УДК 539.3; 629.7.023

Определение сдвиговой жесткости заполнителя трехслойного стержня по известным значениям прогибов или частот собственных колебаний

А.Е. Белкин[1], И.Д. Бирюков[2]

[1] МГТУ им. Н.Э. Баумана
[2] НТЦ «АПМ»

Shear stiffness determination of the three-layer rod based on the deflections or natural frequencies known values

A.E. Belkin[1], I.D. Biryukov[2]

[1] Bauman Moscow State Technical University
[2] STC «APM»

В математических моделях трехслойных конструкций реальные заполнители сложной структуры (сотовые, гофрированные, складчатые и др.) заменяют условным однородным слоем с приведенными характеристиками упругости. Одной из важнейших характеристик заполнителя является жесткость при сдвиге. Получить ее значение непосредственно путем испытания сложно. Поставлена задача идентификации жесткости заполнителя трехслойного стержня при сдвиге по известным значениям частот собственных колебаний или перемещений при поперечном изгибе. Для расчетов трехслойных стержней использована теория Э.И. Григолюка — П.П. Чулкова, построенная на основе гипотезы ломаной нормали. Рассмотрены результаты применения этой приближенной теории к расчету частот и форм собственных колебаний стержней. Для оценки точности приближенной теории проведено сравнение ее результатов с решениями плоской динамической задачи теории упругости методом конечных элементов. Показано, что для низших форм собственных колебаний с длинами волн, значительно превышающими высоту сечения, гипотеза ломаной нормали дает результаты, практически совпадающие с решениями теории упругости. Исследовано влияние жесткости заполнителя на частоту собственных колебаний и перемещение стержней при трехточечном изгибе. Получены формулы, позволяющие установить значения жесткости заполнителя при сдвиге по известным данным соответствующих испытаний.

EDN: ZJKAZI, https://elibrary/zjkazi

Ключевые слова: трехслойный стержень, поперечный изгиб, жесткость заполнителя, частоты собственных колебаний, идентификация жесткости

In mathematical simulation of the three-layer structures, real fillers of complex structure (honeycomb, corrugated, folded, etc.) are replaced by a conventional homogeneous layer with the given elastic characteristics. Shear stiffness is one of the most important characteristics of a filler. It is rather difficult to obtain its value directly by testing the filler. The problem is set to identify shear stiffness of the three-layer rod filler based on the known values of natural frequencies or displacement under the transverse bending. In computation of the three-layer rods, the paper uses the E.I. Grigolyuk — P.P. Chulkov theory constructed on the basis of the broken normal hypothesis. It considers results of applying this approximate theory to computation of the rod natural frequencies and vibration modes. To assess the approximate theory accuracy, the paper compares computation results with solutions to the plane dynamic problem of the elasticity theory by the finite element method. It shows that for the lowest vibration modes with wavelengths significantly exceeding the cross-section height, the broken normal hypothesis provides results practically matching solutions of the elasticity theory. The paper analyzes the filler stiffness effect on the values of the natural vibration frequencies and displacement under the three-point bending of a rod. Formulas are obtained making it possible to establish the filler shear stiffness values based on the known data of the corresponding tests.

EDN: ZJKAZI, https://elibrary/zjkazi

Keywords: three-layer rod, transverse bending, filler stiffness, natural frequencies, rigidity identification

Идентификация параметров математической модели сложной конструкции включает в себя анализ их влияния на измеряемые в испытаниях величины: перемещения, скорости, ускорения точек конструкции, деформации и частоты собственных колебаний. При таком анализе устанавливают чувствительность модели к изменениям параметров, позволяющую провести ее настройку на воспроизведение результатов испытаний.

Рассмотрена модель трехслойного стержня, служащего расчетной схемой для многих объектов машиностроения. При ее использовании возникает задача замены реального заполнителя сложной структуры (сотового, гофрированного, складчатого и др.) однородным слоем с приведенными характеристиками упругости. Одной из важнейших характеристик заполнителя является жесткость при сдвиге (далее сдвиговая жесткость). Получить ее значение путем испытания заполнителя сложно, поэтому для идентификации используют экспериментальные данные о частотах собственных колебаний или перемещениях стержня при изгибе.

Расчетно-экспериментальный метод применен для определения характеристик жесткости трехслойных балок и панелей, гофрированных пластин [1–3], а также для идентификации параметров упругости слоистых композитов по данным модального анализа [4, 5]. Суть метода заключается в минимизации разности экспериментальных и теоретических значений частот собственных колебаний конструкции путем варьирования искомых параметров модели. Для идентификации параметров упругости наряду с динамическими испытаниями проводят и статические, в частности балки на трехточечный изгиб [6, 7].

Цель статьи — разработка теоретической части процедуры идентификации сдвиговой жесткости заполнителя трехслойной балки по результатам статических или динамических испытаний.

Применим теорию трехслойного стержня для определения жесткости заполнителя. Выполним сравнительный анализ результатов расчета собственных колебаний стержня, полученных аналитическим методом с использованием гипотезы ломаной линии [8] и методом конечных элементов (МКЭ) по модели плоской задачи теории упругости. Покажем, что для низших форм собственных колебаний с длинами волн, заметно превышающими высоту сечения, гипотеза ломаной линии дает результаты, практически совпадающие с решениями задачи теории упругости.

Исследуем влияние сдвиговой жесткости заполнителя на перемещение трехслойного стержня при изгибе и на частоту собственных поперечных колебаний. Получим формулы, позволяющие определять сдвиговую жесткость заполнителя по известным данным соответствующих испытаний.

Теория изгиба трехслойных стержней. Для расчета трехслойных конструкций разработаны прикладные теории [8–15], основанные на различных кинематических и статических гипотезах и моделях деформирования.

Теория, изложенная в работе [8], базируется на использовании гипотезы ломаной линии, согласно которой поперечное сечение в жестком слое при деформации остается плоским и нормальным к искривленной оси стержня, а поперечное сечение в заполнителе, оставаясь плоским, составляет с нормальным сечением угол сдвига.

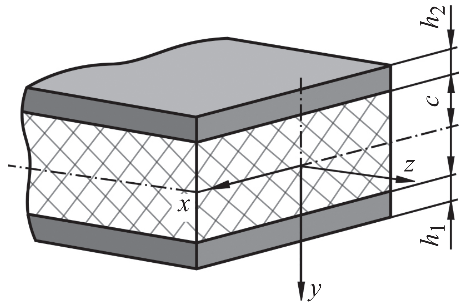

Рис. 1. Схема поперечного сечения трехслойного стержня

В книге [9] предложена математическая модель многослойных конструкций с осреднением сдвигов по высоте сечения, а в работе [10] — модель расчета с учетом трансверсальной податливости слоя заполнителя. В публикациях [13–15] собраны справочные материалы по расчетам трехслойных конструкций.

