

# Механика

УДК 539.319: 539.43

## Методика оценки ресурса по малоцикловой усталости при нерегулярном нагружении деталей с поверхностными остаточными напряжениями\*

Д.С. Петухов, Д.С. Дудин, И.Э. Келлер

Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук

## Method of calculating the fatigue life of parts under the non-regular loading in the presence of surface residual stresses

D.S. Petukhov, D.S. Dudin, I.E. Keller

Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Science

Обработка ответственных деталей авиационного двигателя, обеспечивающая образование поверхностных остаточных напряжений сжатия и увеличение ресурса по малоцикловой усталости, давно применяется на практике. Тем не менее остаются открытыми вопросы по методике расчета усталостной прочности. Дискуссионным является вопрос о корректном учете поверхностных остаточных напряжений сжатия. Предпочтительно использовать данные усталостных испытаний с обработанными образцами, имеющими те же поверхностные остаточные напряжения сжатия и прочностные характеристики, что и исследуемая деталь. Однако методика таких испытаний не отработана. Также не вполне ясно влияние порядка циклов в схеме полета и наличие в ней циклов малой амплитуды на усталостный ресурс, которое не учитывают применяемые на практике методы. Рассмотрена задача определения ресурса диска компрессора высокого давления, поверхности которого подвергнуты дробеструйной обработке, на полетных циклах нагружения. Профиль пластических деформаций определен по лабораторным данным, полученным методом Н.Н. Давиденкова, с помощью предлагаемых реконструктивных формул. Для внедрения поверхностных пластических деформаций в конечно-элементную модель использованы оболочечные элементы, имеющие атрибуты амплитуды и толщины слоя предварительных деформаций. Рассчитаны остаточные напряжения, порожденные несовместной частью заданных деформаций, а также напряжения, вызванные центробежными силами и неоднородным температурным расширением. Остаточные напряжения смещают имеющиеся опасные точки с поверхности под упрочненный слой, почти не изменяя напряжений внутри детали. Для расчета ресурса применена эволюционная модель, учитывающая нестационарную историю нагружения в полетных циклах. За отсутствием данных по усталостному разрушению, зарождающемуся под упрочненным поверхностным слоем, необходимые диаграммы Велера

\* Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда и Пермского края № 24-29-20148.

симитированы сдвигом диаграмм для образцов без поверхностного упрочнения. Анализ результатов расчета для четырех схематизаций полетного цикла позволил определить диапазоны прогнозов усталостной долговечности в зависимости от поверхностной обработки и нерегулярности нагружения, и применимость предложенной методики.

EDN: FIGBGA, <https://elibrary/figbga>

**Ключевые слова:** малоцикловая усталость, нерегулярное нагружение, усталостный ресурс, поверхностные остаточные напряжения, эволюционная модель, методика расчета

Machining the aircraft engine critical parts ensures formation of the surface residual compressive stresses and increasing service life under the low-cycle fatigue, and it is used in practice for a long time. However, questions remain open regarding the computation methodology to assess fatigue strength in such situations. The problem of correct accounting for the surface residual compressive stresses is debatable. It is preferable to use the data on fatigue testing with the machined samples that have the same surface residual compressive stresses and strength characteristics as the part under study, but the methodology for such testing is still missing. The influence of the order of cycles in a flight pattern and presence of the low-amplitude cycles in it for the fatigue life is also not entirely clear, as it is not taken into account by methodologies used in practice. The paper considers a problem of identifying the service life of a high-pressure turbine disk, which surfaces were subjected to shot blasting, in the flight loading cycles. The plastic deformations profile is determined from the laboratory data obtained by the N.N. Davidenkov's method using the proposed reconstruction formulas. To introduce surface plastic deformations in the finite element model, shell elements are used with attributes of amplitude and thickness of the preliminary deformation layer. The paper computes distribution of the residual stresses generated by incompatible part of the specified deformations, as well as stresses caused by centrifugal forces and non-uniform thermal expansion. Residual stresses move the existing hazardous points from the surface to beneath the hardened layer, almost without changing stresses inside the part. An evolutionary model is used to compute the fatigue life that takes into account the non-stationary loading history in the flight cycles. Due to the lack of data on fatigue destruction originating under the hardened surface layer, the required Wöhler diagrams are simulated by shifting the diagrams for samples without the surface hardening. Analyzing computation results for four flight cycle schematizations makes it possible to determine the ranges of fatigue life predictions depending on the surface machining and irregular loading, as well as the proposed methodology applicability.

EDN: FIGBGA, <https://elibrary/figbga>

**Keywords:** low-cycle fatigue, irregular loading, fatigue life, surface residual stresses, evolutionary model, computation methodology

Создание остаточных напряжений (ОН) сжатия на поверхности ответственных деталей авиационного двигателя позволяет увеличить их усталостную долговечность. Эти ОН препятствуют процессам возникновения усталостных трещин с поверхности. Методики расчета усталостного ресурса с учетом поверхностных ОН сжатия обсуждаются в научной литературе [1–3], но не являются общепринятыми в конструкторских организациях.

Источниками возникновения усталостных трещин в рассматриваемом случае становятся дефекты, залегающие под поверхностным слоем ОН, а усталостное разрушение развивается

по закономерностям, отличным от сценариев развития поверхностной трещины. Точки диаграммы Велера, соответствующие зарождению разрушения изнутри, лежат на отдельной ветви, продолжающей кривую гигацикловой усталости в область много- и малоцикловой усталости [4, 5].

Усталостные испытания поверхностно-упрочненных образцов выполнены авторами работ [3, 6], ими же разработаны методики расчета с учетом этих данных. В статье [7] предложено учитывать несколько ветвей диаграммы Велера, соответствующих различным модам разрушения.

Однако в целом методики подготовки образцов с поверхностными ОН и проведения испытаний остаются дискуссионными.

Еще одной особенностью рассматриваемой задачи является нерегулярность нагружения в полетных циклах. Стандартный подход, основанный на схематизации полетных циклов и правиле суммирования вкладов различных циклов в усталостную поврежденность, не учитывает память материала об истории циклического нагружения и для некоторых металлических сплавов ведет к сильно неконсервативной оценке времени жизни [8–14].

В частности, снижение [15] или повышение [16] усталостного ресурса некоторых сплавов может иметь место при наличии в истории циклического нагружения перегрузок, циклов малой амплитуды во время выдержек при максимальном напряжении [13, 14].

Для учета влияния нерегулярности нагружения в рамках стандартного подхода модифицируют диаграмму Велера с учетом спектра нагружения [13, 17–21], условие разрушения [10, 22], определение эквивалентных напряжений [23] и деформаций [24].

Наличие ОН приводит к многоосности и непропорциональности циклического нагружения в опасных точках изделия, даже если основное нагружение является одноосным и пропорциональным. Для учета многоосности в рамках стандартного подхода используют сведение к эквивалентному одноосному циклу [25, 26], формулу Коффина — Мэнсона [1, 27] или метод критической плоскости [7, 28–31], позволяющий получить направление зарождения трещины и учесть непропорциональность циклического нагружения.

Еще одно направление развития моделей усталостного разрушения учитывает влияние поврежденности на уравнения упругости либо упругопластичности. Поврежденность повышает напряжения вследствие снижения эффективной площади сечения материальной площадки [32, 33], что учтено в связанных моделях [34, 35]. Кроме того, поврежденность влияет на упругие и пластические константы материала, что также учтено в связанных моделях [36, 37].

В рамках стандартного подхода связанность модели плохо сочетается с нерегулярностью нагружения. В этом случае удобно записать эволюционное уравнение усталости, где текущая скорость накопления поврежденности связана с предысторией нагружения. В работах

[37–40] рассмотрены эволюционные модели, причем две первые являются связанными, а две последние — нет. В целом, несвязанные эволюционные модели по трудоемкости определения констант и ресурсоемкости реализации представляются разумным компромиссом между моделями в рамках модифицированного классического подхода и связанными эволюционными моделями.

Цель статьи — разработка методики расчета усталостного ресурса деталей с поверхностными ОН с использованием эволюционной модели [40], являющейся обобщением модели [39].

В предлагаемой методике использованы данные испытаний образцов без поверхностной обработки в предположении, что имеется ветвь диаграммы Велера, соответствующая механизму подповерхностного зарождения усталостной трещины.

В этом случае требуется расчет напряженного состояния детали с учетом распределения ОН. Последнее вводят в конечно-элементную модель через распределение собственных деформаций вблизи поверхности, которое определяют из решения обратной задачи по данным исследования поверхностно обработанной детали известными разрушающими или неразрушающими методами [1, 41–45].

В настоящей работе использованы явные точные решения этой задачи в рамках метода Давиденкова — Биргера [46].

**Эволюционная модель усталостного разрушения.** В работе [40] предложена следующая эволюционная модель усталостного разрушения в предположении склерономности этого процесса:

$$\beta = \frac{1}{\sigma_{-1}} \left[ \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}\| + g(I_1) - r(\|\boldsymbol{\alpha}\|) + w(\Delta\sigma_{\max}) \right];$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \|\dot{\mathbf{s}}\| q(\beta) H(\beta) f(\vartheta) \frac{\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}}{\|\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}\|};$$

$$\dot{D} = \frac{\|\dot{\mathbf{s}}\|}{\sigma_{-1}} p(\beta) H(\beta) f(\vartheta) \frac{1}{[1 - F(\boldsymbol{\sigma})]^{\omega}},$$

где  $\beta$  — внутренняя переменная;  $\sigma_{-1}$  — предел выносливости при регулярном симметричном нагружении;  $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathbf{A} : \mathbf{A}}$  — евклидова норма тензора второго ранга  $\mathbf{A}$ ;  $\boldsymbol{\sigma}$   $\mathbf{s}$  и  $I_1$  — симметричный тензор напряжений, его девиатор и первый инвариант соответственно,  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - I_1 \mathbf{I}$ ,  $I_1 = sp \boldsymbol{\sigma}$ ;  $g, r, w, q, p$  — материальные функции;  $\boldsymbol{\alpha}$  — симметричный тензор внутренних

напряжений, определяющий центр поверхности выносливости;  $\Delta\sigma_{\max}$  — максимальный размах напряжений за предысторию,

$$\Delta\sigma_{\max}(t) = \max_{t_1 < t_2 \leq t} (\|\sigma(t_1) - \sigma(t_2)\|);$$

$H(\beta) = \{0, \beta < 0; 1, \beta \geq 0\}$  — функция Хевисайда;  $\vartheta = \arccos[\dot{s} : (s - \alpha) / (\|\dot{s}\| \|s - \alpha\|)]$  — угол между тензорами  $\dot{s}$  и  $s - \alpha$ ;  $D$  — параметр поврежденности;  $F(\sigma)$  — функция статической прочности,  $F(\sigma) = 1$ ;  $\omega$  — материальная константа; точка над параметрами обозначает производную по времени  $t$ .

