

УДК 539.3

Связанная нестационарная осесимметричная задача термоэлектроупругости для круглой многослойной пластины

Д.А. Шляхин, Е.В. Савинова

Самарский государственный технический университет

Coupled nonstationary axisymmetric problem of the thermal electrical elasticity for a circular multilayer plate

D.A. Shlyakhin, E.V. Savinova

Samara State Technical University

Рассмотрена круглая многослойная пластина, выполненная из упругого и электроупругого (пьезокерамического) материалов, при шарнирном закреплении ее цилиндрической поверхности. Математическая формулировка связанной нестационарной осесимметричной начально-краевой задачи термоэлектроупругости включает в себя несамосопряженные системы дифференциальных уравнений в частных производных, а также граничные условия теплопроводности первого, третьего и четвертого рода. Использование уравнений равновесия накладывает ограничение на скорость изменения внешней нагрузки в виде температуры на верхней лицевой поверхности пластины. Для определенности построенного алгоритма рассмотрена трехслойная электроупругая система. Замкнутое решение построено с помощью метода конечных интегральных преобразований. При проведении процедуры неполного разделения переменных по радиальной переменной применено однокомпонентное преобразование Ханкеля, а по аксиальной координате — новый класс векторных преобразований, основанный на многокомпонентном соотношении биортогональности собственных вектор-функций двух однородных краевых задач. Такие преобразования позволяют построить сопряженный оператор, без которого нельзя решить несамосопряженные линейные краевые задачи. В качестве численного примера выбрана трехслойная конструкция, состоящая из металлической подложки, повышающей прочностные свойства преобразователя, пьезокерамической пластины и теплоизолирующего слоя. Проанализирована зависимость между высотой слоев этой конструкции и электрическим импульсом, определяемым путем подключения электродированных эквипотенциальных поверхностей пьезопластины к измерительному прибору с большим входным сопротивлением. Полученные результаты дают возможность обосновать рациональную программу экспериментов при проектировании тепловых пьезокерамических преобразователей и сократить объем натурных исследований.

EDN: YVZIKO, <https://elibrary/yvziko>

Ключевые слова: задача термоэлектроупругости, связанная задача, круглая многослойная пластина, биортогональное конечное интегральное преобразование

The paper considers a circular multilayer plate made of the elastic and electroelastic (piezoceramic) materials at its cylindrical surface hinged fastening. Mathematical formulation of the coupled nonstationary axisymmetric initial-boundary value problem of the thermal

electrical elasticity includes the not self-adjoint systems of partial differential equations, as well as the thermal conductivity boundary conditions of the first, third, and fourth kind. Using the equilibrium equations imposes a restriction on the rate of external load alteration in the form of temperature on the plate upper front surface. The paper considers a three-layer electroelastic system to ensure definiteness of the constructed algorithm. Using the method of finite integral transformations makes it possible to construct a closed solution. The one-component Hankel transform is applied along the radial variable in carrying out the procedure of the variables incomplete separation; and a new class of vector transforms based on the multicomponent relationship of the eigenvector functions biorthogonality of the two homogeneous boundary value problems is applied along the axial coordinate. Such transforms allow constructing an adjoint operator, without which it is impossible to solve the not self-adjoint linear boundary value problems. A three-layer structure consisting of the metal substrate that increases the transducer strength properties, piezoceramic plate and heat-insulating layer is selected as the numerical example. The paper analyzes relationship between this structure layers height and the electric pulse determined by connecting the piezoelectric plate electroded equipotential surfaces to a measurement device with the high input resistance. The obtained results make it possible to justify a rational program of experiments in the design and development of the thermal piezoceramic transducers and to reduce the volume of the full-scale research.

EDN: YVZIKO, <https://elibrary/yvziko>

Keywords: thermal electrical elasticity problem, coupled problem, circular multilayer plate, biorthogonal finite integral transformation

В целях повышения функциональных возможностей пьезокерамических преобразователей [1–3], работающих в условиях нестационарного неравномерного температурного нагрева, применяются многослойные конструкции. Для описания их работы созданы различные математические модели теории термоэлектروупругости однородных тел [4–6], в которых расчетные соотношения представлены системами несамосопряженных дифференциальных уравнений, что существенно усложняет процедуру интегрирования в случае построения замкнутых решений начально-краевых задач.

Чтобы решить эту проблему, исследователи используют различные подходы, в частности изучают несвязанные задачи [7–15] или анализируют расчетные схемы с вырожденной геометрией [16–26]. Так, в работах [7–13, 24, 25] рассмотрены стационарные задачи для длинного электроупругого цилиндра, полый сферы и тонкостенной оболочки, а исследования [14, 15] связаны с определением температурного поля в пьезокерамической круглой пластине.

В публикациях [16–19] проанализирована работа электроупругого слоя при тепловом ударе, в статьях [20, 21] — нестационарные термоэлектроупругие поля в длинном полом цилиндре. Бесконечная пьезокерамическая пластина с эллиптическими включениями — трещинами в условиях действия теплового потока рассмотрена в трудах [22, 23]. Анализ рас-

пространения волн Рэлея в пьезоэлектрической среде при постоянной температуре поверхности тела проведен в работе [26].

На основании обобщения полученных решений для однородных тел сформулированы и построены решения для многослойных конструкций. В частности, найдено решение для слоистых композитных пластин с пьезоэлектрическими накладками [27]. Исследована возможность расслоения электроупругой системы при действии внешних термоэлектроупругих нагрузок [28].

Существует и другой подход, позволяющий повысить эффективность преобразователей энергии, связанный с использованием функционально-градиентных композитов, где характеристики материала меняются по пространственным переменным [29–31]. В частности, проанализировано влияние теплового удара на конструкцию [30], определены неоднородные характеристики материала конечного термоупругого тела [29, 30].