Схема поперечного сечения трехслойного стержня приведена на рис. 1. Там же показана система координат, связанная со срединной плоскостью заполнителя, которая использована при записи уравнений. Будем полагать, что внешние несущие слои стержня обладают большой жесткостью при малой толщине. Легкий заполнитель, обеспечивающий совместную работу несущих слоев, разносит их на заданное расстояние $h_3 = 2c$.

Согласно принятой гипотезе [8], продольные перемещения слоев стержня изменяются по закону ломаной линии

$$w = \begin{cases} w_0 + c\gamma + y\vartheta & \text{при} \quad c \le y \le c + h_1; \\ w_0 + y(\gamma + \vartheta) & \text{при} \quad -c \le y \le c; \\ w_0 - c\gamma + y\vartheta & \text{при} \quad -(c + h_2) \le y \le -c, \end{cases}$$

где w_0 — продольное перемещение точек срединной плоскости заполнителя; γ — угол сдвига в заполнителе; ϑ — угол поворота поперечных сечений жестких слоев; h_1 и h_2 — толщины первого и второго несущих слоев.

Прогибы v одинаковы для всех слоев. Напряжения в первом σ_1, втором σ_2 и третьем σ_3 слоях определяются соотношениями упругости

$$\sigma_1 = E_1\left(\varepsilon_0 + c\gamma' + y\vartheta'\right); \quad \sigma_2 = E_2\left(\varepsilon_0 - c\gamma' + y\vartheta'\right);$$

$$\sigma_3 = E_3\left(\varepsilon_0 + y\gamma' + y\vartheta'\right); \quad \tau_3 = G_3\gamma,$$

где E_1, E_2 и E_3 — модуль упругости первого, второго и третьего слоя соответственно; ε_0 — продольная деформация в срединной плоскости заполнителя, штрих над функцией обозначает дифференцирование по координате z; G_3 — модуль сдвига заполнителя.

Уравнения движения стержня получаем на основе принципа возможных перемещений, составляя выражения элементарных работ сил — внутренних, внешних и инерции:

$$\int_0^l \left(\int_c^{c+h_1} \sigma_1 \delta\varepsilon_1 dy + \int_{-c-h_2}^{-c} \sigma_2 \delta\varepsilon_2 dy + \right.$$

$$\left. + \int_{-c}^{c} \sigma_3 \delta\varepsilon_3 dy + \int_{-c}^{c} \tau_3 \delta\gamma dy \right) b_0 dz =$$

$$= \int_0^l \left(q - m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \delta v \, dz + \delta W_\text{г}^{ext},$$

или

$$\int_0^l \left(N\delta\varepsilon_0 + \hat{H}\delta\gamma' + \hat{M}\delta\vartheta' + Q_3\delta\gamma \right) dz =$$

$$= \int_0^l \left(q - m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \delta v \, dz + \delta W_\text{г}^{ext},$$

где l — длина стержня; $\delta\varepsilon_1$, $\delta\varepsilon_2$, $\delta\varepsilon_3$ и $\delta\varepsilon_0$ — вариации продольных деформаций слоев и срединной плоскости заполнителя; $\delta\gamma$, $\delta\gamma'$ и $\delta\vartheta'$ — вариации углов сдвига, их производных и кривизны стержня; b_0 — ширина поперечного сечения; q — внешняя нагрузка; m — погонная масса стержня; δv — возможные прогибы; $\delta W_\text{г}^{ext}$ — элементарная работа внешних сил на границах стержня; N — нормальная сила; t — время; $\hat{H}$ и Q_3 — момент сдвига и поперечная сила в заполнителе; $\hat{M}$ — изгибающий момент относительно оси x в срединной плоскости заполнителя.

Внутренние силовые факторы связаны с деформациями соотношениями

$$\begin{pmatrix} N \\ \hat{H} \\ \hat{M} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} B & (B_1 - B_2)c & K_1 + K_2 \\ (B_1 - B_2)c & D_3 + (B_1 + B_2)c^2 & D_3 + (K_1 - K_2)c \\ K_1 + K_2 & D_3 + (K_1 - K_2)c & D \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \gamma' \\ \vartheta' \end{pmatrix}.$$

Здесь B, B_1, B_2, B_3, K_1, K_2, D_3, D — упругогеометрические характеристики сечения,

$$B = B_1 + B_2 + B_3; \quad B_1 = \int_c^{c+h_1} E_1 b_0 dy;$$

$$B_2 = \int_{-c-h_2}^{-c} E_2 b_0 dy; \quad B_3 = \int_{-c}^{c} E_3 b_0 dy;$$

$$K_1 = \int_{c}^{c+h_1} yE_1 b_0 dy; \; K_2 = \int_{-c-h_2}^{-c} yE_2 b_0 dy;$$

$$D_3 = \int_{-c}^{c} y^2 E_3 b_0 dy; \; D = D_1 + D_2 + D_3,$$

где

$$D_1 = \int_{c}^{c+h_1} y^2 E_1 b_0 dy; \quad D_2 = \int_{-c-h_2}^{-c} y^2 E_2 b_0 dy.$$

Если ввести обобщенное осевое перемещение [8]

$$w_* = w_0 + B^{-1}\left(B_1 - B_2\right)c\gamma + B^{-1}\left(K_1 + K_2\right)\vartheta$$

и новые силовые факторы

$$H = \hat{H} - B^{-1}\left(B_1 - B_2\right)cN;$$
$$M = \hat{M} - B^{-1}\left(K_1 + K_2\right)N,$$

то можно разделить задачи растяжения и изгиба.

Связь силовых факторов с деформациями преобразуется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} N \\ H \\ M \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & g_{23} \\ 0 & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_*' \\ \gamma' \\ \vartheta' \end{pmatrix},$$

а выражения для компонент матрицы жесткостей принимают вид

$$g_{11} = B; \quad g_{22} = D_3 + \left(B_1 + B_2\right)c^2 - B^{-1}\left(B_1 - B_2\right)^2 c^2;$$
$$g_{23} = g_{32} = D_3 + \left(K_1 - K_2\right)c - B^{-1}\left(B_1 - B_2\right)\left(K_1 + K_2\right)c;$$
$$g_{33} = D - B^{-1}\left(K_1 + K_2\right)^2.$$

Отметим, что при симметричном строении стержня введенные силовые факторы M и H совпадают с величинами $\hat{M}$ и $\hat{H}$. После преобразований получаем уравнения движения стержня

$$H' = Q_3; \quad M' = Q; \; Q' = m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - q,$$

где Q — поперечная сила в стержне.