В основу этой модели положено понятие поверхности выносливости в пространстве напряжений, задаваемой уравнением  $\beta = 0$  и имеющей центр симметрии. Пока напряженное состояние лежит внутри поверхности (рис. 1, а,  $\beta \leq 0$ ), параметр поврежденности  $D$  имеет постоянное значение, а когда напряженное состояние выходит за ее пределы (рис. 1, б,  $\beta > 0$ ), он начинает расти в зависимости от расстояния до поверхности и направления изменения напряжений. Поверхность выносливости может менять размер и перемещаться, приспособливаясь к нагружению. Центр поверхности определяет переменную  $\alpha$ .

Выражение для внутренней переменной  $\beta$  имеет следующую структуру. Первое слагаемое определяет расстояние между центром поверхности выносливости  $\alpha$  и девиатором напряжений  $s$  и описывает зависимость от девиаторной части напряженного состояния. Второе слагаемое учитывает вклад шаровой части напряженного состояния. Третье слагаемое задает радиус поверхности выносливости, который зависит от ее положения  $\alpha$  в пространстве напряжений. Четвертое слагаемое описывает сокращение радиуса поверхности выносливости при наличии циклов большой амплитуды.

Поверхность выносливости движется как жесткое целое согласно эволюционному уравнению для  $\dot{\alpha}$ . В уравнении  $q(\beta) \geq 0$  есть материальная функция, задающая скорость движения поверхности выносливости в зависимости от  $\beta$ . Функция Хевисайда  $H(\beta)$  исполняет роль переключателя: пока напряженное состояние находится внутри поверхности выносливости, она неподвижна.

Материальная функция  $0 \leq f(\vartheta) \leq 1$  определяет зависимость от угла  $\vartheta$  между направлением движения точки напряженного состояния в пространстве и ее положением относительно центра поверхности. Если эти направления совпадают, то  $f(0) = 1$ , а если они противоположно направлены, то  $f(\pi) = -1$ . Поверхность выносливости движется в направлении от центра поверхности выносливости к точке напряженного состояния, так как  $\dot{\alpha}$  пропорционально  $s - \alpha$ .

В последнем выражении модели (1) записано эволюционное уравнение для параметра поврежденности  $D$ . По структуре оно отличается от уравнения для  $\dot{\alpha}$  только скалярностью и присутствием множителя с функцией  $F(\sigma)$ , с помощью которой записывается критерий статической прочности  $F(\sigma) = 1$ . При приближении точки напряженного состояния к поверхности прочности скорость роста поврежденности становится неограниченной. Скорость роста поврежденности зависит от расстояния до поверхности выносливости (посредством функции  $p(\beta) \geq 0$ ) и направления изменения напряженного состояния (посредством функции  $f(\vartheta)$ ).

Скорость роста поврежденности принята независимой от текущей поврежденности, так как выражение  $\dot{D} = Q(D)P(\sigma)$  сводится к  $\dot{D} = P(\sigma)$  заменой переменной. Свобода такой перенормировки допускается несвязанностью модели (1)

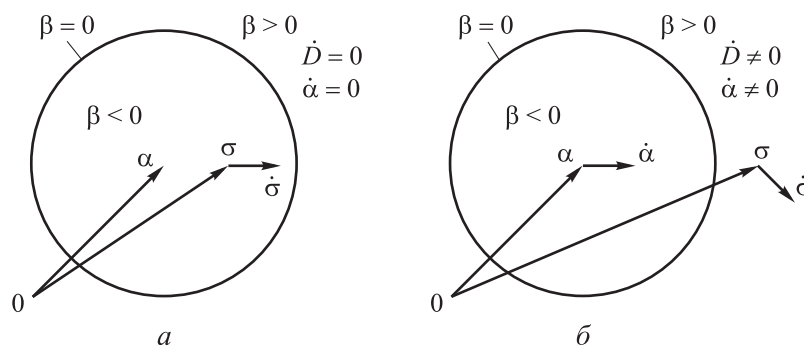


Рис. 1. Схемы поверхности выносливости в пространстве напряжений

с уравнениями движения среды. Модель (1) — склерономна, т. е. независима от скорости изменения нагрузки  $\sigma(t)$ , что достигается наличием множителя  $\|\dot{s}\|$  в правой части выражений для  $\dot{\mathbf{a}}$  и  $\dot{D}$ . Для уравнений (1) важна только форма пути в пространстве напряжений, а в случае одноосного нагружения — только значения максимумов и минимумов нагрузки.

**Идентификация модели по экспериментальным данным.** Материальные функции и константы модели идентифицированы по данным испытаний жаропрочного сплава, используемого при производстве дисков компрессора высокого давления (КВД). Недостающие экспериментальные данные дополнены их правдоподобными оценками.

Материальные функции  $g(I_1)$  и  $r(\|\mathbf{a}\|)$  в модели (1) можно идентифицировать по двум диаграммам Хейга — зависимостям пределов выносливости при одноосном и сдвиговом нагружении от среднего напряжения в цикле.

На первом этапе рассматривают регулярное сдвиговое нагружение со средним значением  $\tau_m$  и амплитудой  $\tau_a$ . Ненулевыми компонентами тензора напряжений являются  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ . Согласно модели (1), те же ненулевые компоненты  $\alpha_{12} = \alpha_{21}$  имеет и тензор  $\mathbf{a}$ . Такое нагружение лежит на сдвиговой диаграмме Хейга, если максимальное  $\tau_{\max} = \tau_m + \tau_a$  и минимальное  $\tau_{\min} = \tau_m - \tau_a$  напряжения цикла находятся на поверхности выносливости  $\beta = 0$ .

После подстановки этих значений в уравнение  $\beta = 0$  запишем

$$\begin{aligned} \sqrt{3}(\tau_m + \tau_a - \alpha_0) - r(\sqrt{2}\alpha_0) &= 0; \\ \sqrt{3}(-\tau_m + \tau_a + \alpha_0) - r(\sqrt{2}\alpha_0) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\alpha_0$  — компонента  $\alpha_{12}$ , постоянная в ходе такого нагружения, так как цикл целиком лежит внутри поверхности выносливости.

Исключая  $\alpha_0$  из выражения (2), получаем

$$\tau_a(\tau_m) = \frac{1}{\sqrt{3}}r(\sqrt{2}\tau_m) \text{ или } r(x) = \sqrt{3}\tau_a(x/\sqrt{2}),$$

позволяющее определить функцию  $r(x)$  по экспериментальной сдвиговой диаграмме Хейга.

На втором этапе рассматривают регулярное одноосное нагружение со средним значением  $\sigma_m$  и амплитудой  $\sigma_a$ . У тензора напряжений есть единственная ненулевая компонента  $\sigma_{11}$ , отсюда в силу модели (1) тензор  $\mathbf{a}$  имеет ненулевые диагональные элементы  $\alpha_{11}$  и  $\alpha_{22} = \alpha_{33} = -\alpha_{11}/2$ . Нагружение лежит на диа-

грамме Хейга, если максимальное  $\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a$  и минимальное  $\sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a$  напряжения цикла находятся на поверхности выносливости  $\beta = 0$ . Подставляя их в выражение для  $\beta$  и обозначая  $\alpha_{11}$  через  $\alpha_0$ , получаем

$$\begin{aligned} \sigma_m + \sigma_a - \frac{3}{2}\alpha_0 - r\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha_0\right) + g(\sigma_m + \sigma_a) &= 0; \\ -\sigma_m + \sigma_a + \frac{3}{2}\alpha_0 - r\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha_0\right) + g(\sigma_m - \sigma_a) &= 0. \end{aligned}$$

Исключая отсюда  $\alpha_0$ , имеем

$$\begin{aligned} \sigma_a + \frac{1}{2}\left[g(\sigma_m + \sigma_a) + g(\sigma_m - \sigma_a)\right] - \\ - r\left(\frac{g(\sigma_m + \sigma_a) - g(\sigma_m - \sigma_a)}{\sqrt{6}} + 2\sigma_m\right) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Если известна функция  $\sigma_a(\sigma_m)$ , задающая диаграмму Хейга для одноосного нагружения, то выражение (3) можно рассматривать как функциональное уравнение относительно функции  $g(x)$ . Если заданной считать функцию  $g(x)$ , то выражение (3) будет определять неявную зависимость между  $\sigma_a$  и  $\sigma_m$ .

Пусть экспериментальная диаграмма Хейга задана в виде набора из  $n$  пар  $\{\sigma_m^i, \sigma_a^i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Функцию  $g(x)$  параметризуем набором констант  $k_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), достаточно гибко регулирующих ее форму. Она должна быть монотонно возрастающей, так как повышение  $I_1$  снижает усталостную прочность. При некотором конкретном наборе констант  $k_i$  выражение (3) сопоставляет значениям  $\sigma_m^i$  значения  $\hat{\sigma}_a^i$ , отличающиеся от экспериментальных  $\sigma_a^i$ . Константы  $k_i$  подбирают так, чтобы невязка между прогнозируемыми  $\hat{\sigma}_a^i$  и экспериментальными  $\sigma_a^i$  значениями становилась минимальной.

Функции в выражении (3) ищут в виде

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \text{sign}(x) \int_0^{|x|} \exp(-|\xi|^k) d\xi; \\ g(I_1) &= k_g c_g \left[ g_1\left(\frac{I_1 - I_0}{c_g}\right) - g_1\left(\frac{-I_0}{c_g}\right) \right]; \\ r_1(x) &= \begin{cases} \tau_u - x - k_r (\tau_u - x)^\gamma & \text{при } x \geq \tau_u - c_r; \\ \tau_{-1} & \text{при } x < \tau_u - c_r; \end{cases} \quad (4) \\ r(\|\mathbf{a}\|) &= \sqrt{3}r_1(\|\mathbf{a}\|/\sqrt{2}); \\ k_r &= \frac{1}{\gamma c_r^{\gamma-1}}; \quad \gamma = \frac{c_r}{c_r - \tau_{-1}}, \end{aligned}$$

где  $k$ ,  $k_g$ ,  $c_g$ ,  $I_0$  — константы функции  $g(I_1)$ ;  $\xi$  — переменная интегрирования;  $\tau_u$  — предел