Цель работы — построение нового замкнутого решения связанной нестационарной осесимметричной задачи термоэлектроупругости для шарнирно закрепленной круглой многослойной пьезокерамической пластины.

Введение ограничения по толщине и скорости изменения температуры на лицевой поверхности пластины [15] позволило не учитывать инерционные характеристики системы.

При разработке алгоритма использованы решения связанных нестационарных краевых задач термоупругости [32] и термоэлектроупругости [33] для однородной круглой пластины, которые позволили точно учесть влияние нестационарного температурного поля на ее напряженно-деформированное состояние.

Постановка задачи. Круглая многослойная пьезокерамическая пластина занимает в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z_*) область (рис. 1)

$$\Omega: \{0 \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z_* \leq h^*\}.$$

Предлагаемый алгоритм справедлив для конструкции с произвольным количеством слоев. Для определенности построенного решения пластина принята трехслойной, где центральный слой выполнен из пьезокерамического аксиально поляризованного материала, а два других — из изотропного материала с различными физико-механическими характеристиками.

Толщина пластины

$$h^* = \sum_{i=1}^3 h_j^*,$$

где j — номер слоя.

Цилиндрическая поверхность электроупругой системы шарнирно закреплена: отсутствуют вертикальные перемещения и нормальные напряжения.

Рассмотрим случай изменения температур $\omega_1^*(r_*, t_*)$ и $\omega_2^*(t_*)$ на верхней ($z_* = 0$) лицевой и цилиндрической ($r_* = b$) поверхностях пластины при заданной температуре внешней среды ϑ^* на нижней ($z_* = h^*$) плоскости. Электродированные поверхности пластины подключены к измерительному прибору, причем ее нижняя ($z_* = h_1^* + h_2^*$) плоскость заземлена (рис. 1).

Системы дифференциальных осесимметричных уравнений рассматриваемой задачи термоэлектроупругости в безразмерной форме для пьезокерамического аксиально поляризованного материала с гексагональной кристал-

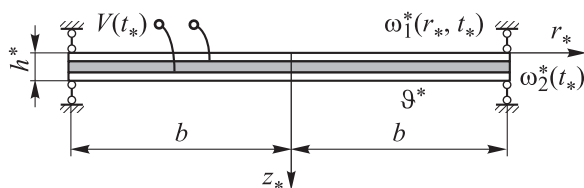


Рис. 1. Расчетная схема многослойной круглой пластины

лической решеткой состава 6 mm ($j=2$) и упругого изотропного материала ($j=1$ и 3) имеют следующий вид [34–36]:

для пьезокерамического материала

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} \nabla U + a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_2 \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} + a_3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} - \frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0; \\ a_1 \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + a_4 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_2 \nabla \frac{\partial U}{\partial z} + a_5 \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \\ + a_6 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - a_7 \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0; \\ -\nabla \frac{\partial \varphi}{\partial r} - a_8 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + a_9 \nabla \frac{\partial U}{\partial z} + a_{10} \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + \\ + a_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_{12} \nabla \Theta + a_{13} \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0; \\ \nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - \\ - \frac{\partial}{\partial t} \left[\Theta + a_{14} \left(\nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} \right) - a_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] = 0; \end{cases} \quad (1)$$

для изотропного материала

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} \nabla U + b_1^{(j)} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + b_2^{(j)} \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} - b_3^{(j)} \frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0; \\ b_1^{(j)} \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + b_2^{(j)} \frac{\partial}{\partial z} \nabla U - b_3^{(j)} \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0; \\ \nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left[b_4^{(j)} \Theta + b_5^{(j)} \left(\nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right] = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}; \quad \{U, W, r, z\} = \frac{\{U^*, W^*, r_*, z_*\}}{b};$$

$$a_1 = \frac{C_{55}}{C_{11}}; \quad a_2 = \frac{C_{13} + C_{55}}{C_{11}}; \quad a_3 = \frac{e_{15} + e_{31}}{e_{31}};$$

$$\varphi = \frac{e_{31}}{C_{11}b} \varphi^*; \quad \Theta = \frac{\gamma_{11}}{C_{11}} \Theta^*; \quad a_4 = \frac{C_{33}}{C_{11}}; \quad a_5 = \frac{e_{15}}{e_{31}};$$

$$a_6 = \frac{e_{33}}{e_{31}}; \quad a_7 = \frac{\gamma_{33}}{\gamma_{11}}; \quad a_8 = \frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{11}};$$

$$a_9 = \frac{e_{31}(e_{15} + e_{31})}{C_{11}\epsilon_{11}}; \quad a_{10} = \frac{e_{15}e_{31}}{C_{11}\epsilon_{11}}; \quad a_{11} = a_{10} \frac{e_{33}}{e_{15}};$$

$$a_{12} = \frac{g_{11}e_{31}}{\gamma_{11}\epsilon_{11}}; \quad a_{13} = a_{12} \frac{g_{33}}{g_{11}}; \quad t = \frac{\Lambda^{(2)}}{k^{(2)}b^2} t_*;$$

$$a_{14} = T_0 \frac{\gamma_{11}\gamma_{33}}{C_{11}k^{(2)}}; \quad a_{15} = T_0 \frac{g_{33}\gamma_{11}}{e_{31}k^{(2)}}; \quad b_1^{(j)} = \frac{1 - 2\nu^{(j)}}{2(1 - \nu^{(j)})};$$

$$b_2^{(j)} = \frac{1}{2(1 - \nu^{(j)})}; \quad b_3^{(j)} = \frac{C_{11}\gamma^{(j)}(1 + \nu^{(j)})(1 - 2\nu^{(j)})}{E^{(j)}\gamma_{11}(1 - \nu^{(j)})};$$

$$b_4^{(j)} = \frac{k^{(j)} \Lambda^{(2)}}{k^{(2)} \Lambda^{(j)}}; \quad b_5^{(j)} = T_0 \frac{\gamma_{11} \gamma^{(j)}}{k^{(j)} C_{11}} b_4^{(j)},$$