Полная система дифференциальных уравнений движения стержня имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial z} = -\vartheta; \\ \dfrac{\partial \gamma}{\partial z} = \dfrac{g_{33}}{\Delta}H - \dfrac{g_{23}}{\Delta}M; \\ \dfrac{\partial \vartheta}{\partial z} = -\dfrac{g_{32}}{\Delta}H + \dfrac{g_{22}}{\Delta}M; \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z} = m\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - q; \\ \dfrac{\partial H}{\partial z} = C_{\text{сдв}}\gamma; \\ \dfrac{\partial M}{\partial z} = Q, \end{cases} \tag{1}$$

где $\Delta = g_{22}g_{33} - g_{23}g_{32}$; $C_{\text{сдв}}$ — сдвиговая жесткость заполнителя, подлежащая определению в задаче идентификации, $C_{\text{сдв}} = G_3 2c b_0$.

Расчет частот собственных колебаний трехслойного стержня. Для записи уравнений в матричной форме введем вектор состояния

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} v & \gamma & \vartheta & Q & H & M \end{pmatrix}^{\text{T}}.$$

Решение задачи о собственных поперечных колебаниях стержня представим в виде

$$\mathbf{Y}(z,\, t) = \mathbf{Y}_0(z)\cos pt.$$

Здесь $\mathbf{Y}_0$ — вектор амплитудных функций, $\mathbf{Y}_0 = (v_0 \;\; \gamma_0 \;\; \vartheta_0 \;\; Q_0 \;\; H_0 \;\; M_0)^{\text{T}}$; p — частота собственных колебаний стержня.

Амплитудные функции вектора $\mathbf{Y}_0$ определяем из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{Y}_0}{dz} = [F]\mathbf{Y}_0, \tag{2}$$

где $[F]$ — матрица коэффициентов,

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{33}/\Delta & -g_{23}/\Delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -g_{32}/\Delta & g_{22}/\Delta \\ -mp^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{\text{сдв}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение системы уравнений (2) будем искать в виде

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{A}e^{sz}.$$

Здесь $\mathbf{A}$ — вектор постоянных; s — характеристические числа, определяемые как корни уравнения

$$s^6 - a_4 s^4 - a_2 s^2 + a_0 = 0, \tag{3}$$

где $a_4 = g_{33}C_{\text{сдв}}/\Delta$; $a_2 = g_{22}mp^2/\Delta$; $a_0 = C_{\text{сдв}}mp^2/\Delta$.

Уравнение (3) имеет одну пару мнимых

$$s_{1,2} = \pm i\mu$$

и две пары действительных корней [8]

$$s_{3,4} = \pm\nu;\ \ s_{5,6} = \pm\eta,$$

которые связаны между собой и с частотой собственных колебаний p следующими соотношениями:

$$\nu^2 = \frac{a_4+\mu^2}{2} + \sqrt{\frac{\left(a_4+\mu^2\right)^2}{4} - \frac{a_0}{\mu^2}};$$

$$\eta^2 = \frac{a_4+\mu^2}{2} - \sqrt{\frac{\left(a_4+\mu^2\right)^2}{4} - \frac{a_0}{\mu^2}};$$

$$p^2 = \frac{\mu^4\left(\mu^2\Delta + g_{33}C_{\text{сдв}}\right)}{m\left(g_{22}\mu^2 + C_{\text{сдв}}\right)}.$$

Решение для прогибов запишем в виде

$$v_0 = C_1\cos\mu z + C_2\sin\mu z + C_3\,\mathrm{ch}\,\nu z + {}$$
$$+ C_4\,\mathrm{sh}\,\nu z + C_5\,\mathrm{ch}\,\eta z + C_6\,\mathrm{sh}\,\eta z,$$

где $C_1 - C_6$ — постоянные коэффициенты.

Аналитические расчеты проведены для шарнирно опертого и консольного стержней при наличии и отсутствии диафрагм на их торцах, ограничивающих сдвиг слоев. Исходя из поставленных граничных условий, построена система линейных однородных уравнений относительно постоянных $C_1 - C_6$ Частоты собственных колебаний определены из условия существования нетривиального решения.

Конечно-элементное решение той же задачи получено с помощью программного пакета Simcenter Nastran с применением конечных элементов CQUAD8, описывающих плоское деформированное состояние. Моделирование диафрагм выполнено конечными элементами жесткой связи RBE2 путем соединения всех узлов на торце стержня и запрета относительных смещений. Для расчета частот и форм собственных колебаний использован блочный метод Ланцоша (Nastran SOL103 SEMODES).

Исходными данными для расчетов являлись следующие параметры: длина стержня $l = 400$ мм; толщина первого и второго несущих слоев $h_1 = h_2 = 2$ мм и их модули упругости $E_1 = E_2 = 70\,000$ МПа; толщина заполнителя $h_3 = 16$ мм, его модули упругости $E_3 = 30$ МПа и сдвига $G_3 = 10$ МПа; плотности материалов несущих слоев $\rho_1 = \rho_2 = 2800$ кг/м^3 и заполнителя $\rho_3 = 1000$ кг/м^3.

Значения первых пяти частот собственных колебаний $f = p/(2\pi)$ для различных случаев закрепления стержня при наличии и отсутствии диафрагм на его торцах приведены в таблице. Здесь введены следующие обозначения: f_{fem} — частота, вычисленная МКЭ; f_{an} — частота, полученная путем аналитического расчета; δ — относительная погрешность,

$$\delta = \left|\frac{f_{an} - f_{fem}}{f_{fem}}\right| \cdot 100\ \%.$$

Значения частот собственных колебаний стержня для различных случаев его закрепления при отсутствии и наличии диафрагм на торцах, полученные разными методами

Номер частоты	f_{an}, Гц	f_{fem}, Гц	Относительная погрешность δ, %
Для шарнирно опертого стержня			
1	102,5/112,9	103,1/114,4	0,68/1,24
2	224,1/246,8	225,5/249,3	0,61/0,99
3	360,5/400,4	364,1/406,3	1,00/1,45
4	519,0/569,0	526,8/578,4	1,48/1,62
5	704,6/777,2	718,7/795,3	1,95/2,26
Для консольного стержня			
1	50,2/50,2	50,8/50,9	1,27/1,27
2	160,9/161,5	162,6/163,3	1,04/1,12
3	299,5/302,2	302,3/305,5	0,89/1,09
4	449,4/455,8	454,8/462,7	1,18/1,49
5	624,5/637,0	634,4/649,4	1,55/1,92
Примечание. В числителе указаны значения для стержня без диафрагм на торцах, в знаменателе — с диафрагмами на торцах.			