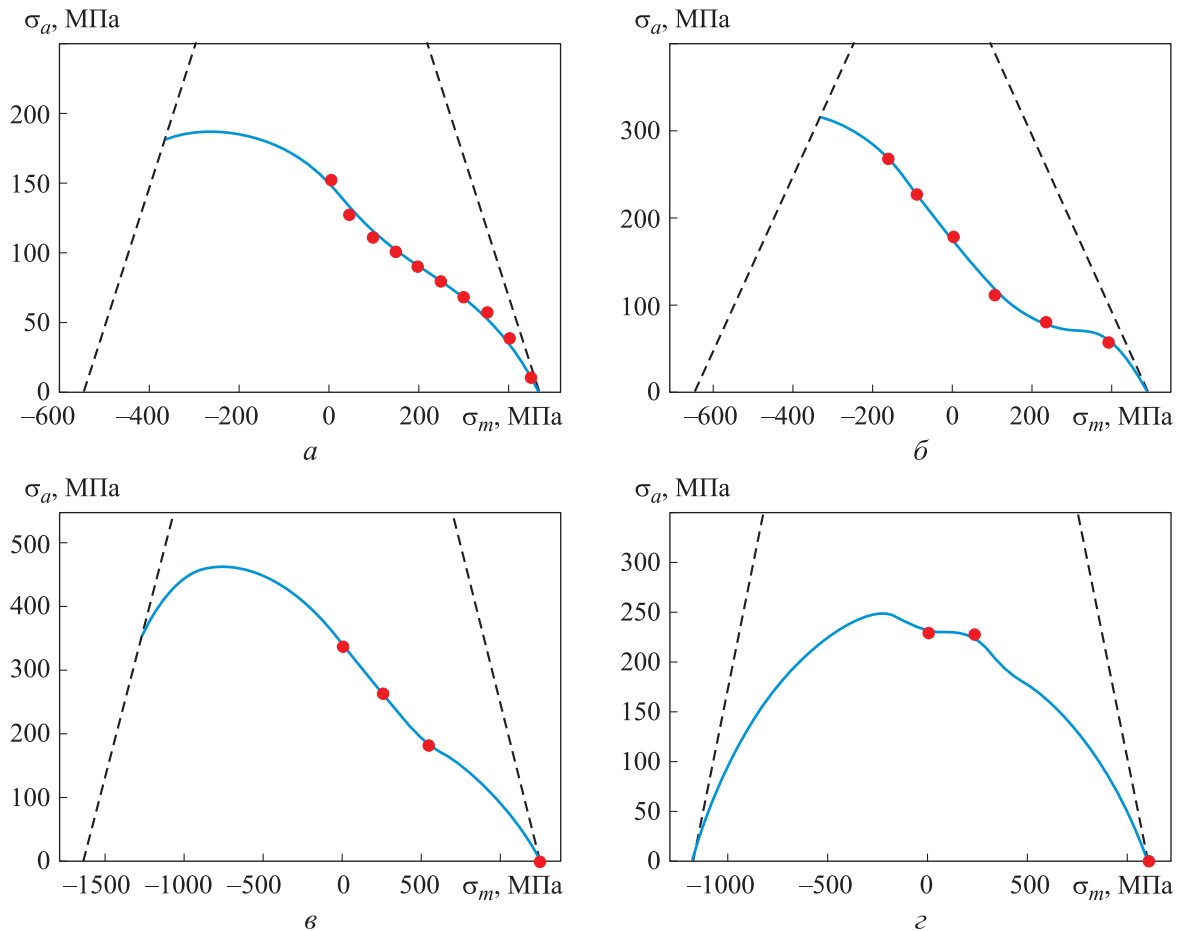


Рис. 2. Диаграммы Хейга для одноосного нагружения алюминиевого сплава AA2024-T4 (а), чугуна EN-GJV-450 (б) и жаропрочного сплава при температуре  $T = 20$  (в) и  $650$  °С (г):  
 ● — данные эксперимента; — результаты расчета по модели; - - — предел прочности

прочности на сдвиг;  $c_r$  — константа функции  $r(\|\alpha\|)$ ;  $\tau_{-1}$  — предел выносливости на симметричном сдвиговом цикле.

Функции вида (4) хорошо описывают диаграммы Хейга для различных материалов. В качестве примеров на рис. 2, а и б изображены экспериментальные точки диаграмм Хейга для алюминиевого сплава AA2024-T4 [47] и чугуна EN-GJV-450 [48], а также результаты их аппроксимации (3) и (4).

Для рассматриваемого жаропрочного сплава модельная диаграмма Хейга получена при температуре  $T = 20$  и  $650$  °С (рис. 2, в и г). Ввиду

Таблица 1

Значения констант для материальных функций  $r(\|\alpha\|)$  и  $g(I_1)$

$T, ^\circ\text{C}$	$\kappa$	$k_g$	$c_g, \text{МПа}$	$I_0, \text{МПа}$	$c_r, \text{МПа}$
20	5	0,405	488	-126	752
650	5	0,230	112	118	677

отсутствия сдвиговой диаграммы Хейга для этого материала использована кривая типичной для металлов формы: с постоянным  $\sigma_a$  при небольших  $\sigma_m$  и спадом к статическому пределу прочности. Предел выносливости на сдвиг при симметричном нагружении  $\tau_{-1}$  принят равным  $0,55\sigma_{-1}$  [49].

Материальные функции  $r(\|\alpha\|)$  и  $g(I_1)$  для жаропрочного сплава приведены на рис. 3, а значения их констант, найденных минимизацией невязки с экспериментальными данными симплекс-методом, — в табл. 1.

В качестве критерия прочности выбран критерий Шлейхера

$$\sqrt{\frac{3}{a}} \|\mathbf{s}\| = \sqrt{a_0 + a_1 I_1 + a_2 I_1^2},$$

который приводится к виду  $F(\sigma) = 1$  при

$$F(\sigma) = \frac{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s} - a_1 I_1 - a_2 I_1^2}{a_0}.$$

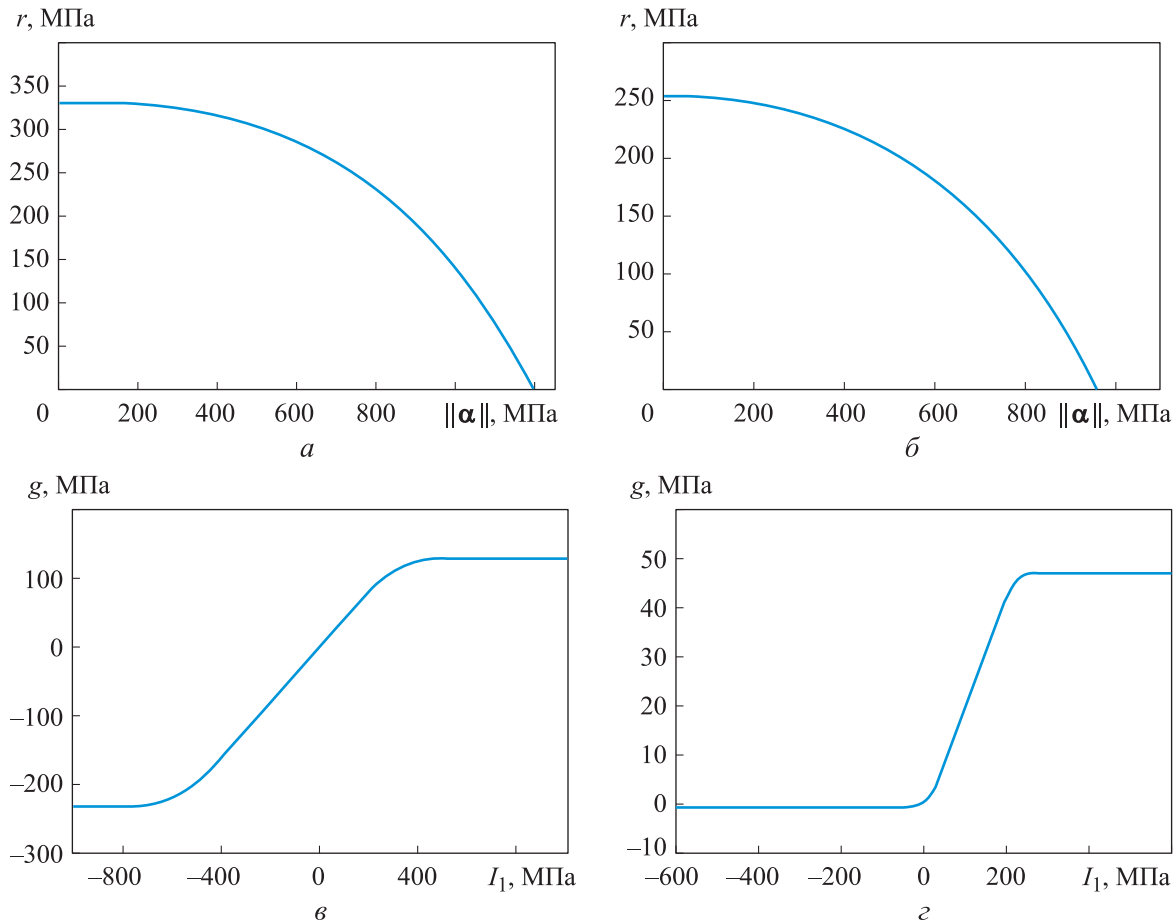


Рис. 3. Материальные функции для жаропрочного сплава:  $a$  и  $б$  —  $r(\|\alpha\|)$  при  $T = 20$  и  $650^\circ\text{C}$ ;  $в$  и  $г$  —  $g(I_1)$  при  $T = 20$  и  $650^\circ\text{C}$

Параметры  $a_0$ ,  $a_1$  и  $a_2$  выражены через пределы прочности на растяжение  $\sigma_{tu}$ , сжатие  $\sigma_{cu} > 0$  и сдвиг  $\tau_u$ :

$$a_0 = 3\tau_u; \quad a_1 = -3\tau_u \frac{\sigma_{cu} - \sigma_{tu}}{\sigma_{cu}\sigma_{tu}}; \quad a_2 = \frac{3\tau_u}{\sigma_{cu}\sigma_{tu}} - 1.$$

Для рассматриваемого жаропрочного сплава предел прочности  $\sigma_{tu}$  при температуре  $T = 550^\circ\text{C}$  принят равным 1161 МПа, остальные взяты из оценочных соображений:  $\tau_u = 0,7\sigma_{tu}$  и  $\sigma_{cu} = 1,2\sigma_{tu}$ .

Следующую группу материальных функций предлагается искать в виде

$$w(x) = k_1 \left\{ \frac{1}{2}x + \frac{1}{10}b_1 \ln \left( \frac{\cosh[5(1-x/b_1)]}{\cosh 5} \right) \right\}; \quad (5)$$

$$q(\beta) = k_2\beta^{l_1} + b_2;$$

$$p(\beta) = k_3e^{l_2\beta - (1-b_3)},$$

где  $k_1, k_2, k_3, b_1, b_2, b_3, l_1, l_2$  — материальные константы.

Функция  $w(x)$  представляет собой сглаженную кусочно-линейную функцию, равную нулю

при  $x \leq b_1$  и имеющую наклон  $k_1$  при  $x > b_1$ . Восемь констант в уравнении (5) и константу  $k$  из модели (1), связанную с поверхностью прочности, определяют по экспериментальным кривым Велера и (при возможности) по некоторым экспериментам на нерегулярное одноосное нагружение. Рекомендовано использовать не менее двух кривых Велера для различных коэффициентов асимметрии нагружения  $R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$ .