где $U^*(r_*, z_*, t_*)$, $W^*(r_*, z_*, t_*)$, $\varphi^*(r_*, z_*, t_*)$ и $\Theta^*(r_*, z_*, t_*)$ — компоненты вектора перемещений, потенциал электрического поля и приращение температуры в размерной форме соответственно, $\Theta^* = T - T_0$ (T и T_0 — текущая и начальная температура пластины); C_{ms} , e_{ms} , ϵ_{ss} , γ_{ss} и g_{ss} — модули упругости, пьезомодули, коэффициенты диэлектрической проницаемости, компоненты тензора температурных напряжений и пироккоэффициенты электроупругого анизотропного материала, $\gamma_{ss} = C_{ss} \alpha_t^{(2)}$, $m, s = 1, 5$; $v^{(j)}$, $\gamma^{(j)}$ и $E^{(j)}$ — коэффициент Пуассона, температурное напряжение и модуль упругости изотропного материала соответственно, $\gamma^{(j)} = E^{(j)} (1 - 2\nu^{(j)})^{-1} \alpha_t^{(j)}$ ($\alpha_t^{(j)}$ — коэффициент линейного температурного расширения); $\Lambda^{(j)}$ и $k^{(j)}$ — коэффициенты теплопроводности и объемной теплоемкости.

Краевые условия определяются следующими соотношениями:

$$r = 0, \quad r = 1 \rightarrow \{U, W, \varphi, \Theta\}_{|r=0} < \infty, \quad (3)$$

$$W_{|r=1} = 0, \quad \Theta_{|r=1} = \omega_2;$$

для пьезокерамического материала $\varphi_{|r=1} = 0$,

$$\sigma_{rr} = 0 \rightarrow \left[\frac{\partial U}{\partial r} + a_{17} \frac{U}{r} + a_{16} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \Theta \right]_{|r=1} = 0;$$

для изотропного материала

$$\sigma_{rr} = 0 \rightarrow \left(b_6^{(j)} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{\partial W}{\partial z} - b_3^{(j)} \Theta \right)_{|r=1} = 0;$$

$$z = 0 \rightarrow \nabla U + b_6^{(1)} \frac{\partial W}{\partial z} = b_3^{(1)} b_6^{(1)} \omega_1; \quad (4)$$

$$\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0; \quad \Theta = \omega_1;$$

$$z = h_1, \quad z = h_1 + h_2 \rightarrow \{U, W, \Theta\}_{|-z} = \{U, W, \Theta\}_{|+z}, \quad (5)$$

$$\varphi_{|z=h_1} = \varphi_0, \quad \varphi_{|z=h_1+h_2} = 0;$$

$$\sigma_{zz|+z} = \sigma_{zz|-z} \rightarrow \left[a_{16} \nabla U + a_4 \frac{\partial W}{\partial z} + a_6 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - a_7 \Theta \right]_{|-z} =$$

$$= \left[\frac{b_8^{(j)}}{b_3^{(j)} b_6^{(j)}} \left(\nabla U + b_6^{(j)} \frac{\partial W}{\partial z} \right) - b_8^{(j)} \Theta \right]_{|+z};$$

$$\sigma_{rz|+z} = \sigma_{rz|-z} \rightarrow \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)_{|-z} =$$

$$= b_9^{(j)} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)_{|+z},$$

$$-\Lambda^{(j)} \frac{\partial \Theta}{\partial z}_{|-z} = -\Lambda^{(2)} \frac{\partial \Theta}{\partial z}_{|+z};$$

$$z = h \rightarrow \nabla U + b_6^{(3)} \frac{\partial W}{\partial z} - b_3^{(3)} b_6^{(3)} \Theta = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z} + b_7 \Theta = b_7 \vartheta;$$

$$t = 0 \rightarrow \{U, W, \varphi, \Theta\} = 0. \quad (7)$$

Здесь

$$a_{17} = \frac{C_{12}}{C_{11}}; \quad a_{16} = \frac{C_{13}}{C_{11}}; \quad b_6^{(j)} = \frac{1 - \nu^{(j)}}{\nu^{(j)}};$$

$$b_7 = \alpha \frac{b}{\Lambda^{(3)}}; \quad b_8^{(j)} = \frac{\gamma^{(j)}}{\gamma_{11}}; \quad b_9^{(j)} = \frac{E^{(j)}}{2C_{55}(1 + \nu^{(j)})};$$

$$\{h, h_j\} = \frac{\{h^*, h_j^*\}}{b};$$

$$\{\omega_1, \omega_2, \vartheta\} = \frac{\gamma_{11}}{C_{11}} [\{\omega_1^*, \omega_2^*, \vartheta^*\} - T_0];$$

$$\varphi_0(t) = \frac{e_{31}}{C_{11}b} \varphi_0^*(t),$$

где α — коэффициент теплоотдачи; $\varphi_0^*(t)$ — потенциал, индуцируемый на верхней лицевой электропроводной поверхности пластины в результате ее деформирования и определяемый в процессе решения задачи.