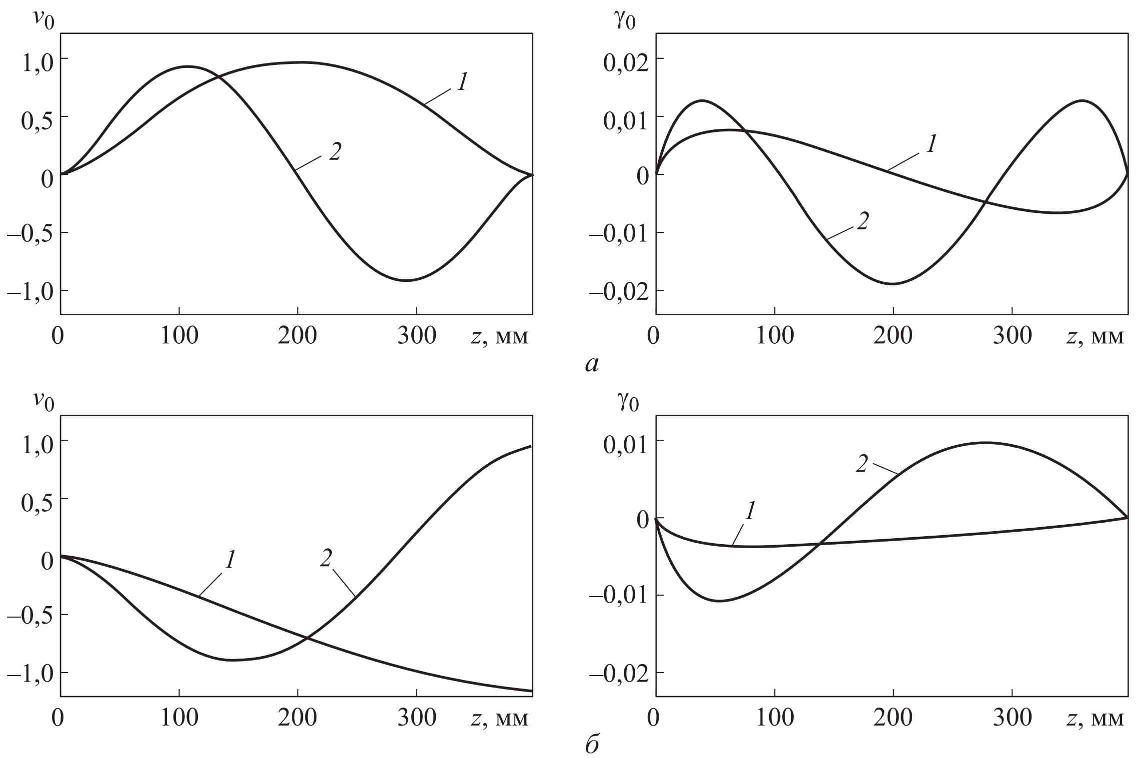

Рис. 2. Первая (*1*) и вторая (*2*) формы собственных колебаний шарнирно опертого (*а*) и консольного (*б*) стержней с диафрагмами на торцах