Для рассматриваемого жаропрочного сплава идентификацию констант модели выполняли по трем диаграммам Велера при комнатной температуре  $20^\circ\text{C}$  и коэффициенте асимметрии нагружения  $R = -1; 0; 0,5$  и по одной диаграмме Велера при  $650^\circ\text{C}$  при  $R = -1$ . Вследствие отсутствия данных на нерегулярное нагружение для демонстрации возможности модели использовали экспериментальное значение для отношения количества циклов до разрушения  $q_{10/50}^{exp}$  при нерегулярном нагружении с десятью и пятьюдесятью циклами малой амплитуды  $\sigma_a = 0,25\sigma_{tu}$ , следующими за циклом большой



амплитуды с  $\sigma_{\min} = -0,85\sigma_{tu}$ ,  $\sigma_{\max} = 0,75\sigma_{tu}$ , взятым для некоторого другого материала [16]. Невязку определяли как

$$X = \sum_{i=1}^n \left( 1 - \frac{\ln N_i}{\ln N_i^{exp}} \right)^2 + |q_{10/50}^{exp} - q_{10/50}|,$$

где  $N_i$  и  $N_i^{exp}$  — прогнозируемое (модельное) и экспериментальное значение числа циклов до разрушения в  $i$ -й точке диаграммы Велера;  $n$  — общее число экспериментальных точек, использованных в невязке.

Путем минимизации невязки симплекс-методом для жаропрочного сплава получены значения констант функций  $w$ ,  $q$  и  $p$  при температуре  $T = 650$  °С, приведенные в табл. 2.

Этому набору констант соответствуют кривые Велера, изображенные на рис. 4, а, и

$q_{10/50} = 2,12$ . Ввиду отсутствия экспериментальных диаграмм Велера при коэффициенте асимметрии нагружения  $R \neq -1$  для температуры 650 °С, отношение между амплитудами, соответствующими различным  $R$ , принято одинаковым при  $T = 650$  и 20 °С.

Для комнатной температуры  $T = 20$  °С константы идентифицированы с использованием трех диаграмм Велера при  $R = -1; 0; 0,5$  и, как и ранее, экспериментальное значение  $q_{10/50}^{exp}$ . Модельные кривые Велера, соответствующие параметрам, указанным в табл. 3, приведены на рис. 4, б.

Материальная функция  $f(\vartheta)$  определяется в виде

$$f_0(x) = 1 - \operatorname{erf} \left[ 3 \left( x - \frac{\pi}{2} l_4 \right) \right]; \quad f(\vartheta) = \frac{f_0(\pi) - f_0(\vartheta)}{f_0(\pi) - f_0(0)}$$

Таблица 2

Значения констант функций  $w$ ,  $q$  и  $p$  при температуре  $T = 650$  °С

Параметр	Значение	Параметр	Значение	Параметр	Значение
$k_1$	3,41	$b_1$ , МПа	1244	$\omega$	1,55
$k_2$	1,72	$b_2$	0,066	$l_1$	5,94
$k_3$	$1 \cdot 10^{-5,9}$	$b_3$	$2,99 \cdot 10^{-4}$	$l_2$	2,16

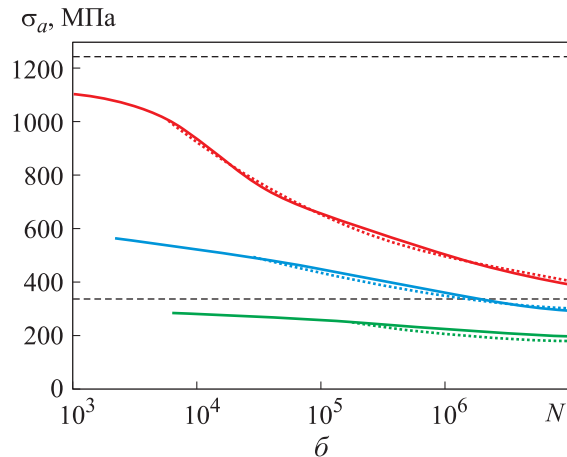
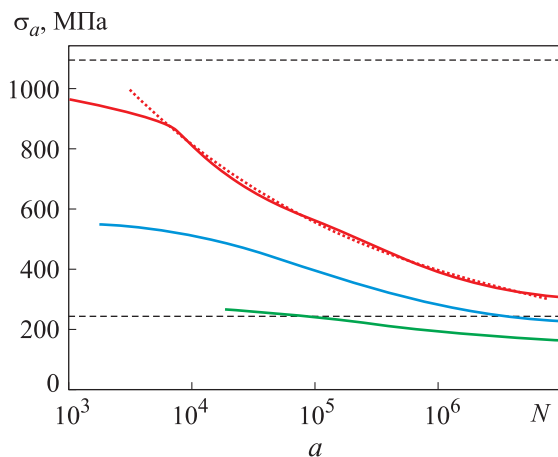


Рис. 4. Диаграммы Велера для жаропрочного сплава при температуре  $T = 650$  (а) и 20 °С (б), полученные путем эксперимента (.....) и моделирования при коэффициенте асимметрии нагружения  $R = -1,0$  (—),  $0$  (—) и  $0,5$  (—):  
----- пределы прочности и выносливости при  $R = -1$

Таблица 3

Значения констант материальных функций  $w$ ,  $q$  и  $p$  при температуре  $T = 20$  °С

Параметр	Значение	Параметр	Значение	Параметр	Значение
$k_1$	3,63	$b_1$ , МПа	1707	$\omega$	3,34
$k_2$	1,87	$b_2$	0,026	$l_1$	3,98
$k_3$	$1 \cdot 10^{-8,9}$	$b_3$	0,216	$l_2$	3,70



и содержит одну материальную константу  $l_4$ , которую находят из экспериментов на несинфазное многоосное нагружение. Так как в рассматриваемой задаче такое нагружение не реализовано, значение  $l_4$  не влияет на оценку усталостной прочности.

**Расчет напряженно-деформированного состояния диска КВД.** Диск КВД авиационного двигателя подвергается нерегулярным температурным и силовым нагрузкам в полетных циклах. Для сопротивления усталостному разрушению на всей свободной поверхности детали наводятся ОН сжатия.

Для расчета изменения во времени суммарного поля напряжений решают три отдельные упругие статические задачи с учетом зависимости упругих констант от температуры при заданном неоднородном распределении температуры  $T(r)$  (рис. 5, а), возникающем в стационарном режиме полетного цикла:

- 1) расчет напряжений, вызванных заданными собственными деформациями, возникающими после поверхностной обработки детали;
- 2) вычисление напряжений, обусловленных распределением температурных деформаций  $\epsilon_t = \zeta(T)(T(r) - T_0)$ , где  $r$  — радиальная координата;
- 3) определение напряжений, вызванных инерционной нагрузкой  $F_\Omega = -\rho\Omega^2 r$  при вращении диска КВД с круговой частотой  $\Omega = 2\pi \cdot 15\,612 \text{ мин}^{-1}$  в стационарном режиме полетного цикла.

Задачи решали в пакете программ COMSOL Multiphysics. Расчетную область аппроксимировали объемными гекса- и тетрагональными конечными элементами с квадратичной лагранжевой интерполяцией (рис. 5, б), а ее свободную поверхность — одним слоем оболочечных конечных элементов MITC с той же интерполяцией при условии их идеального контакта с объемными элементами.

Разумный компромисс между точностью и ресурсоемкостью расчета достигался при характерном размере ребра конечного элемента 2 мм. Толщина оболочечных элементов 50 мкм и предварительные мембранные деформации в их плоскости 0,36 % соответствовали обычно применяемым технологиям поверхностной обработки [46].

Первую–третью задачи решали в циклически симметричной постановке (рис. 5, в). Значения модуля Юнга и коэффициента темпера-

турного расширения в зависимости от температуры приведены в табл. 4. Коэффициент Пуассона принят равным 0,3.

Анализ результатов расчета выявил, что поверхностные собственные деформации слабо влияют на напряженное состояние в объеме детали, давая максимальный вклад под слоем поверхностных элементов до 30 МПа. Распределение суммарных напряжений под слоем поверхностных элементов, где оно максимально, показано на рис. 6, а. Так как предел текучести материала превосходит 1000 МПа при любой температуре в рассматриваемом диапазоне, а напряжения по Мизесу не достигают этого значения, текучесть не обеспечивается ни в одной точке области, что оправдывает упругую постановку первой–третьей задач.

Наиболее опасные с точки зрения усталости точки с напряжениями растяжения до 680 МПа расположены под поверхностью отверстия

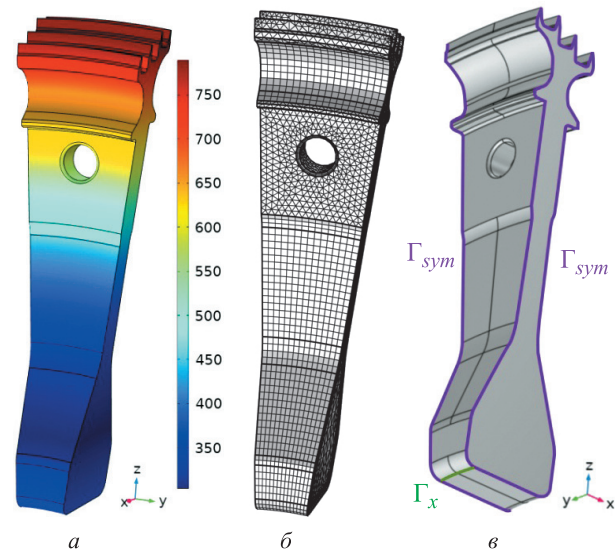


Рис. 5. Распределение температуры, °С, по объему детали (а), конечно-элементное разбиение расчетной области (б) и условия симметрии (в)

Таблица 4

**Значения физических характеристик при различной температуре**

Температура, °С	Модуль Юнга $E$ , ГПа	Коэффициент температурного расширения $\zeta \cdot 10^{-6}$ , 1/К
20	203,87	12,40
550	173,29	13,30
650	161,06	13,55
750	150,87	13,95