Первые два соотношения (4), (6) определяют отсутствие механических напряжений, а последнее равенство (6) учитывает конвекционный теплообмен лицевой поверхности с внешней средой. Выражения (5) являются условиями совместности перемещений, напряжений, температуры и идеального теплового контакта на поверхности жесткого соединения слоев. Условия (7) предполагают, что при $t = 0$ конструкция находится в недеформированном состоянии, а ее температурное поле определяется абсолютной температурой T_0 . Кроме того, без большой погрешности вследствие аксиальной поляризации пьезокерамического материала принято условие $\varphi_{|r=1} = 0$.

В случае подключения электродов к измерительному прибору с большим входным сопротивлением для определения функции $\varphi_0^*(t)$ использовано дополнительное интегральное условие

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{(S)} D_{z|z=h_1} dS = 0, \quad (8)$$

где S — площадь пластины; D_z — аксиальная компонента вектора индукции.

Построение общего решения. На первом этапе исследования будем применять интегральное преобразование Ханкеля [37]. В этом случае точное решение в обычных функциях Бесселя можно получить при выполнении только в граничных условиях (3) следующих соотношений: $C_{11} = C_{12}$ для пьезокерамического материала и $\nu^{(j)} = 0,5$ для изотропного. В других областях конструкции эти равенства не учитываем.

Для преобразования неоднородного граничного условия (3) в однородное воспользуемся новыми функциями $\Phi(r, z, t)$ и $u(r, z, t)$:

$$\begin{aligned} \Theta(r, z, t) &= \omega_2(t) + \Phi(r, z, t); \\ U(r, z, t) &= \frac{r}{2} \omega_2(t) + u(r, z, t). \end{aligned} \quad (9)$$

После подстановки формулы (9) в выражения (1)–(7) получаем новую задачу относительно параметров u, W, φ, Φ , для решения которой применяем преобразование Ханкеля:

$$\begin{aligned} u_H(n, z, t) &= \int_0^1 u(r, z, t) r J_1(j_n r) dr; \\ \{w_H(n, z, t), \varphi_H(n, z, t), \Theta_H(n, z, t)\} &= \\ &= \int_0^1 \{w(r, z, t), \varphi(r, z, t), \Phi(r, z, t)\} r J_0(j_n r) dr; \\ u(r, z, t) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_H(n, z, t)}{J_1(j_n)^2} J_1(j_n r); \quad (10) \\ \{w(r, z, t), \varphi(r, z, t), \Phi(r, z, t)\} &= \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{w_H(n, z, t), \varphi_H(n, z, t), \Theta_H(n, z, t)\}}{J_1(j_n)^2} J_0(j_n r), \end{aligned}$$

где j_n — положительные нули функции $J_0(j_n)$; $J_\nu(\dots)$ — функции Бесселя первого рода порядка ν [38].

Тогда в области изображений имеем следующую начально-краевую задачу:

для пьезокерамического материала

$$\begin{aligned} -j_n^2 u_H + a_1 \frac{\partial^2 u_H}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial w_H}{\partial z} + a_3 j_n \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} + \\ + j_n \Theta_H = 0; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} -a_1 j_n^2 w_H + a_4 \frac{\partial^2 w_H}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial u_H}{\partial z} - a_5 j_n^2 \varphi_H + \\ + a_6 \frac{\partial^2 \varphi_H}{\partial z^2} - a_7 \frac{\partial \Theta_H}{\partial z} = 0; \\ j_n^2 \varphi_H - a_8 \frac{\partial^2 \varphi_H}{\partial z^2} + a_9 j_n \frac{\partial u_H}{\partial z} - a_{10} j_n^2 w_H + \\ + a_{11} \frac{\partial^2 w_H}{\partial z^2} + a_{12} j_n \Theta_H + a_{13} \frac{\partial \Theta_H}{\partial z} = F_{1H}; \\ -j_n^2 \Theta_H + \frac{\partial^2 \Theta_H}{\partial z^2} - \\ - \frac{\partial}{\partial t} \left[\Theta_H + a_{14} \left(j_n u_H + \frac{\partial w_H}{\partial z} \right) - a_{15} \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} \right] = F_{2H}; \end{aligned}$$

для изотропного материала

$$\begin{aligned} -j_n^2 u_H + b_1^{(j)} \frac{\partial^2 u_H}{\partial z^2} - b_2^{(j)} j_n \frac{\partial w_H}{\partial z} + b_3^{(j)} j_n \Theta_H = 0; \quad (12) \\ -b_1^{(j)} j_n^2 w_H + \frac{\partial^2 w_H}{\partial z^2} + b_2^{(j)} j_n \frac{\partial u_H}{\partial z} - b_3^{(j)} \frac{\partial \Theta_H}{\partial z} = 0; \\ -j_n^2 \Theta_H + \frac{\partial^2 \Theta_H}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left[b_4^{(j)} \Theta_H + b_5^{(j)} \left(j_n u_H + \frac{\partial w_H}{\partial z} \right) \right] = \\ = F_{3H}^{(j)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z = 0 \rightarrow j_n u_H + b_6^{(1)} \frac{\partial w_H}{\partial z} = B_{1H}; \\ \frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H = 0; \quad \Theta_H = B_{2H}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} z = h_1, z = h_1 + h_2 \rightarrow \{u_H, w_H, \Theta_H\}_{|z=} = \\ = \{u_H, w_H, \Theta_H\}_{|z=}; \quad (14) \\ \varphi_H|_{z=h_1} = \varphi_{0H}; \quad \varphi_H|_{z=h_1+h_2} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[a_{16} j_n u_H + a_4 \frac{\partial w_H}{\partial z} + a_6 \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} - a_7 \Theta_H \right]_{|z=} - \\ - \left[\frac{b_8^{(j)}}{b_3^{(j)} b_6^{(j)}} \left(j_n u_H + b_6^{(j)} \frac{\partial w_H}{\partial z} \right) - b_8^{(j)} \Theta_H \right]_{|z=} = B_{3H}; \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H \right)_{|z=} = b_9^{(j)} \left(\frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H \right)_{|z=};$$