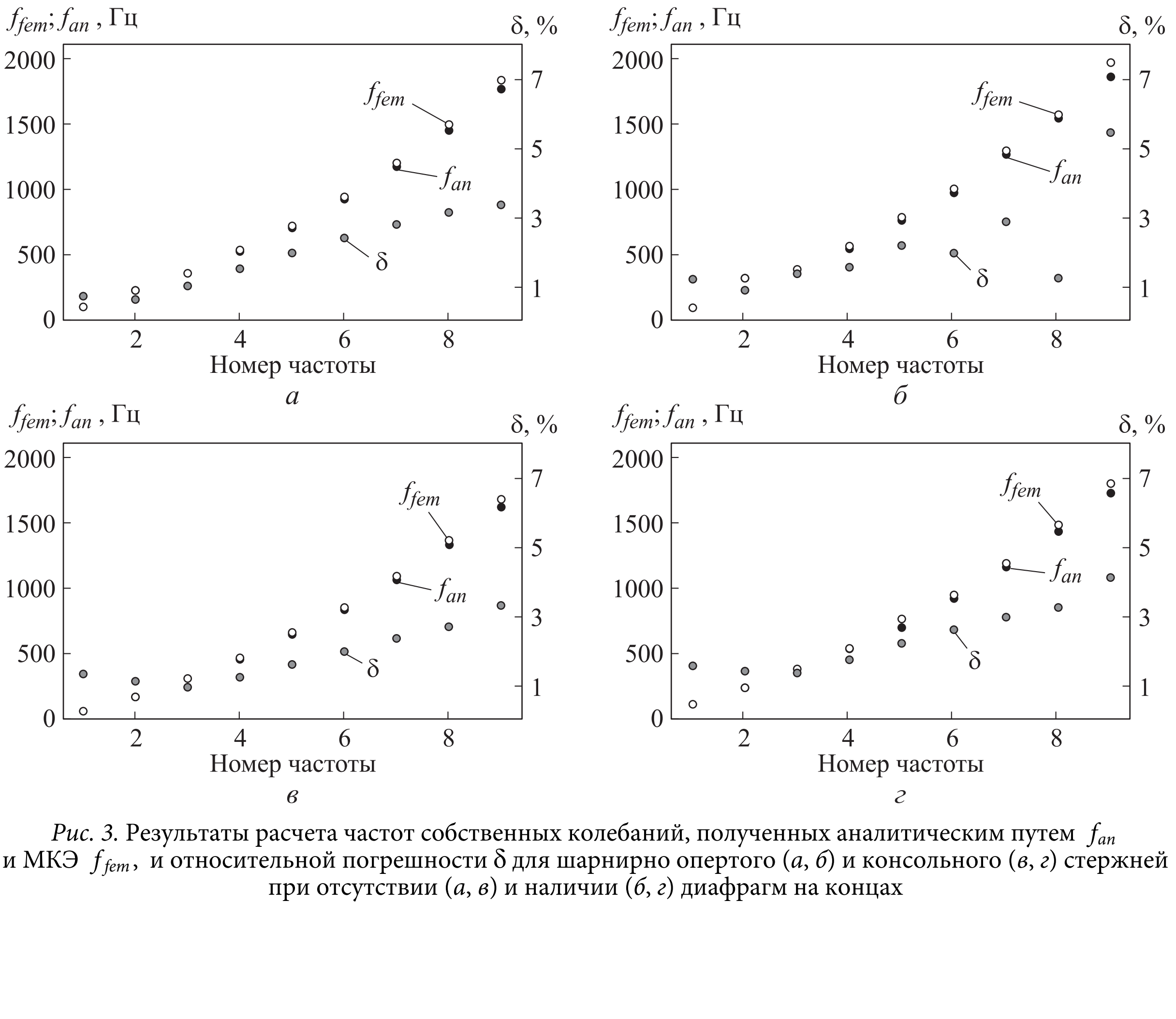

Рис. 3. Результаты расчета частот собственных колебаний, полученных аналитическим путем f_{an} и МКЭ f_{fem}, и относительной погрешности δ для шарнирно опертого (*а*, *б*) и консольного (*в*, *г*) стержней при отсутствии (*а*, *в*) и наличии (*б*, *г*) диафрагм на концах

Первая и вторая формы собственных колебаний шарнирно опертого и консольного стержней с диафрагмами на торцах показаны на рис. 2, *а* и *б*.

Результаты расчета частот собственных колебаний, полученные аналитическим путем f_{an} и МКЭ f_{fem}, и относительной погрешности δ для шарнирно опертого и консольного стержней при отсутствии и наличии диафрагм на торцах приведены на рис. 3. Сопоставление результатов расчета частот различными методами показало их хорошее согласование, что является основанием для использования приближенной теории [8] при моделировании динамических и статических испытаний на изгиб трехслойных стержней.

Определение сдвиговой жесткости заполнителя. В основу ее определения положены результаты статических испытаний стержня при трехточечном изгибе (рис. 4).

В случае статического нагружения уравнения равновесия допускают интегрирование

$$Q(z) = Q_0 - \int_0^z q(\xi)\,d\xi;$$

$$M(z) = M_0 + Q_0 z - \int_0^z\int_0^{z_1} q(\xi)\,d\xi\,dz_1,$$

где ξ, z_1 — немые переменные интегрирования.

Если ввести обобщенный угол поворота сечения $\varphi = \vartheta + \gamma g_{23}/g_{33}$, то из соотношения упругости для изгибающего момента получаем $\varphi' = M/g_{33}$. Отсюда

$$\varphi(z) = \varphi_0 +$$

$$+\frac{1}{g_{33}}\left(M_0 z + \frac{Q_0 z^2}{2} - \int_0^z\int_0^{z_2}\int_0^{z_1} q(\xi)\,d\xi\,dz_1\,dz_2\right),$$

где z_2 — немая переменная.

Угол сдвига определяем интегрированием уравнения

$$\frac{d^2\gamma}{dz^2} - \lambda^2\gamma = -\frac{g_{23}}{\Delta}Q,$$

решение которого имеет вид

$$\gamma = C_1\,\mathrm{ch}\,\lambda z + C_2\,\mathrm{sh}\,\lambda z + \gamma_*.$$

Здесь $\lambda = \sqrt{C_{сдв}\,g_{33}/\Delta}$; γ_* — частное решение неоднородного уравнения, для постоянной поперечной силы

$$\gamma_* = \frac{g_{23}\,Q_0}{g_{33}\,C_{сдв}}.$$

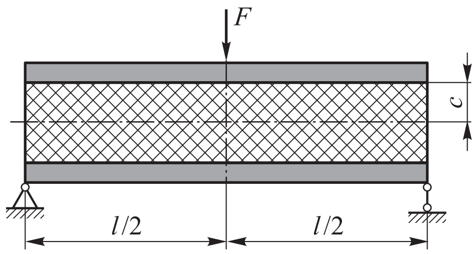

Рис. 4. Схема расчета стержня при трехточечном изгибе

Опуская преобразования, получаем следующие выражения для прогиба стержня в точке нагружения:

• при отсутствии диафрагм на концах

$$v_1 = \frac{Fl^3}{48 g_{33}} + \left(\frac{g_{23}}{g_{33}}\right)^2 \frac{Fl}{4C_{сдв}}\left(1 - \frac{\mathrm{th}\,\lambda l/2}{\lambda l/2}\right); \quad (4)$$

• при наличии диафрагм на концах

$$v_2 = \frac{1}{48}\frac{Fl^3}{g_{33}} + \left(\frac{g_{23}}{g_{33}}\right)^2 \frac{Fl}{4C_{сдв}}\left(1 - 2\frac{\mathrm{ch}\,\lambda l/2 - 1}{(\lambda l/2)\,\mathrm{sh}\,\lambda l/2}\right). \quad (5)$$

Представим выражения (4) и (5) следующим образом:

$$\frac{v_1}{v_0} = 1 + \frac{g_{23}^2}{\Delta}\frac{3}{b^2}\left(1 - \frac{\mathrm{th}\,b}{b}\right);$$

$$\frac{v_2}{v_0} = 1 + \frac{g_{23}^2}{\Delta}\frac{3}{b^2}\left(1 - 2\frac{\mathrm{ch}\,b - 1}{b\,\mathrm{sh}\,b}\right),$$

где v_0 — прогиб стержня в точке приложения силы по теории балок Эйлера — Бернулли,

$$v_0 = \frac{1}{48}\frac{Fl^3}{g_{33}};$$

b — параметр длины стержня, $b = \lambda l/2$.

Отметим, что при большом росте жесткости заполнителя ($C_{сдв} \to \infty$, $\lambda \to \infty$) прогиб стремится к значению v_0 по теории Эйлера — Бернулли.