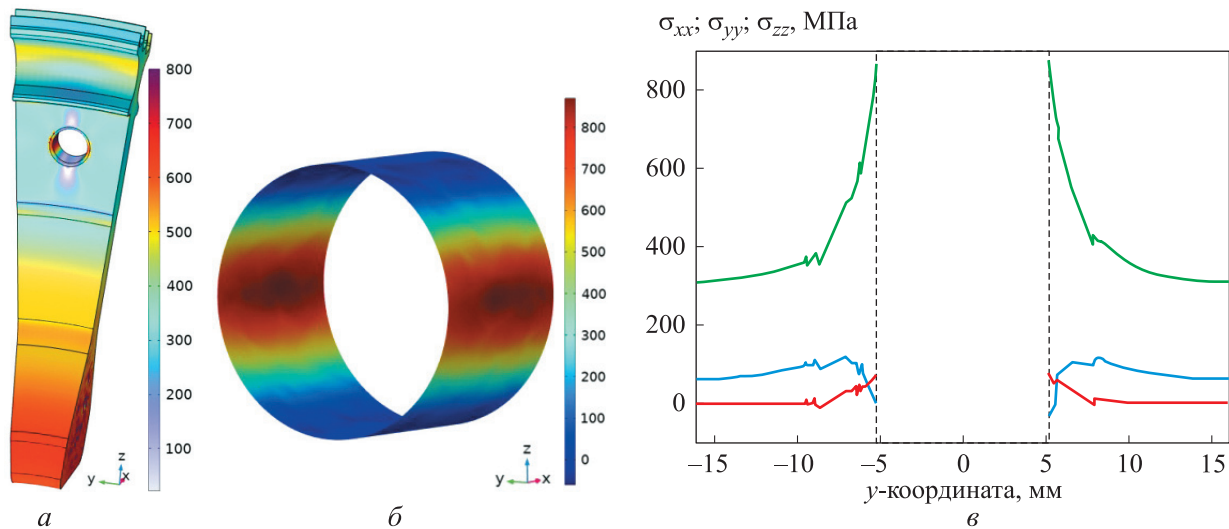


Рис. 6. Поля суммарных напряжений, МПа, под слоем поверхностных элементов: а — по Мизесу; б — z-компонента на поверхности отверстия; в — распределение компонент  $\sigma_{xx}$  (—),  $\sigma_{yy}$  (—) и  $\sigma_{zz}$  (—) вдоль y-координаты (v): ---- — границы отверстия

в окружном направлении диска (рис. 6, б). Соответствующий отрезок с распределениями суммарных компонент напряжений (рис. 6, в) будет учитываться в расчетах усталостного ресурса, причем результаты решения второй и третьей задач — в качестве амплитудных значений температурно-силового нагружения в полетном цикле.

**Расчет усталостного ресурса диска КВД на полетных циклах.** Для демонстрации методики расчета в качестве программ нагружения диска КВД в ходе полетного цикла рассмотрим изменение компонент суммарных напряжений от нулевого значения до амплитудного вблизи опасной точки, соответствующих синусоидальному закону (А) (рис. 7, а), схематизациям для диска КВД (Б), форсунки (В) и подвески авиадвигателя (Г), приведенным на рис. 7, б-г. Если ОН отсутствуют, то при максимальной температуре  $T = 580^\circ\text{C}$  максимальные главные напряжения в опасной точке  $\sigma_1 = 854$  МПа и  $\sigma_2 = 78$  МПа.

Расчет по программе А показал, что в установившемся режиме за один цикл регулярного нагружения накапливается прирост поврежденности  $\Delta D = 2,01 \cdot 10^{-5}$ , что соответствует  $N_f^1 = 49782$  циклам до разрушения. Динамика роста поврежденности и движения поверхности выносливости в ходе выполнения программы приведена на рис. 7, а (здесь и далее — для максимального главного напряжения, так как

вклад остальных компонент в поврежденность незначителен).

Следует отметить, что при первом цикле прирост поврежденности  $\Delta D = 3,82 \cdot 10^{-5}$  значительно больше, чем при последующих циклах, где материал приспособляется к нагружению путем смещения поверхности выносливости.

Для сравнения проведен расчет ресурса по методу подсчета циклов при использовании формулы Сайнса для сведения многоосного цикла к одноосному

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1^a - \sigma_2^a)^2 + (\sigma_2^a - \sigma_3^a)^2 + (\sigma_3^a - \sigma_1^a)^2} + k(\sigma_1^m + \sigma_2^m + \sigma_3^m) = \sigma_a^{-1} = (1+k)\sigma_a^0, \quad (6)$$

где  $\sigma_1^a$ ,  $\sigma_2^a$ ,  $\sigma_3^a$  и  $\sigma_1^m$ ,  $\sigma_2^m$ ,  $\sigma_3^m$  — амплитуды и средние значения главных напряжений;  $k$  — константа,  $k = \sigma_{-1}/\sigma_0 - 1$  ( $\sigma_0$  — предел выносливости для отнулевого цикла);  $\sigma_a^{-1}$  и  $\sigma_a^0$  — амплитуды симметричного и отнулевого эквивалентных одноосных циклов.

При таком расчете  $N_f^1 = 50\,617$ .

По программе нагружения Б в установившемся режиме за один полетный цикл накапливается  $\Delta D = 2,17 \cdot 10^{-5}$ , что соответствует количеству его повторений до разрушения  $N_f^1 = 46\,142$ . Динамика роста поврежденности и движения поверхности выносливости в ходе выполнения программы приведена на рис. 7, б. При первом выполнении программы прирост поврежденности  $\Delta D = 5,34 \cdot 10^{-5}$  значительно

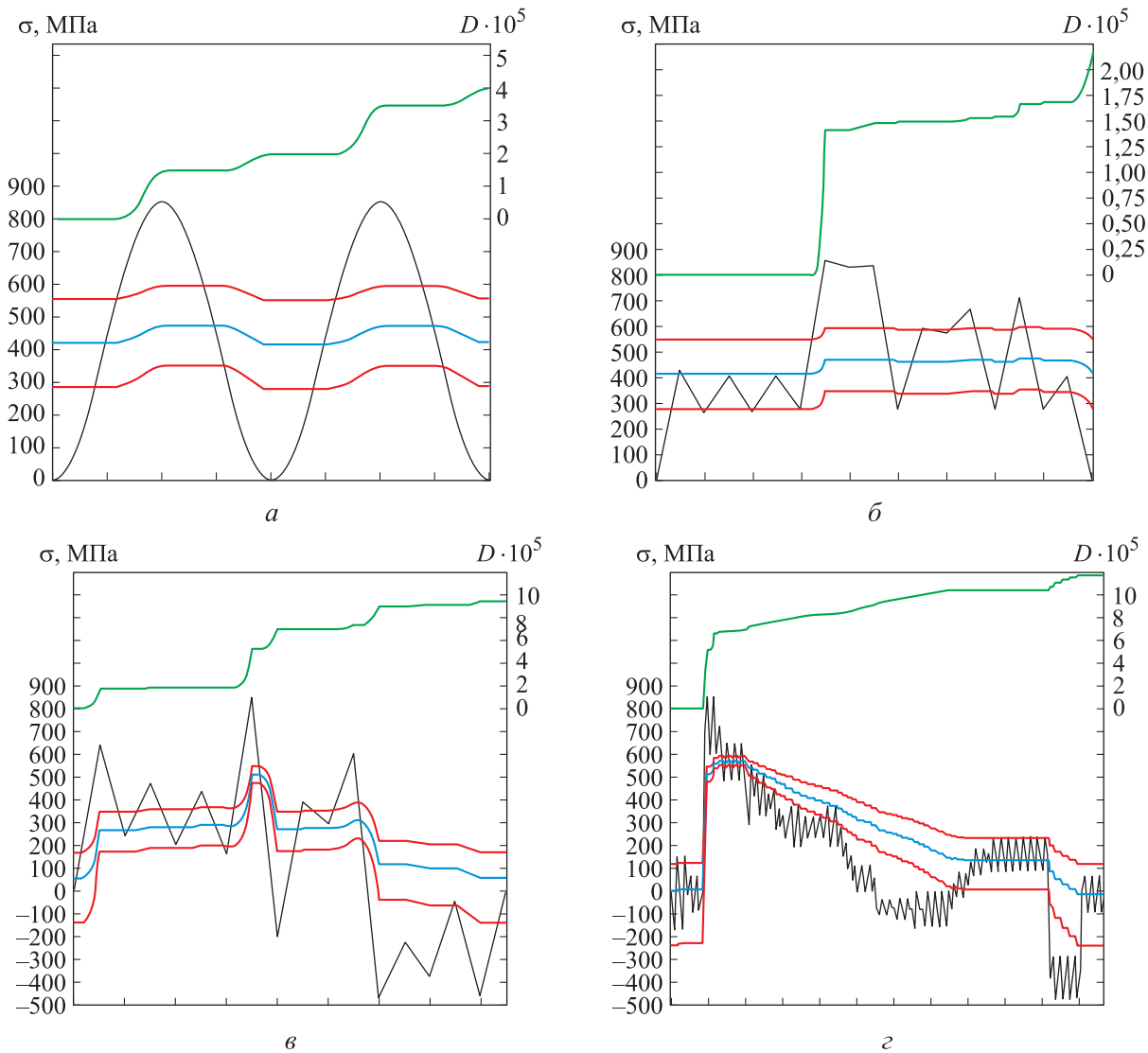


Рис. 7. Движение поверхности выносливости и накопление поврежденности в ходе выполнения программ нагружения А (а), Б (б), В (в) и Г (г) в установившемся режиме:  
 — история нагружения; — радиус поверхности выносливости  $\alpha$ ;  
 — границы поверхности выносливости; — параметр поврежденности  $D$

больше, материал приспосабливается к нагружению при повторении программы.

Метод подсчета циклов при использовании формулы Сайнса (6) дает почти идентичную оценку  $\hat{N}_f^1 = 48\,947$ , причем вклад цикла самого большого размаха составляет 96,7 %. В истории нагружения такого типа циклы меньшей амплитуды имеют близкие средние напряжения. В этом случае эволюционная модель предсказывает незначительный прирост поврежденности за счет циклов меньшей амплитуды.

По программе нагружения В прирост поврежденности за полетный цикл в установившемся режиме  $\Delta D = 9,6 \cdot 10^{-5}$ , что соответствует коли-

честву его повторений до разрушения  $N_f^2 = 10\,411$ . При первом выполнении программы  $\Delta D = 10,1 \cdot 10^{-5}$ , что ненамного больше. Это означает, что эффект приспособляемости истории, содержащей циклы небольшой амплитуды при высоком и низком средних напряжениях минимален, а эффект влияния циклов небольшой амплитуды на усталостную прочность велик. Динамика роста поврежденности и движения поверхности выносливости в ходе выполнения программы приведена на рис. 7, в. Метод подсчета циклов при использовании формулы Сайнса (6) дает на 50 % менее консервативную оценку  $\hat{N}_f^2 = 14\,830$ , а вклад цикла самого большого размаха составляет 90,7 %.

По программе нагружения Г прирост поврежденности за полетный цикл в установившемся режиме  $\Delta D = 11,8 \cdot 10^{-5}$ , а количество его повторений до разрушения  $N_f^3 = 8470$ . На первом цикле прирост поврежденности почти идентичен ( $\Delta D = 11,9 \cdot 10^{-5}$ ). Эта программа нагружения, как и предыдущая, содержит циклы небольшой амплитуды при высоких и низких средних напряжениях. Динамика роста поврежденности и движения поверхности выносливости в ходе выполнения программы приведена на рис. 7, г.

Оценка времени жизни по методу подсчета циклов и формуле Сайнса дает значение  $\tilde{N}_f^3 = 14\,740$ , превышающее прогноз модели (1) на 75 %, а вклад в поврежденность цикла напряжений самого большого размаха составляет 95,5 %.