$$-\Lambda^{(j)} \frac{\partial \Theta_H}{\partial z} \Big|_{z=} = -\Lambda^{(2)} \frac{\partial \Theta_H}{\partial z} \Big|_{z=};$$

$$\begin{aligned} z = h \rightarrow j_n u_H + b_6^{(3)} \frac{\partial w_H}{\partial z} - b_3^{(3)} b_6^{(3)} \Theta_H = B_{4H}; \\ \frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H = 0; \quad \frac{\partial \Theta_H}{\partial z} + b_7 \Theta_H = B_{5H}; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} t=0 \rightarrow u_H = u_{0H}; \\ \{w_H, \varphi_H\} = 0; \quad \Theta_H = \Theta_{0H}, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} & \{F_{1H}, F_{2H}, F_{3H}^{(j)}, B_{1H} \dots B_{5H}, \varphi_{0H}, \Theta_{0H}\} = \\ & = \int_0^1 \{F_1, F_2, F_3^{(j)}, B_1 \dots B_5, \varphi_0, \Phi_0\} r J_0(j_n r) dr; \\ & u_{0H} = \int_0^1 u_0 r J_1(j_n r) dr; \quad F_1 = -a_{12} r^{-1} \omega_2; \\ & F_2 = (1 + a_{14}) \frac{d\omega_2}{dt}; \quad F_3^{(j)} = (b_4^{(j)} + b_5^{(j)}) \frac{d\omega_2}{dt}; \\ & B_1 = b_3^{(1)} b_6^{(1)} \omega_1 - \omega_2; \quad B_2 = \omega_1 - \omega_2; \\ & B_3 = \left(a_7 - a_{16} + \frac{b_8^{(j)}}{b_3^{(j)} b_6^{(j)}} - b_8^{(j)} \right) \omega_2; \\ & B_4 = (b_3^{(3)} b_6^{(3)} - 1) \omega_2; \quad B_5 = b_7 \vartheta - b_7 \omega_2; \\ & u_0 = -\frac{r}{2} \omega_2(0); \quad \Phi_0 = -\omega_2(0). \end{aligned}$$

Принимая во внимание кусочно-гладкий характер функций $u_H, w_H, \varphi_H, \Theta_H$, и вводя новые функции $U_H, W_H, \varphi_H, \Phi_H$, приводим условия (13)–(15) к однородным

$$\begin{aligned} u_H(n, z, t) &= \sum_{j=1}^3 P_1^{(j)}(n, z, t) X^{(j)}(z) + U_H(n, z, t); \quad (17) \\ w_H(n, z, t) &= \sum_{j=1}^3 P_2^{(j)}(n, z, t) X^{(j)}(z) + W_H(n, z, t); \\ \varphi_H(n, z, t) &= P_3^{(2)}(n, z, t) X^{(2)}(z) + \varphi_H(n, z, t); \\ \Theta_H(n, z, t) &= \sum_{j=1}^3 P_4^{(j)}(n, z, t) X^{(j)}(z) + \Phi_H(n, z, t). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} P_m^{(1)} &= f_m(z) B_{1H}(t) + f_{m+2}(z) B_{3H}(t) \Big|_{z=h_1} + \\ &+ f_{m+4}(z) B_{3H}(t) \Big|_{z=h_1+h_2} + f_{m+6}(z) B_{4H}(t) + \\ &+ f_{m+8}(z) \varphi_0(t); \\ P_m^{(3)} &= f_{m+10}(z) B_{1H}(t) + f_{m+12}(z) B_{3H}(t) \Big|_{z=h_1} + \\ &+ f_{m+14}(z) B_{3H}(t) \Big|_{z=h_1+h_2} + f_{m+16}(z) B_{4H}(t) + \\ &+ f_{m+18}(z) \varphi_0(t), \quad m=1, 2; \\ P_m^{(2)} &= \bar{P}_m^{(2)} + f_{m+32}(z) \varphi_0(t); \\ P_4^{(j)}(n, z, t) &= f_{j+35}(z) B_{2H}(t) + f_{j+38}(z) B_{5H}(t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_m^{(2)} &= f_{m+20}(z) B_{1H}(t) + f_{m+23}(z) B_{3H}(t) \Big|_{z=h_1} + \\ &+ f_{m+26}(z) B_{3H}(t) \Big|_{z=h_1+h_2} + f_{m+29}(z) B_{4H}(t), \\ m &= 1, 2, 3; \end{aligned}$$

$$X^{(1)}(z) = H(h_1 - z);$$

$$X^{(2)}(z) = H(z - h_1) - H(z - h_1 - h_2);$$

$$X^{(3)}(z) = H(z - h_1 - h_2),$$

где $f_1(z), \dots, f_{41}(z)$ — дважды дифференцируемые функции; $H(\dots)$ — единичная функция Хэвисайда.