Введем второй безразмерный параметр $a = g_{23}^2/\Delta$. Для симметричных по строению слоев конструкций с легким заполнителем, где можно принять $D_3 = 0$, второй безразмерный параметр

$$a = \frac{K_1^2}{B_1 D_1 - K_1^2}.$$

В этом случае его значение зависит только от безразмерной толщины $t_i = h_i/h$, где i — номер слоя. В симметричных стержнях безразмерные толщины первого слоя t_1 и заполнителя t_3 связаны соотношением

$$2t_1 + t_3 = 1, \quad (6)$$

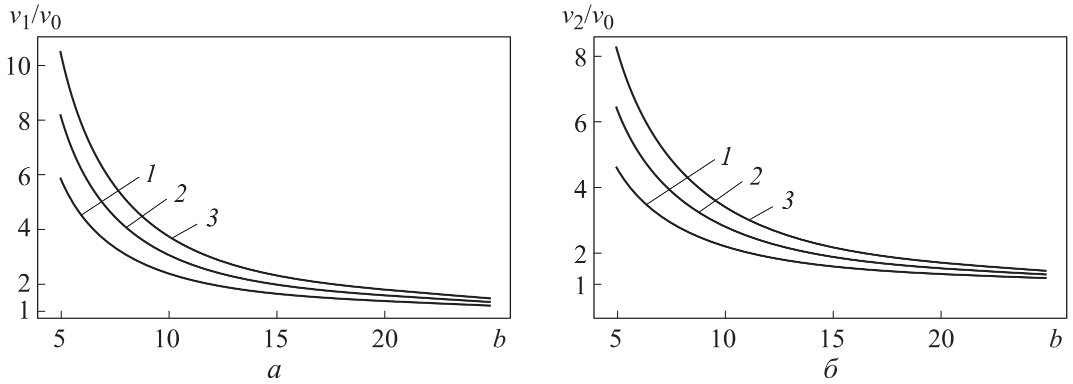

Рис. 5. Зависимости прогибов трехслойного стержня v_1/v_0 (*а*) и v_2/v_0 (*б*) от параметра длины b при параметре a = 50 (*1*), 75 (*2*) и 100 (*3*)

поэтому $a = 3[(1+t_3)/(1-t_3)]^2$. Если $t_3 \to 1$, то $a \to \infty$, что соответствует случаю, когда весь объем стержня занимает заполнитель с нулевой изгибной жесткостью. Прогибы стержня неограниченно возрастают.

Зависимости прогибов трехслойного стержня v_1/v_0 и v_2/v_0 от безразмерных параметров длины b и a приведены на рис. 5. Как, и следовало ожидать, наибольшее влияние сдвигов на прогибы наблюдается у высоких коротких стержней.

Формулы (4) и (5) позволяют найти сдвиговую жесткость заполнителя по полученным в эксперименте на трехточечный изгиб стержня значениям прогиба v^{exp}. Если считать, что изгибные жесткости стержня g_{22}, g_{23}, g_{33} определены без учета жесткости заполнителя по значениям модулей несущих слоев E_1 и E_2, известным из предварительных испытаний на растяжение, то можно получить простую формулу расчета сдвиговой жесткости заполнителя.

Например, жесткость для стержня без диафрагм на торцах можно определить, упростив формулу (4). Для достаточно длинных стержней отношение $\operatorname{th} b/b$ является малой величиной по сравнению с единицей, поэтому жесткость заполнителя

$$C_{\text{сдв}} = \left(\frac{g_{23}}{g_{33}}\right)^2 \frac{Fl}{4(v^{exp} - v_0)}.$$

Если нельзя считать, что $\operatorname{th} b/b \approx 0$, то уравнение (4) позволяет, задаваясь величиной $C_{\text{сдв}}$, найти прогиб, а затем построить зависимость сдвиговой жесткости заполнителя от прогиба по экспериментальному значению последнего.

В качестве еще одного варианта расчетно-экспериментального определения сдвиговой жесткости заполнителя можно использовать результаты модального анализа. Исследуем влияние жесткости заполнителя $C_{\text{сдв}}$ на частоту собственных колебаний шарнирно опертого стержня. Предположим, что диафрагмы на торцах стержня отсутствуют, и сдвиги разрешены. В этом случае удается наиболее просто получить аналитическое решение (что важно при поиске жесткости) и установить зависимость частоты собственных колебаний от параметров трехслойного стержня.

Рассматривая свободные колебания, сведем систему (1) к двум уравнениям относительно прогиба и угла сдвига в заполнителе

$$g_{33}\frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - g_{32}\frac{\partial^3 \gamma}{\partial z^3} + m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0;$$
$$g_{22}\frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} - C_{\text{сдв}}\gamma - g_{23}\frac{\partial^3 v}{\partial z^3} = 0.$$

Предполагаемые условия закрепления стержня будут учтены, если принять

$$v = A\sin\left(k\pi z/l\right)\cos pt,\ \ \gamma = B\cos\left(k\pi z/l\right)\cos pt,$$

где A, B — амплитудные значения прогибов и углов сдвига; k — номер гармоники;

Частоты собственных колебаний стержня определяются как корни определителя

$$\begin{vmatrix} g_{33}\left(k\pi/l\right)^4 - mp^2 & -g_{32}\left(k\pi/l\right)^3 \\ -g_{23}\left(k\pi/l\right)^3 & g_{22}\left(k\pi/l\right)^2 + C_{\text{сдв}} \end{vmatrix} = 0.$$

Тогда

$$p_k = k^2 p_0 \sqrt{1 - \frac{\alpha}{1+\beta/\left(k\pi\right)^2}}, \qquad (7)$$

где p_0 — частота основного тона колебаний, вычисленная по теории Эйлера — Бернулли,