Оценим влияние поверхностных ОН на усталостную прочность. В рассматриваемом примере значения этого напряжения ( $-850$  МПа) достаточно, чтобы больше не считать точку на поверхности концентратора напряжений опасной (релаксацию ОН в ходе эксплуатации не учитывали). Опасная точка смещается на глубину 50 мкм под свободную поверхность детали. Если слой достаточно толстый, то очаг разрушения будет развиваться под поверхностью на протяжении почти всего времени эксплуатации детали, не взаимодействуя с поверхностью вплоть до финальной стадии разрушения. В этом случае усталостное разрушение развивается по иным, по сравнению с разрушением с поверхности, закономерностям.

В работе [5] для диапазона гигацикловой усталости определена отдельная ветвь диаграммы Велера, соответствующая разрушению изнутри. Повышение усталостной прочности будет зависеть от характеристик такой ветви, которые можно получить экспериментами на гигацикловую усталость или испытаниями образцов с наведенным слоем ОН.

Для рассматриваемого жаропрочного сплава требуемые данные сгенерированы искусственно, для чего реальная диаграмма Велера при  $R = -1$  и  $T = 650$  °С (см. рис. 4, б) была смещена на два порядка вправо, заново определены константы модели (в табл. 2 константа  $k_3$  изменила значение на  $1 \cdot 10^{-5,9}$ ).

Перемещение опасной точки под слой поверхностных ОН снижает размах суммарных напряжений в программе нагружения след-

ствие наличия сильного градиента напряжений. При рассматриваемой толщине слоя 50 мкм это снижение составляет около 30 МПа, а слой толщиной 200 мкм уменьшил бы размах до 80 МПа.

Поверхностный слой собственных деформаций, создающий слой ОН сжатия, создает под ним зону ОН растяжения, накладываемых на переменную нагрузку. Расчет показал, что ОН растяжения невелики:  $\sigma_1 = 39$  МПа,  $\sigma_2 = 19$  МПа,  $\sigma_3 = 0$  МПа. Наличие этих ОН фактически компенсирует выигрыш от отсутствия градиента, описанный выше.

Результаты оценки усталостной прочности (количество циклов до разрушения) приведены в табл. 5, где  $N_f$  — прогноз эволюционной модели без учета ОН;  $\tilde{N}_f$  — оценка с помощью метода подсчета циклов и формулы Сайнса;  $\tilde{N}_f$  — прогноз эволюционной модели с учетом ОН;  $\Delta_{N_f}$  — прирост значения относительно  $N_f$ .

Наличие ОН способно значительно увеличить время жизни детали путем смещения опасной точки под поверхность и смены механизмов разрушения.

Как следует из табл. 5, количество циклов до разрушения, определенное согласно эволюционной модели с учетом изменения диаграммы Велера, коррекции напряженного состояния и перемещения опасной точки вследствие нее, составило  $\tilde{N}_f^1 = 4,37 \cdot 10^6$  для программы Б,  $\tilde{N}_f^2 = 1,01 \cdot 10^6$  для программы В и  $\tilde{N}_f^3 = 0,79 \cdot 10^6$  для программы Г. Во всех случаях время жизни выросло приблизительно в 100 раз.

Программы нагружения В и Г демонстрируют эффект влияния циклов небольшой амплитуды на усталостную прочность. В эволюционной модели величина этого эффекта регулируется скоростью движения поверхности выносливости в пространстве напряжений. С хорошей точностью определить эту скорость

Таблица 5

## Результаты оценки усталостной прочности

Программа	$N_f \cdot 10^{-4}$	$\hat{N}_f \cdot 10^{-4}$ ( $\Delta_{N_f}$ , %)	$\tilde{N}_f \cdot 10^{-6}$ ( $\Delta_{N_f}$ )
А	4,98	5,06 (2)	4,71 (100)
Б	4,61	4,89 (6)	4,37 (100)
В	1,04	1,48 (42)	1,01 (100)
Г	0,85	1,47 (73)	0,79 (100)

только по диаграммам Велера (т. е. по данным регулярного нагружения) не представляется возможным. Для этого необходимы эксперименты на нерегулярное нагружение [40].

## Выводы

1. Эволюционная модель усталостного разрушения (1) с функциями (4),(5) и материальными константами, определенными на основе экспериментальных данных и правдоподобных гипотез, использована для прогноза усталостной прочности диска КВД.

2. Численным расчетом определены положение опасной точки, амплитудные значения напряжений и температура в ее окрестности.

3. Проведены расчеты усталостной прочности для ряда схематизаций полетных циклов, и продемонстрирована способность методики учесть наличие поля ОН.

4. Приведены результаты расчета количества циклов до разрушения согласно эволюционной модели с учетом изменения диаграммы Велера, коррекции напряженного состояния и перемещения опасной точки вследствие нее для четырех программ нагружения.

5. Показано, что наличие ОН способно значительно увеличить время жизни детали за счет смещения опасной точки под поверхность и смены механизмов разрушения.

6. Выявлен эффект влияния циклов небольшой амплитуды на усталостную прочность. В эволюционной модели его величина регулируется скоростью движения поверхности выносливости в пространстве напряжений. С хорошей точностью определить эту скорость только по диаграммам Велера (т. е. по данным регулярного нагружения) не представляется возможным. Для этого необходимы эксперименты на нерегулярное нагружение.

## Литература

- [1] Портер А.М., Лешин Д.П., Букатый С.А. и др. Расчетно-экспериментальное исследование влияния упрочнения методом ППД на малоцикловую усталость деталей ГТД с концентраторами напряжений. *Вестник СГАУ*, 2011, № 3–2, с. 40–46.
- [2] Павлов В.Ф., Кирпичев В.А., Вакулюк В.С. *Прогнозирование сопротивления усталости поверхностно упрочненных деталей по остаточным напряжениям*. Самара, СНЦ РАН, 2012. 125 с.
- [3] Багмутов В.П. *Решение прямых и обратных задач механики формирования поверхностно-упрочненных титановых сплавов со сбалансированным комплексом трибо-технических и усталостных характеристик*. Карточка проекта РНФ 22-29-01078. URL: <https://www.rscf.ru/project/22-29-01078/> (дата обращения: 15.05.2024).
- [4] Marines I., Bin X., Bathias C. An understanding of very high cycle fatigue of metals. *Int. J. Fatigue*, 2003, vol. 25, no. 9, pp. 1101–1107, doi: [https://doi.org/10.1016/S0142-1123\(03\)00147-6](https://doi.org/10.1016/S0142-1123(03)00147-6)
- [5] Shiozawa K., Lu L., Ishihara S. S-N curve characteristics and subsurface crack initiation behaviour in ultra-long life fatigue of a high carbon-chromium bearing steel. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 2001, vol. 24, no. 12, pp. 781–790, doi: <https://doi.org/10.1046/j.1460-2695.2001.00459.x>
- [6] Кашаев Н., Плехов О.А., Гачегова Е.А. и др. Влияние лазерной ударной проковки на мало- и многоцикловую усталость титанового сплава ОТ4-0. *Прикладная механика и техническая физика*, 2022, т. 63, № 2, с. 182–191, doi: <https://doi.org/10.15372/PMTF20220217>
- [7] Никитин И.С., Бураго Н.Г., Никитин А.Д. Повреждаемость и усталостное разрушение элементов конструкций в различных режимах циклического нагружения. *Прикладная математика и механика*, 2022, т. 86, № 2, с. 276–290.
- [8] Naumann E.C., Hardrath H.R., Guthrie E.C. *Axial load fatigue tests of 2024-T3 and 7075-T6 aluminum alloy sheet specimens under constant- and variable-amplitude loads*. Technical report. NASA TN D-212. Langley Research Center, NASA, 1959. 40 p.
- [9] Naumann E.C. *Fatigue under random and programmed loads*. Technical report NASA TN D-2629. Langley Research Center, NASA, 1965. 42 p.
- [10] Schutz W. The fatigue life under three different load spectra tests and calculations. *Symp. on Random Load Fatigue*. AGARD CP-118, 1972.
- [11] Schutz W., Heuler P. Miner's rule revisited. *Mater. Test.*, 1994, vol. 42, no. 6, pp. 245–251, doi: <https://doi.org/10.1515/mt-2000-420612>

- [12] Jacoby G.H. Comparison of fatigue lives under conventional program loading and digital random loading. In: *Effects of environment and complex load history on fatigue life*. ASTM Int., 1970, pp. 184–202, doi: <https://doi.org/10.1520/STP32042S>
- [13] Ekvall J.C., Young L. Converting fatigue loading spectra for flight-by-flight testing of aircraft and helicopter components. *J. Test. Eval.*, 1976, vol. 4, no. 4, pp. 231–247, doi: <https://doi.org/10.1520/JTE10207>
- [14] Басов В.Н., Нестеренко Г.И. Прочность и усталость материалов обшивки конструкций гражданских самолетов. *Научный вестник МГТУ ГА*, 2010, № 153, с. 15–23.
- [15] Jurcevic R., DuQuesnay D.L., Topper T.H. et al. Fatigue damage accumulation in 2024-T351 aluminium subjected to periodic reversed overloads. *Int. J. Fatigue*, 1990, vol. 12, no. 4, pp. 259–266, doi: [https://doi.org/10.1016/0142-1123\(90\)90453-L](https://doi.org/10.1016/0142-1123(90)90453-L)
- [16] Borrego L.P., Ferreira J.M., Pinho da Cruz J.M. et al. Evaluation of overload effects on fatigue crack growth and closure. *Eng. Fract. Mech.*, 2003, vol. 70, no. 11, pp. 1379–1397, doi: [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(02\)00119-4](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(02)00119-4)
- [17] Haibach F. *Modifizierte lineare Schadensakkumulationshypothese zur Berücksichtigung des Dauerfestigkeitsabfalls mit fortschreitender*. Technische Mitteilungen TM 50. Schädigung, Laboratorium für Betriebsfestigkeit, 1970.
- [18] *Eurocode 3: Design of steel structures — Part 1-9: Fatigue*. Vol. EN 1993-1-9:2005-05 +AC:2009-04. Brussels, ECS, 2009. 36 p.
- [19] Zenner H., Liu J. Vorschlag zur Verbesserung der Lebensdauerabschätzung nach dem Nennspannungskonzept. *Konstruktion*, 1992, vol. 44, no. 1, pp. 9–17.
- [20] Стрижиус В.Е. Уравнение кривой усталости при квазислучайном нагружении элементов продольного набора крыла неманевренного самолета. *Ученые записки ЦАГИ*, 1998, т. 29, № 3–4, с. 144–152.
- [21] Haibach E. Betriebsfestigkeit. Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung. *Springer*, 2006. 759 p.
- [22] Кузьмин В.Р., Прохоров В.А., Борисов А.З. и др. *Усталостная прочность металлов и долговечность элементов конструкций при нерегулярном нагружении высокого уровня*. Москва, Машиностроение, 1998. 256 с.
- [23] Стрижиус В.Е. Метод расчета на усталость элементов авиаконструкций при бигармоническом нагружении. *Научный вестник МГТУ ГА*, 2012, № 175, с. 55–61.
- [24] Pereira H., DuQuesnay D., De Jesus A. et al. Analysis of variable amplitude fatigue data of the P355NL1 steel using the effective strain damage model. *J. Pressure Vessel Technol.*, 2009, vol. 131, no. 5, art. 051402, doi: <https://doi.org/10.1115/1.3147986>
- [25] Sines G. *Failure of materials under combined repeated stresses with superimposed static stresses*. Technical report NASA TN-3495. NASA, 1955.
- [26] Crossland B. Effect of large hydrostatic pressures on torsional fatigue strength of an alloy steel. *Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals*, 1956, pp. 138–149.
- [27] Мэнсон С.С. *Температурные напряжения и малоцикловая усталость*. Москва, Машиностроение, 1974. 344 с.
- [28] Smith K., Topper T., Watson P. A stress–strain function for the fatigue of metals. *J. Mater.*, 1970, vol. 5, pp. 767–778.
- [29] Fatemi A., Socie D.F. A critical plane approach to multiaxial fatigue damage including out-of-phase loading. *FFEMS*, 1988, vol. 11, no. 3, pp. 149–165, doi: <https://doi.org/10.1111/j.1460-2695.1988.tb01169.x>
- [30] You C., Achintha M., Soady K.A. et al. Low cycle fatigue life prediction in shot-peened components of different geometries – part II: life prediction. *FFEMS*, 2017, vol. 40, no. 5, pp. 749–760, doi: <https://doi.org/10.1111/ffe.12542>
- [31] Cruces A.S., Lopez-Crespo P., Moreno B. et al. Multiaxial fatigue life prediction on S355 structural and offshore steel using the SKS critical plane model. *Metals*, 2018, vol. 8, no. 12, art. 1060, doi: <https://doi.org/10.3390/met8121060>
- [32] Lemaitre J., Chaboche J.L. *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press, 1994. 556 p.
- [33] Murakami S. Continuum damage mechanics. *Springer*, 2012. 402 p.
- [34] Никитин И.С., Никитин А.Д., Стратула Б.А. Комплексное исследование зарождения и роста усталостных трещин при сверхмногоцикловом кручении. *Физическая мезомеханика*, 2023, т. 26, № 3, с. 50–61, doi: [https://doi.org/10.55652/1683-805X\\_2023\\_26\\_3\\_50](https://doi.org/10.55652/1683-805X_2023_26_3_50)