После подстановки (17) в выражения (11)–(16) при выполнении условий

$$z=0 \rightarrow j_n P_1^{(1)} + b_6^{(1)} \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial z} = B_{1H};$$

$$\frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} - j_n P_2^{(1)} = 0; \quad P_4^{(1)} = B_{2H};$$

$$\begin{aligned} z=h_1, z=h_1+h_2 \rightarrow \{P_1^{(2)}, P_2^{(2)}, P_4^{(2)}\} \Big|_{-z} = \\ = \{P_1^{(j)}, P_2^{(j)}, P_4^{(j)}\} \Big|_{+z}; \end{aligned}$$

$$P_3^{(2)} \Big|_{z=h_1} = \varphi_{0H}; \quad P_3^{(2)} \Big|_{z=h_1+h_2} = 0;$$

$$\begin{aligned} & \left[a_{16} j_n P_1^{(2)} + a_4 \frac{\partial P_2^{(2)}}{\partial z} + a_6 \frac{\partial P_3^{(2)}}{\partial z} - a_7 P_4^{(2)} \right] \Big|_{-z} - \\ & - \left[\frac{b_8^{(j)}}{b_3^{(j)} b_6^{(j)}} \left(j_n P_1^{(j)} + b_6^{(j)} \frac{\partial P_2^{(j)}}{\partial z} \right) - b_8^{(j)} P_4^{(j)} \right] \Big|_{+z} = B_{3H}; \\ & \left(\frac{\partial P_1^{(2)}}{\partial z} - j_n P_2^{(2)} \right) \Big|_{-z} = b_9^{(j)} \left(\frac{\partial P_1^{(j)}}{\partial z} - j_n P_2^{(j)} \right) \Big|_{+z}; \\ & \frac{\partial P_4^{(2)}}{\partial z} \Big|_{+z} - \frac{\Lambda^{(j)}}{\Lambda^{(2)}} \frac{\partial P_4^{(j)}}{\partial z} \Big|_{-z} = 0 \quad (j=1, 3); \end{aligned}$$

$$z=h \rightarrow j_n P_1^{(3)} + b_6^{(3)} \frac{\partial P_2^{(3)}}{\partial z} - b_3^{(3)} b_6^{(3)} P_4^{(3)} = B_{4H};$$

$$\frac{\partial P_1^{(3)}}{\partial z} - j_n P_2^{(3)} = 0; \quad \frac{\partial P_4^{(3)}}{\partial z} + b_7 P_4^{(3)} = B_{5H}$$

получаем новую краевую задачу относительно функций U_H, W_H, φ_H и Φ_H .

Эту задачу решаем с помощью биортонормального конечного интегрального преобразования [39] при использовании неизвестных компонент собственных вектор-функций ядер преобразований $K_1(\lambda_{in}, z), \dots, K_4(\lambda_{in}, z)$ и $N_1(\mu_{in}, z), \dots, N_4(\mu_{in}, z)$:

$$G(n, \lambda_{in}, t) = \int_0^h \left[b_{10} \Theta_H + b_{11} \left(j_n U_H + \frac{\partial W_H}{\partial z} \right) - a_{15} \frac{\partial \Phi_H}{\partial z} \right] K_4(\lambda_{in}, z) dz;$$

$$\{U_H, W_H, \Phi_H, \Phi_H\} = \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) \times \frac{\{N_1(\mu_{in}, z), N_2(\mu_{in}, z), N_3(\mu_{in}, z), N_4(\mu_{in}, z)\}}{\|K_{in}\|^2}; \quad (18)$$

$$\|K_{in}\|^2 = \int_0^h K_4(\lambda_{in}, z) N_4(\mu_{in}, z) dz;$$

$$\{b_{10}, b_{11}\} = \{b_4^{(1)}, b_5^{(1)}\} X^{(1)} + \{1, a_{14}\} X^{(2)} + \{b_4^{(3)}, b_5^{(3)}\} X^{(3)},$$

где λ_{in} и μ_{in} — собственные значения соответствующих однородных краевых задач относительно сопряженных $K_k(\lambda_{in}, z)$ и инвариантных $N_k(\mu_{in}, z)$ компонент, $k = 1...4$.

Алгоритм решения этой задачи относительно функций U_H , W_H , Φ_H , Φ_H , выражения для компонент преобразований $K_1(\lambda_{in}, z), \dots, K_4(\lambda_{in}, z)$ и $N_1(\mu_{in}, z), \dots, N_4(\mu_{in}, z)$, трансформанты $G(n, \lambda_{in}, t)$, а также стандартизирующие функции $P_m^{(j)}(m = 1...4)$ для изотропного и пьезокерамического материалов получены в работах [15, 32].

Применяя к трансформанте $G(n, \lambda_{in}, t)$ формулы обращения (18), (10) с учетом уравнений (9), (17), получаем следующие окончательные выражения:

$$U(r, z, t) = \frac{r}{2} \omega_2(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_n r)}{J_1(j_n)^2} \times \left[\sum_{j=1}^3 P_1^{(j)}(n, z, t) X^{(j)}(z) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_1(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right];$$

$$W(r, z, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_1(j_n)^2} \left[\sum_{j=1}^3 P_2^{(j)}(n, z, t) X^{(j)}(z) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_2(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right];$$

$$\varphi(r, z, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_1(j_n)^2} \left[P_3^{(2)}(n, z, t) X^{(2)}(z) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_3(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right];$$

$$\Theta(r, z, t) = \omega_2(t) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_1(j_n)^2} \times \left[\sum_{j=1}^3 P_4^{(j)}(n, z, t) X^{(j)}(z) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_4(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right].$$

С учетом заземления нижней лицевой электропроводимой поверхности на основании условия (8) определяем разность потенциалов

$$V(t) = b_0 Q(t),$$

где

$$b_0 = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} j_n^{-2} \left[a_8 \frac{df_{35}(z)}{dz} \Big|_{z=h_1} - \frac{a_{10}}{a_5} j_n f_{33}(h_1) - a_{11} \frac{df_{34}(z)}{dz} \Big|_{z=h_1} \right] \right\}^{-1};$$

$$Q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [j_n J_1(j_n)]^{-1} \left\{ \frac{a_{10}}{a_5} j_n \bar{P}_1^{(2)}(n, h_1, t) + a_{11} \frac{\partial \bar{P}_2^{(2)}(n, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=h_1} - a_8 \frac{\partial \bar{P}_3^{(2)}(n, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=h_1} + a_{13} P_4^{(2)}(n, h_1, t) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{G(\lambda_{in}, n, t)}{\|K_{in}\|^2} \left[\frac{a_{10}}{a_5} j_n N_1(\lambda_{in}, h_1) + a_{11} \frac{dN_2(\lambda_{in}, z)}{dz} \Big|_{z=h_1} - a_8 \frac{dN_3(\lambda_{in}, z)}{dz} \Big|_{z=h_1} + a_{13} N_4(\mu_{in}, h_1) \right] \right\} + \left(\frac{a_{10}}{a_5} + a_{13} \right) \frac{\omega_2(t)}{4}.$$