$$p_0 = \pi^2\sqrt{g_{33}/(ml^4)};$$

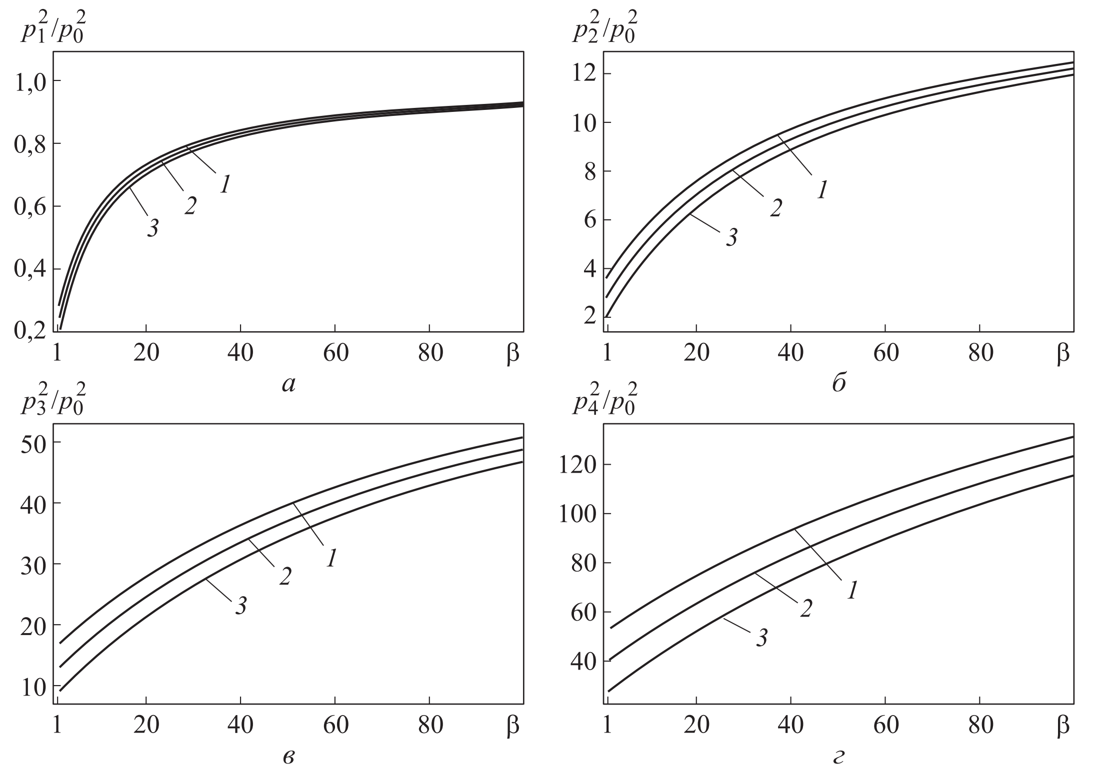

Рис. 6. Зависимости первой p_1^2/p_0^2 (*а*), второй p_2^2/p_0^2 (*б*), третьей p_3^2/p_0^2 (*в*) и четвертой p_4^2/p_0^2 (*г*) частот трехслойного стержня от относительной жесткости заполнителя β при параметре α = 0,80 (*1*), 085 (*2*) и 0,90 (*3*)

α, β — безразмерные параметры стержня,

$$\alpha = \frac{g_{23}^2}{g_{22} g_{33}}; \quad \beta = \frac{C_{сдв}\, l^2}{g_{22}}.$$

Значение сдвиговой жесткости заполнителя влияет на безразмерный параметр β. С ростом жесткости и, следовательно, параметра β частота p_k, определяемая выражением (7), приближается к значению по теории Эйлера — Бернулли $k^2 p_0$.

Определим границы изменения параметра α. Для стержня с симметричным строением слоев и легким заполнителем можно принять, что $g_{22} = 2B_1c^2$, $g_{23} = 2K_1c$ и $g_{33} = 2D_1$. В этом случае $\alpha = K_1^2 \big/ B_1 D_1$ зависит только от безразмерных толщин. Используя выражение (6), получаем

$$\alpha = \frac{3}{4}\frac{\left(1+t_3\right)^2}{\left(1+t_3+t_3^2\right)}.$$

Таким образом, при $t_3 \in (0,1)$ параметр $\alpha \in (0{,}75, 1)$, а параметр β может принимать любые значения.

Зависимости частот трехслойного стержня от относительной жесткости заполнителя при сдвиге β для различных значений параметра α приведены на рис. 6. Эти зависимости можно использовать для определения $C_{сдв}$ по экспериментально найденным частотам p_{exp}.

Как и в задаче идентификации сдвиговой жесткости заполнителя $C_{сдв}$ по испытаниям на трехточечный изгиб, будем полагать, что механические характеристики g_{22}, g_{23}, g_{33} известны. Используя формулу (7), выражаем сдвиговую жесткость заполнителя через первую частоту изгибных колебаний стержня

$$C_{сдв} = \frac{\pi^2 g_{22}}{l^2}\left(\frac{\alpha}{1 - p_{exp}^2 / p_0^2} - 1\right).$$

Выводы

1. Приведены результаты определения частот собственных колебаний трехслойного стержня с легким заполнителем аналитическим методом с использованием приближенной технической теории Э.И. Григолюка — П.П. Чулкова и МКЭ по двумерной модели плоской задачи теории упругости. Показано, что для низших форм собственных колебаний техническая теория изгиба трехслойного стержня дает результаты, практически совпадающие с решениями задачи теории упругости.

2. Исследовано влияние сдвиговой жесткости заполнителя на прогибы и частоты соб-

ственных колебаний трехслойного стержня. Рассмотрена задача идентификации сдвиговой жесткости заполнителя по результатам возможных испытаний. Приведены формулы для определения сдвиговой жесткости заполнителя через значения прогибов при испытаниях стержня на трехточечный изгиб или через частоты основного тона его поперечных колебаний при динамических испытаниях.

Литература

[1] Saito T., Parbery R.D., Okuno S. et al. Parameter identification for aluminum honeycomb sandwich panels based on orthotropic Timoshenko beam theory. *J. Sound Vib.*, 1997, vol. 208, no. 2, pp. 271–287, doi: https://doi.org/10.1006/jsvi.1997.1189

[2] Shi Y., Sol H., Hua H. Material parameter identification of sandwich beams by an inverse method. *J. Sound Vib.*, 2006, vol. 290, no. 3–5, pp. 1234–1255, doi: https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.05.026

[3] Aoki Y., Maysenhölder W. Experimental and numerical assessment of the equivalent-orthotropic-thin-plate model for bending of corrugated panels. *Int. J. Solids Struct.,* 2017, vol. 108, pp. 11–23, doi: https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.07.042

[4] Нихамкин М.Ш., Соломонов Д.Г. Применение экспериментального модального анализа для идентификации параметров модели слоистого углепластика. *Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника*, 2017, № 51, с. 124–135, doi: https://doi.org/10.15593/2224-9982/2017.51.12

[5] Нихамкин М.Ш., Соломонов Д.Г., Зильбершмидт В.В. Идентификация характеристик упругости композита по экспериментальным данным о модальных характеристиках образцов. *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2019, № 1, с. 110–122, doi: https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.1.09

[6] Каюмов Р.А., Луканкин С.А., Паймушин В.Н. и др. Идентификация механических характеристик армированных волокнами композитов. *Ученые записки Казанского университета. Сер. Физико-математические науки*, 2015, т. 157, № 4, с. 112–132.