- [35] Marmi A.K., Habraken A.M., Duchene L. Multiaxial fatigue damage modelling at macro scale of Ti-6Al-4V alloy. *Int. J. Fatigue*, 2009, vol. 31, no. 11–12, pp. 2031–2040, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2009.03.003>
- [36] Lu R.S., Tan J.P., Yang J. et al. A new creep-fatigue crack growth model and a correlation of the creep-fatigue crack growth rate with unified constraint parameter. *Int. J. Fatigue*, 2023, vol. 166, art. 107248, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2022.107248>
- [37] Бондарь В.С., Абашев Д.Р. Неупругое поведение и разрушение материалов при изотермических и неизотермических, простых и сложных нагружениях. *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2020, № 4, с. 107–119, doi: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.4.10>
- [38] Волков И.А., Игумнов Л.А. *Введение в континуальную механику поврежденной среды*. Москва, Физматлит, 2017. 300 с.
- [39] Ottosen N.S., Stenström R., Ristinmaa M. Continuum approach to high-cycle fatigue modeling. *Int. J. Fatigue*, 2008, vol. 30, no. 6, pp. 996–1006, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2007.08.009>
- [40] Петухов Д.С., Келлер И.Э. Эволюционная модель усталостного разрушения при нерегулярном нагружении. *Известия РАН МТТ*, 2022, № 2, с. 72–81, doi: <https://doi.org/10.31857/S0572329922020167>
- [41] Korsunsky A. Variational eigenstrain analysis of synchrotron diffraction measurements of residual elastic strain in a bent titanium alloy bar. *J. Mech. Mat. Struct.*, 2006, vol. 1, no. 2, pp. 259–277, doi: <http://dx.doi.org/10.2140/jomms.2006.1.259>
- [42] Musinski W.D., McDowell D.L. On the eigenstrain application of shot-peened residual stresses within a crystal plasticity framework: application to Ni-base superalloy specimens. *Int. J. Mech. Sci.*, 2015, vol. 100, pp. 195–208, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.06.020>
- [43] Саушкин М.Н., Радченко В.П., Куров А.Ю. Метод расчета остаточных напряжений в надрезах с полукруглым профилем в полем поверхностно упрочненном цилиндрическом образце. *Прикладная механика и техническая физика*, 2013, т. 54, № 4, с. 150–157.
- [44] Gallitelli D., Boyer V., Gelineau M. et al. Simulation of shot peening: from process parameters to residual stress fields in a structure. *Comptes Rendus Mécanique*, 2016, vol. 344, no. 4–5, pp. 355–374, doi: <https://doi.org/10.1016/j.crme.2016.02.006>
- [45] Cochenec F., Rouhaud E., Roucoules L. et al. Numerical and experimental investigation on shot-peening induced deformation: application to sheet metal forming. *Powder Diffr.*, 2008, vol. 23, no. 2, p. 183, doi: <https://doi.org/10.1154/1.2951767>
- [46] Petukhov D.S., Keller I.E. Exact reconstruction formulas for plastic strain distribution in the surface-treated plate and their applications. *Acta Mech.*, 2020, vol. 231, no. 5, pp. 1849–1866, doi: <https://doi.org/10.1007/s00707-020-02625-7>
- [47] Cai X., Li X., Xu J. Fatigue limit and life evaluation formulae for compressive mean stress states. *Mater. Sci. Technol.*, 2018, vol. 34, no. 17, pp. 2166–2173, doi: <https://doi.org/10.1080/02670836.2018.1522100>
- [48] Thiago R. *Zum Schwingfestigkeitsverhalten von Gusseisenwerkstoffen unter einachsiger und mehrachsiger Beanspruchung am Beispiel von EN-GJV-450*. Doktorarbeit. Shaker, 2011. 192 p.
- [49] Forrest P.G. *Fatigue of metals*. Pergamon Press, 1963. 425 p.

## References

- [1] Porter A.M., Leshin D.P., Bukatyy S.A. et al. Experiment-calculated research of the influence of the shot-peening strengthening upon the low-cycle fatigue of the gas turbine parts with the stress concentrator. *Vestnik SGAU*, 2011, no. 3–2, pp. 40–46. (In Russ.).
- [2] Pavlov V.F., Kirpichev V.A., Vakulyuk V.S. *Prognozirovanie soprotivleniya ustalosti poverkhnostno uprochnennykh detaley po ostatochnym napryazheniyam* [Prediction of fatigue resistance of surface hardened parts by residual stresses]. Samara, SNTs RAN Publ., 2012. 125 p. (In Russ.).
- [3] Bagmutov V.P. *Reshenie pryamykh i obratnykh zadach mekhaniki formirovaniya poverkhnostno-uprochnennykh titanovykh splavov so sbalansirovannym kompleksom tribotekhnicheskikh i ustalostnykh kharakteristik* [Solution of direct and inverse problems of mechanics of formation of surface-hardened titanium alloys with a balanced complex of tribotechnical and fatigue characteristics]. Project card RNF 22-29-01078. URL: <https://www.rscf.ru/project/22-29-01078/> (accessed: 15.05.2024). (In Russ.).



- [4] Marines I., Bin X., Bathias C. An understanding of very high cycle fatigue of metals. *Int. J. Fatigue*, 2003, vol. 25, no. 9, pp. 1101–1107, doi: [https://doi.org/10.1016/S0142-1123\(03\)00147-6](https://doi.org/10.1016/S0142-1123(03)00147-6)
- [5] Shiozawa K., Lu L., Ishihara S. S-N curve characteristics and subsurface crack initiation behaviour in ultra-long life fatigue of a high carbon-chromium bearing steel. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 2001, vol. 24, no. 12, pp. 781–790, doi: <https://doi.org/10.1046/j.1460-2695.2001.00459.x>
- [6] Kashaev N., Plekhov O.A., Gachegova E.A. et al. Influence of laser shock peening on low- and high-cycle fatigue of an OT4-0 titanium alloy. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 2022, vol. 63, no. 2, pp. 182–191, doi: <https://doi.org/10.15372/PMTF20220217> (in Russ.). (Eng. version: *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2022, vol. 63, no. 2, pp. 335–342, doi: <https://doi.org/10.1134/S0021894422020171>)
- [7] Nikitin I.S., Burago N.G., Nikitin A.D. Damage and fatigue fracture of structural elements in various cyclic loading modes. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2022, vol. 86, no. 2, pp. 276–290. (In Russ.).
- [8] Naumann E.C., Hardrath H.R., Guthrie E.C. *Axial load fatigue tests of 2024-T3 and 7075-T6 aluminum alloy sheet specimens under constant- and variable-amplitude loads*. Technical report. NASA TN D-212. Langley Research Center, NASA, 1959. 40 p.
- [9] Naumann E.C. *Fatigue under random and programmed loads*. Technical report NASA TN D-2629. Langley Research Center, NASA, 1965. 42 p.
- [10] Schutz W. The fatigue life under three different load spectra tests and calculations. *Symp. on Random Load Fatigue. AGARD CP-118*, 1972.
- [11] Schutz W., Heuler P. Miner's rule revisited. *Mater. Test.*, 1994, vol. 42, no. 6, pp. 245–251, doi: <https://doi.org/10.1515/mt-2000-420612>
- [12] Jacoby G.H. Comparison of fatigue lives under conventional program loading and digital random loading. In: *Effects of environment and complex load history on fatigue life*. ASTM Int., 1970, pp. 184–202, doi: <https://doi.org/10.1520/STP32042S>
- [13] Ekvall J.C., Young L. Converting fatigue loading spectra for flight-by-flight testing of aircraft and helicopter components. *J. Test. Eval.*, 1976, vol. 4, no. 4, pp. 231–247, doi: <https://doi.org/10.1520/JTE10207J>
- [14] Basov V.N., Nesterenko G.I. Mechanical and fatigue strength of skin materials for civil airplane structures. *Nauchnyy vestnik MGTU GA [Civil Aviation High Technologies]*, 2010, no. 153, pp. 15–23. (In Russ.).
- [15] Jurcevic R., DuQuesnay D.L., Topper T.H. et al. Fatigue damage accumulation in 2024-T351 aluminium subjected to periodic reversed overloads. *Int. J. Fatigue*, 1990, vol. 12, no. 4, pp. 259–266, doi: [https://doi.org/10.1016/0142-1123\(90\)90453-L](https://doi.org/10.1016/0142-1123(90)90453-L)
- [16] Borrego L.P., Ferreira J.M., Pinho da Cruz J.M. et al. Evaluation of overload effects on fatigue crack growth and closure. *Eng. Fract. Mech.*, 2003, vol. 70, no. 11, pp. 1379–1397, doi: [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(02\)00119-4](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(02)00119-4)
- [17] Haibach F. *Modifizierte lineare Schadensakkumulationshypothese zur Berücksichtigung des Dauerfestigkeitsabfalls mit fortschreitender*. Technische Mitteilungen TM 50. Schädigung, Laboratorium für Betriebsfestigkeit, 1970.
- [18] *Eurocode 3: Design of steel structures — Part 1-9: Fatigue*. Vol. EN 1993-1-9:2005-05 +AC:2009-04. Brussels, ECS, 2009. 36 p.
- [19] Zenner H., Liu J. Vorschlag zur Verbesserung der Lebensdauerabschätzung nach dem Nennspannungskonzept. *Konstruktion*, 1992, vol. 44, no. 1, pp. 9–17.
- [20] Strizhius V.E. Fatigue curve equation under quasi-random loading of elements of the longitudinal wing set of a non-maneuvering aircraft wing. *Uchenye zapiski TsAGI*, 1998, vol. 29, no. 3–4, pp. 144–152. (In Russ.).
- [21] Haibach E. Betriebsfestigkeit. Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung. *Springer*, 2006. 759 p.
- [22] Kuzmin V.R., Prokhorov V.A., Borisov A.Z. et al. *Ustalostnaya prochnost metallov i dolgovechnost elementov konstruktsiy pri neregulyarnom nagruzhenii vysokogo urovnya* [Fatigue strength of metals and durability of structural elements under irregular high-level loading]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1998. 256 p. (In Russ.).