Результаты исследования. В качестве примера рассмотрена трехслойная пластина ($b = 14 \cdot 10^{-3}$ м), изготовленная из стали ($j = 1$), пьезокерамического материала PZT-4 ($j = 2$) и пластика ($j = 3$), которые имеют следующие физико-механические характеристики [7, 30, 40]:

$$\{C_{11}; C_{12}; C_{13}; C_{33}; C_{55}\} = \{13,9; 7,78; 7,43; 11,5; 2,56\} \cdot 10^{10} \text{ Па};$$

$$\{E^{(1)}; E^{(3)}\} = \{20,0; 0,33\} \cdot 10^{10} \text{ Па};$$

$$\{v^{(1)}; v^{(3)}\} = \{0,28; 0,33\};$$

$$\{\alpha_t^{(1)}; \alpha_t^{(2)}; \alpha_t^{(3)}\} = \{1,2; 0,4; 8,0\} \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1};$$

$$\{\Lambda^{(1)}; \Lambda^{(2)}; \Lambda^{(3)}\} = \{50,0; 1,6; 0,2\} \text{ Вт / (м} \cdot \text{К)};$$

$$\alpha = 5,6 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К});$$

$$\{k^{(1)}; k^{(2)}; k^{(3)}\} = \{3,8; 3,0; 0,23\} \cdot 10^6 \text{ Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К});$$

$$\{\epsilon_{11}; \epsilon_{33}\} = \{6,46; 5,62\} \cdot 10^{-9} \text{ Ф/м};$$

$$\{e_{15}; e_{31}; e_{33}\} = \{12,7; -5,2; 15,1\} \text{ Кл}/\text{м}^2;$$

$$g_{11} = g_{33} = -0,6 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}).$$

Исследован следующий случай изменения температуры $\omega_1^*(r_*, t_*)$ во времени t_* (рис. 2):

$$\omega_1^*(r_*, t_*) = \left(1 - \frac{r_*}{b}\right) T_{\max}^* \times \\ \times \left[\sin\left(\frac{\pi}{2t_{\max}^*} t_*\right) H(t_{\max}^* - t_*) + H(t_* - t_{\max}^*) \right]; \\ \omega_2^*(t_*) = 0,$$

где $T_{\max}^*$ и $t_{\max}^*$ — максимальная температура на верхней лицевой поверхности и соответствующее ей время в размерной форме ($T_{\max}^* = 100^\circ\text{C}$, $t_{\max}^* = 1 \text{ с}$).

Температура внешней среды ϑ^* равна начальной температуре пластины $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ($\vartheta = 0$).

Результаты расчета — изменение разности потенциалов V во времени t , относительной деформации пластины $\partial W(0, z, 10t_{\max}^*)/\partial z$ и приращения температуры $\Theta(0, z, t)$ по аксиальной координате z при толщине пьезокерамического слоя $h_2^* = 10^{-3} \text{ м}$ и различных значениях толщин слоев из металла и пластика — показано на рис. 3 и 4. Данные, приведенные на рис. 4, б, соответствуют установившемуся температурному режиму в пластине: 1 — $t_* = 12t_{\max}^*$; 2 — $t_* = 10t_{\max}^*$; 3 — $t_* = 8t_{\max}^*$.

Изменение во времени t перемещений $W(0, 0, t)$ и разности потенциалов V при толщине слоев $h_1^* = h_2^* = h_3^* = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ и времени, соответствующем максимальной температуре на верхней лицевой поверхности пластины, $t_{\max}^* = 0,1$ и $1,0 \text{ с}$ показано на рис. 5. Видно, что рост скорости изменения температурной нагрузки в начальный момент времени приводит к увеличению перемещений и разности по-

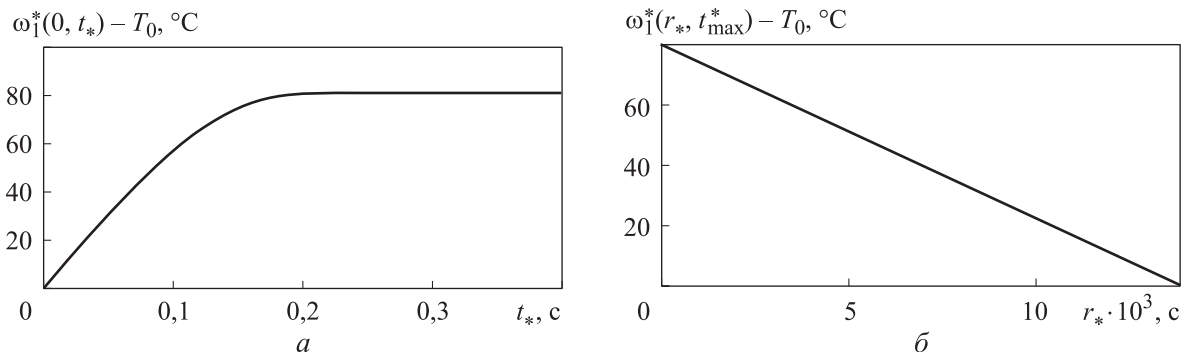


Рис. 2. Изменение температуры $\omega_1^*(0, t_*) - T_0$ во времени t_* (а) и температуры $\omega_1^*(r_*, t_{\max}^*) - T_0$ по радиальной координате r_* (б)

