойчивость и колебания упругих систем*. Москва, Наука, 1967. 420 с.
- [4] Болотин В.В. *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*. Москва, Физматгиз, 1961. 340 с.
- [5] Гуськов А.М., Пановко Г.Я. *Особенности динамики механических систем под действием неконсервативных (циркуляционных) сил*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. 53 с.
- [6] Вольмир А.С. *Устойчивость деформируемых систем*. Москва, Наука, 1967. 984 с.

- [7] Алфутов Н.А. *Основы расчета на устойчивость упругих систем*. Москва, Машиностроение, 1978. 312 с.
- [8] Николаи Е.Л. Об устойчивости прямолинейной формы равновесия сжатого и скрученного стержня. *Изв. Ленингр. политехн. ин-та*, 1928, № 31, с. 1–26.
- [9] Циглер Г. *Основы теории устойчивости конструкций*. Москва, Мир, 1971. 192 с.
- [10] Elishakoff I. *Resolution of the twentieth century conundrum in elastic stability*. Florida Atlantic University, 2014. 352 p.
- [11] Радин В.П., Самогин Ю.Н., Чирков В.П. и др. *Решение неконсервативных задач теории устойчивости*. Москва, Физматлит, 2017. 240 с.
- [12] Bigoni D.N., Kirillov O.N., Misseroni D. et al. Flutter and divergence instability in the Pfluger column: experimental evidence of the Ziegler destabilization paradox. *J. Mech. Phys. Solids*, 2018, vol. 116, pp. 99–116, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2018.03.024>
- [13] Каган-Розенцвейг Л.М. *Вопросы неконсервативной теории устойчивости*. Санкт-Петербург, СПбГАСУ, 2014. 172 с.
- [14] Лагозинский С.А., Соколов А.И. Устойчивость прямолинейных стержней, нагруженных следящими силами. В: *Проблемы прикладной механики, динамики и прочности машин*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005, с. 244–259.
- [15] Bolotin V.V., Zhinzher N.I. Effects of damping on stability of elastic systems subjected to nonconservative forces. *Int. J. Solids Struct.*, 1969, vol. 5, no. 9, pp. 965–989, doi: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(69\)90082-1](https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90082-1)

References

- [1] Beck M. Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedruckten Stabes. *ZAMP*, 1952, vol. 3, no. 3, pp. 225–228, doi: <https://doi.org/10.1007/BF02008828>
- [2] Pfluger A. *Stabilitatsprobleme der Elastostatik*. Springer, 1964. 472 p.
- [3] Panovko Ya.G., Gubanova I.I. *Ustoychivost i kolebaniya uprugikh sistem* [Stability and oscillations of elastic systems]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 420 p. (In Russ.).
- [4] Bolotin V.V. *Nekonservativnye zadachi teorii uprugoy ustoychivosti* [Non-conservative problems of the theory of elastic stability]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961. 340 p. (In Russ.).
- [5] Guskov A.M., Panovko G.Ya. *Osobennosti dinamiki mekhanicheskikh sistem pod deystviem nekonservativnykh (tsirkulyatsionnykh) sil* [Features of dynamics of mechanical systems under the action of non-conservative (circulating) forces]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2013. 53 p. (In Russ.).
- [6] Volmir A.S. *Ustoychivost deformiruemykh system* [Stability of deformable systems]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 984 p. (In Russ.).
- [7] Alfutov N.A. *Osnovy rascheta na ustoychivost uprugikh sistem* [Fundamentals of calculation for stability of elastic systems.]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1978. 312 p. (In Russ.).
- [8] Nikolai E.L. On the stability of the rectilinear equilibrium form of a compressed and twisted rod. *Izv. Leningr. politekh. in-ta*, 1928, no. 31, pp. 1–26. (In Russ.).
- [9] Ziegler H. *Principles of structural stability*. Birkhäuser Basel, 1977. 150 p. (Russ. ed.: *Osnovy teorii ustoychivosti konstruktsiy*. Moscow, Mir Publ., 1971. 192 p.)
- [10] Elishakoff I. *Resolution of the twentieth century conundrum in elastic stability*. Florida Atlantic University, 2014. 352 p.
- [11] Radin V.P., Samogin Yu.N., Chirkov V.P. et al. *Reshenie nekonservativnykh zadach teorii ustoychivosti* [Solving non-conservative problems in stability theory]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2017. 240 p. (In Russ.).
- [12] Bigoni D.N., Kirillov O.N., Misseroni D. et al. Flutter and divergence instability in the Pfluger column: experimental evidence of the Ziegler destabilization paradox. *J. Mech. Phys. Solids*, 2018, vol. 116, pp. 99–116, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2018.03.024>
- [13] Kagan-Rozentsveyg L.M. *Voprosy nekonservativnoy teorii ustoychivosti* [Issues in non-conservative stability theory]. Sankt-Petersburg, SPbGASU Publ., 2014. 172 p. (In Russ.).
- [14] Lagozinskiy S.A., Sokolov A.I. *Ustoychivost pryamolineynykh sterzhney, nagruzhennykh sledyashchimi salami* [Stability of a straight rod loaded by following forces]. V: *Problemy prikladnoy mekhaniki, dinamiki i prochnosti mashin* [In: Problems of applied mechanics]

dynamics and strength of machines]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2005, pp. 244–259. (In Russ.).

- [15] Bolotin V.V., Zhinzher N.I. Effects of damping on stability of elastic systems subjected to nonconservative forces. *Int. J. Solids Struct.*, 1969, vol. 5, no. 9, pp. 965–989, doi: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(69\)90082-1](https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90082-1)

Статья поступила в редакцию 08.05.2024

Информация об авторах

РАДИН Владимир Павлович — кандидат технических наук, профессор кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». НИУ «МЭИ» (111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14, e-mail: radinvp@gmail.com).

ЧИРКОВ Виктор Петрович — доктор технических наук, профессор кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». НИУ «МЭИ» (111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14, e-mail: victor.p.chirkov@gmail.com).

ЦОЙ Валерьян Эдуардович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». НИУ «МЭИ» (111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14, e-mail: tsoyve@mpei.ru).

НОВИКОВА Ольга Валерьевна — кандидат технических наук, доцент кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин». НИУ «МЭИ» (111250, Москва, Российская Федерация, Красноказарменная ул., д. 14, e-mail: NovicovaOV@mpei.ru)

Information about the authors

RADIN Vladimir Pavlovich — Candidate of Science (Eng.), Professor, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines. National Research University — Moscow Power Engineering Institute (111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14, e-mail: radinvp@gmail.com).

CHIRKOV Victor Petrovich — Doctor of Science (Eng.), Professor, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines. National Research University — Moscow Power Engineering Institute (111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14, e-mail: victor.p.chirkov@gmail.com).

TSOY Valeryan Eduardovich — Candidate of Science (Phys.-Math.), Associate Professor, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines. National Research University — Moscow Power Engineering Institute (111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14, e-mail: tsoyve@mpei.ru).

NOVIKOVA Olga Valeryevna — Candidate of Science (Eng.), Associate Professor, Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines. National Research University — Moscow Power Engineering Institute (111250, Moscow, Russian Federation, Krasnokazarmennaya St., Bldg. 14, e-mail: NovicovaOV@mpei.ru).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Радин В.П., Чирков В.П., Цой В.Э., Новикова О.В. Устойчивость стержня на подвижном основании при неконсервативном нагружении. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2025, № 1, с. 41–49.

Please cite this article in English as:

Radin V.P., Chirkov V.P., Tsoy V.E., Novikova O.V. Rod stability on a movable base under the non-conservative loading. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2025, no. 1, pp. 41–49.