- [23] Strizhnius V.E. Method for fatigue analysis of airframe elements, operating under biharmonic loading. *Nauchnyy vestnik MGTU GA* [Civil Aviation High Technologies], 2012, no. 175, pp. 55–61. (In Russ.).
- [24] Pereira H., DuQuesnay D., De Jesus A. et al. Analysis of variable amplitude fatigue data of the P355NL1 steel using the effective strain damage model. *J. Pressure Vessel Technol.*, 2009, vol. 131, no. 5, art. 051402, doi: <https://doi.org/10.1115/1.3147986>
- [25] Sines G. *Failure of materials under combined repeated stresses with superimposed static stresses*. Technical report NACA TN-3495. NACA, 1955.
- [26] Crossland B. Effect of large hydrostatic pressures on torsional fatigue strength of an alloy steel. *Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals*, 1956, pp. 138–149.
- [27] Manson S.S. *Thermal stress and low-cycle fatigue*. McGraw-Hill, 1966. 404 p. (Russ. ed.: *Temperaturnye napryazheniya i malotsiklovaya ustalost*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1974. 344 p.)
- [28] Smith K., Topper T., Watson P. A stress–strain function for the fatigue of metals. *J. Mater.*, 1970, vol. 5, pp. 767–778.
- [29] Fatemi A., Socie D.F. A critical plane approach to multiaxial fatigue damage including out-of-phase loading. *FFEMS*, 1988, vol. 11, no. 3, pp. 149–165, doi: <https://doi.org/10.1111/j.1460-2695.1988.tb01169.x>
- [30] You C., Achintha M., Soady K.A. et al. Low cycle fatigue life prediction in shot-peened components of different geometries – part II: life prediction. *FFEMS*, 2017, vol. 40, no. 5, pp. 749–760, doi: <https://doi.org/10.1111/ffe.12542>
- [31] Cruces A.S., Lopez-Crespo P., Moreno B. et al. Multiaxial fatigue life prediction on S355 structural and offshore steel using the SKS critical plane model. *Metals*, 2018, vol. 8, no. 12, art. 1060, doi: <https://doi.org/10.3390/met8121060>
- [32] Lemaitre J., Chaboche J.L. *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press, 1994. 556 p.
- [33] Murakami S. *Continuum damage mechanics*. Springer, 2012. 402 p.
- [34] Nikitin I.S., Nikitin A.D., Stratula B.A. A comprehensive study of fatigue crack initiation and growth under very high cycle torsional fatigue loading. *Fizicheskaya mezhmekhanika*, 2023, vol. 26, no. 3, pp. 50–61, doi: [https://doi.org/10.55652/1683-805X\\_2023\\_26\\_3\\_50](https://doi.org/10.55652/1683-805X_2023_26_3_50) (in Russ.).
- [35] Marmi A.K., Habraken A.M., Duchene L. Multiaxial fatigue damage modelling at macro scale of Ti–6Al–4V alloy. *Int. J. Fatigue*, 2009, vol. 31, no. 11–12, pp. 2031–2040, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2009.03.003>
- [36] Lu R.S., Tan J.P., Yang J. et al. A new creep-fatigue crack growth model and a correlation of the creep-fatigue crack growth rate with unified constraint parameter. *Int. J. Fatigue*, 2023, vol. 166, art. 107248, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2022.107248>
- [37] Bondar V.S., Abashev D.R. Inelastic behavior and destruction of materials under isothermal and non-isothermal, simple and complex loads. *Vestnik PNIPIU. Mekhanika* [PNRPU Mechanics Bulletin], 2020, no. 4, pp. 107–119, doi: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.4.10> (in Russ.).
- [38] Volkov I.A., Igumnov L.A. *Vvedenie v kontinualnuyu mekhaniku povrezhdennoy sredy* [Introduction to continuum mechanics of damaged media]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2017. 300 p. (In Russ.).
- [39] Ottosen N.S., Stenström R., Ristinmaa M. Continuum approach to high-cycle fatigue modeling. *Int. J. Fatigue*, 2008, vol. 30, no. 6, pp. 996–1006, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2007.08.009>
- [40] Petukhov D.S., Keller I.E. Evolutionary model of fatigue fracture under irregular loading. *Izvestiya RAN MTT*, 2022, no. 2, pp. 72–81, doi: <https://doi.org/10.31857/S0572329922020167> (in Russ.). (Eng. version: *Mech. Solids*, 2022, vol. 57, no. 2, pp. 263–270, doi: <https://doi.org/10.3103/S0025654422020194>)
- [41] Korsunsky A. Variational eigenstrain analysis of synchrotron diffraction measurements of residual elastic strain in a bent titanium alloy bar. *J. Mech. Mat. Struct.*, 2006, vol. 1, no. 2, pp. 259–277, doi: <http://dx.doi.org/10.2140/jomms.2006.1.259>
- [42] Musinski W.D., McDowell D.L. On the eigenstrain application of shot-peened residual stresses within a crystal plasticity framework: application to Ni-base superalloy specimens. *Int. J. Mech. Sci.*, 2015, vol. 100, pp. 195–208, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.06.020>

- [43] Saushkin M.N., Radchenko V.P., Kurov A.Yu. Method of calculating residual stresses in semicircular notches in a surface hardened hollow cylindrical specimen. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 2013, vol. 54, no. 4, pp. 150–157. (In Russ.). (Eng. version: *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2013, vol. 54, no. 4, pp. 644–650, doi: <https://doi.org/10.1134/S0021894413040159>)
- [44] Gallitelli D., Boyer V., Gelineau M. et al. Simulation of shot peening: from process parameters to residual stress fields in a structure. *Comptes Rendus M'ecanique*, 2016, vol. 344, no. 4–5, pp. 355–374, doi: <https://doi.org/10.1016/j.crme.2016.02.006>
- [45] Cochenec F., Rouhaud E., Roucoules L. et al. Numerical and experimental investigation on shot-peening induced deformation: application to sheet metal forming. *Powder Diffr.*, 2008, vol. 23, no. 2, p. 183, doi: <https://doi.org/10.1154/1.2951767>
- [46] Petukhov D.S., Keller I.E. Exact reconstruction formulas for plastic strain distribution in the surface-treated plate and their applications. *Acta Mech.*, 2020, vol. 231, no. 5, pp. 1849–1866, doi: <https://doi.org/10.1007/s00707-020-02625-7>
- [47] Cai X., Li X., Xu J. Fatigue limit and life evaluation formulae for compressive mean stress states. *Mater. Sci. Technol.*, 2018, vol. 34, no. 17, pp. 2166–2173, doi: <https://doi.org/10.1080/02670836.2018.1522100>
- [48] Thiago R. *Zum Schwingfestigkeitsverhalten von Gusseisenwerkstoffen unter einachsiger und mehrachsiger Beanspruchung am Beispiel von EN-GJV-450*. Doktorarbeit. Shaker, 2011. 192 p.
- [49] Forrest P.G. *Fatigue of metals*. Pergamon Press, 1963. 425 p.

Статья поступила в редакцию 03.06.2024

## Информация об авторах

**ПЕТУХОВ Дмитрий Сергеевич** — ведущий инженер лаборатории нелинейной механики деформируемого твердого тела. Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук (614013, Пермь, Российская Федерация, ул. Академика Королёва, д. 1, e-mail: [petuhovds@mail.ru](mailto:petuhovds@mail.ru)).

**ДУДИН Дмитрий Сергеевич** — ведущий инженер лаборатории нелинейной механики деформируемого твердого тела. Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук (614013, Пермь, Российская Федерация, ул. Академика Королёва, д. 1, e-mail: [dmitryovj@yandex.ru](mailto:dmitryovj@yandex.ru)).

**КЕЛЛЕР Илья Эрнстович** — доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией нелинейной механики деформируемого твердого тела. Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук (614013, Пермь, Российская Федерация, ул. Академика Королёва, д. 1, e-mail: [kie@icmm.ru](mailto:kie@icmm.ru)).

## Information about the authors

**PETUKHOV Dmitriy Sergeevich** — Leading Engineer, Laboratory of Nonlinear Mechanics of Solids. Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Science (614013, Perm, Russian Federation, Akademika Koroleva St., Bldg. 1, e-mail: [petuhovds@mail.ru](mailto:petuhovds@mail.ru)).

**DUDIN Dmitriy Sergeevich** — Leading Engineer, Laboratory of Nonlinear Mechanics of Solids. Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Science (614013, Perm, Russian Federation, Akademika Koroleva St., Bldg. 1, e-mail: [dmitryovj@yandex.ru](mailto:dmitryovj@yandex.ru)).

**KELLER Ilya Ernstovich** — Doctor of Science (Phys.-Math.), Head of the Laboratory of Nonlinear Mechanics of Solids. Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Science (614013, Perm, Russian Federation, Akademika Koroleva St., Bldg. 1, e-mail: [kie@icmm.ru](mailto:kie@icmm.ru)).

### Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Петухов Д.С., Дудин Д.С., Келлер И.Э. Методика оценки ресурса по малоцикловой усталости при нерегулярном нагружении деталей с поверхностными остаточными напряжениями. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2025, № 1, с. 3–20.

### Please cite this article in English as:

Petukhov D.S., Dudin D.S., Keller I.E. Method of calculating the fatigue life of parts under the non-regular loading in the presence of surface residual stresses. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2025, no. 1, pp. 3–20.