[7] Прокудин О.А., Соляев Ю.О., Бабайцев А.В. и др. Динамические характеристики трехслойных балок с несущими слоями из алюмостеклопластика. *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2020, № 4, с. 260–270, doi: https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.4.22

[8] Григолюк Э.И., Чулков П.П. *Устойчивость и колебания трехслойных оболочек*. Москва, Машиностроение, 1973. 170 с.

[9] Васильев В.В. *Механика многослойных конструкций из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1988. 271 с.

[10] Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. *Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1984. 263 с.

[11] Болотин В.В., Новичков Ю.Н. *Механика многослойных конструкций*. Москва, Машиностроение, 1980. 375 с.

[12] Александров А.Я., Лампер Р.Е., Сувернев В.Г., ред. *Расчеты элементов авиационных конструкций. Трехслойные пластины и оболочки*. Москва, Машиностроение, 1985. 203 с.

[13] Кобелев В.Н., Коварский Л.М., Тимофеев С.И. *Расчет трехслойных конструкций*. Москва, Машиностроение, 1984. 304 с.

[14] Панин В.Ф. *Конструкции с сотовым заполнителем*. Москва, Машиностроение, 1982. 153 с.

[15] Панин В.Ф., Гладков Ю.А. *Конструкции с заполнителем*. Москва, Машиностроение, 1991. 270 с.

References

[1] Saito T., Parbery R.D., Okuno S. et al. Parameter identification for aluminum honeycomb sandwich panels based on orthotropic Timoshenko beam theory. *J. Sound Vib.*, 1997, vol. 208, no. 2, pp. 271–287, doi: https://doi.org/10.1006/jsvi.1997.1189

[2] Shi Y., Sol H., Hua H. Material parameter identification of sandwich beams by an inverse method. *J. Sound Vib.*, 2006, vol. 290, no. 3–5, pp. 1234–1255, doi: https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.05.026

[3] Aoki Y., Maysenhölder W. Experimental and numerical assessment of the equivalent-orthotropic-thin-plate model for bending of corrugated panels. *Int. J. Solids Struct.*, 2017, vol. 108, pp. 11–23, doi: https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.07.042

[4] Nikhamkin M.Sh., Solomonov D.G. Application of experimental modal analysis to identify the parameters of the model of laminated carbon fiber reinforced plastic. *Vestnik PNIPU. Aerokosmicheskaya tekhnika* [PNRPU Aerospace Engineering Bulletin], 2017, no. 51, pp. 124–135, doi: https://doi.org/10.15593/2224-9982/2017.51.12 (in Russ.).

[5] Nikhamkin M.Sh., Solomonov D.G., Zilbershmidt V.V. Identification of elastic parameters of composite using experimental data on modal characteristics of samples. *Vestnik PNIPU. Mekhanika* [PNRPU Mechanics Bulletin], 2019, no. 1, pp. 110–122, doi: https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.1.09 (in Russ.).

[6] Kayumov R.A., Lukankin S.A., Paymushin V.N. et al. Identification of mechanical properties of fiber-reinforced composites. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Ser. Fiziko-matematicheskie nauki*, 2015, vol. 157, no. 4, pp. 112–132. (In Russ.).

[7] Prokudin O.A., Solyaev Yu.O., Babaytsev A.V. et al Dynamic characteristics of three-layer beams with load-bearing layers made of alumino-glass plastic. *Vestnik PNIPU. Mekhanika* [PNRPU Mechanics Bulletin], 2020, no. 4, pp. 260–270, doi: https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.4.22 (in Russ.).

[8] Grigolyuk E.I., Chulkov P.P. *Ustoychivost i kolebaniya trekhsloynykh obolochek* [Stability and oscillations of three-layer shells]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1973. 170 p. (In Russ.).

[9] Vasilyev V.V. *Mekhanika mnogosloynykh konstruktsiy iz kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of multilayer constructions from composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988. 271 p. (In Russ.).

[10] Alfutov N.A., Zinovyev P.A., Popov B.G. *Raschet mnogosloynykh plastin i obolochek iz kompozitsionnykh materialov* [Calculation of multilayer plates and shells from composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1984. 263 p. (In Russ.).

[11] Bolotin V.V., Novichkov Yu.N. *Mekhanika mnogosloynykh konstruktsiy* [Mechanics of multilayer constructions]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1980. 375 p. (In Russ.).

[12] Aleksandrov A.Ya., Lamper R.E., Suvernev V.G., eds. *Raschety elementov aviatsionnykh konstruktsiy. Trekhsloynye plastiny i obolochki* [Calculations of Elements of Aircraft Structures. Three-layer plates and shells]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1985. 203 p. (In Russ.).

[13] Kobelev V.N., Kovarskiy L.M., Timofeev S.I. *Raschet trekhsloynykh konstruktsiy* [Calculation of three-layer structures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1984. 304 p. (In Russ.).

[14] Panin V.F. *Konstruktsii s sotovym zapolnitelem* [Constructions with honeycomb fille]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1982. 153 p. (In Russ.).

[15] Panin V.F., Gladkov Yu.A. *Konstruktsii s zapolnitelem* [Constructions with honeycomb filler]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1991. 270 p. (In Russ.).

Статья поступила в редакцию 03.01.2025

Информация об авторах

БЕЛКИН Александр Ефимович — доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: aefbelkin@bmstu.ru).

БИРЮКОВ Иван Дмитриевич — математик-программист. НТЦ «АПМ» (141070, Королев, Российская Федерация, Октябрьский бульвар, д. 14, e-mail: ivanbir1409@mail.ru).

Information about the authors

BELKIN Alexander Efimovich — Doctor of Science (Eng.), Professor, Department of Applied Mechanics. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: aefbelkin@bmstu.ru).

BIRYUKOV Ivan Dmitrievich — Mathematician programmer. STC «APM» (141070, Korolev, Russian Federation, Oktyabrsky Boulevard, Bldg. 14, e-mail: ivanbir1409@mail.ru).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Белкин А.Е., Бирюков И.Д. Определение сдвиговой жесткости заполнителя трехслойного стержня по известным значениям прогибов или частот собственных колебаний. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2025, № 2, с. 12–22.

Please cite this article in English as:
Belkin A.E., Biryukov I.D. Shear stiffness determination of the three-layer rod based on the deflections or natural frequencies known values. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2025, no. 2, pp. 12–22.