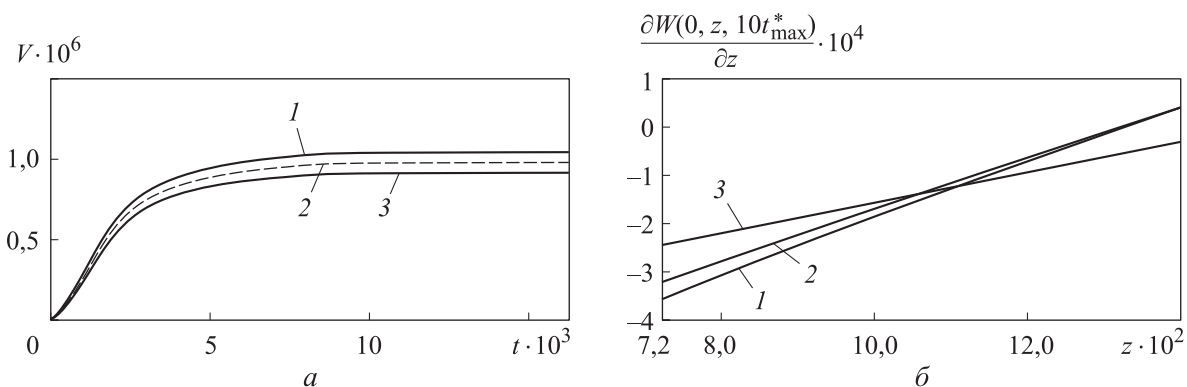


Рис. 3. Изменение разности потенциалов V во времени t (а) и относительной деформации пластины $\partial W(0, z, 10t_{\max}^*)/\partial z$ по аксиальной координате z (б) при толщине пьезокерамического слоя $h_2^* = 10^{-3} \text{ м}$, толщине слоя из пластика $h_3^* = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ и различных значениях толщины металлического слоя:

1 — $h_1^* = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}$; 2 — $h_1^* = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$; 3 — $h_1^* = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}$

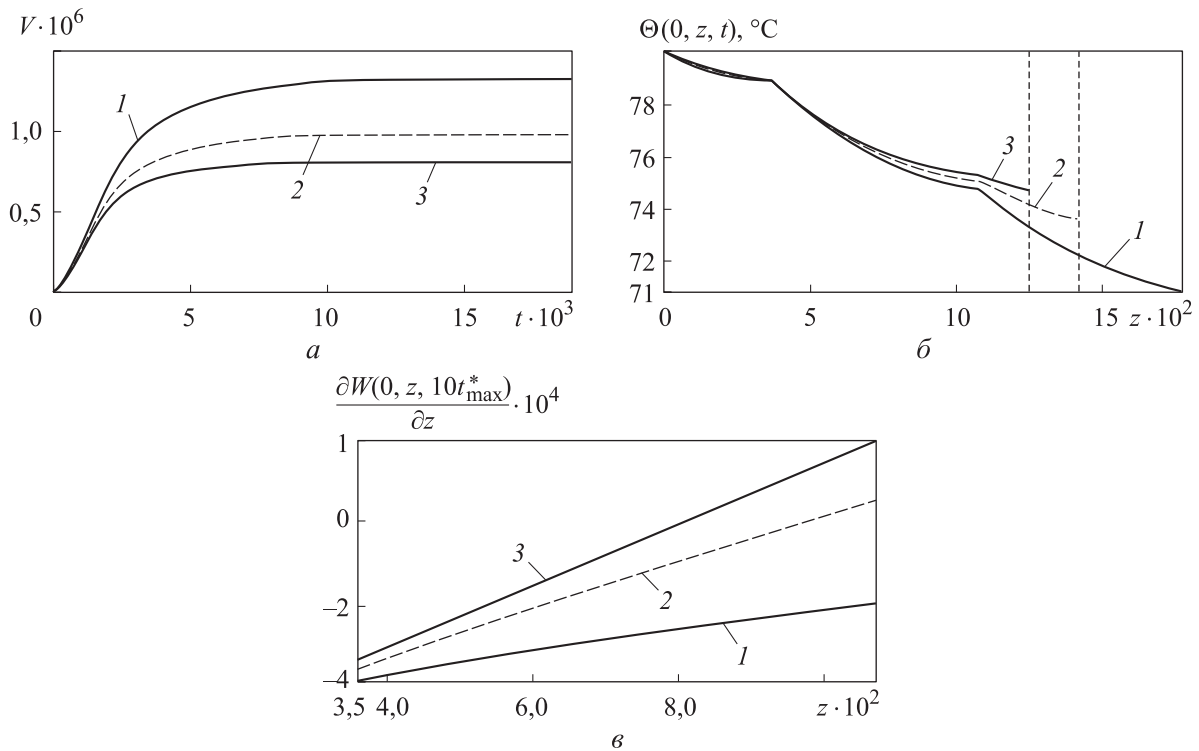


Рис. 4. Изменение разности потенциалов V во времени t (а), приращения температуры $\Theta(0, z, t)$ (б) и относительной деформации пластины $\partial W(0, z, 10t_{\max}^*)/\partial z$ (в) по аксиальной координате z при толщине пьезокерамического слоя $h_2^* = 10^{-3}$ м, толщине металлического слоя $h_1^* = 0,5 \cdot 10^{-3}$ м и различных значениях толщины слоя из пластика:

1 — $h_3^* = 1,0 \cdot 10^{-3}$ м; 2 — $h_3^* = 0,5 \cdot 10^{-3}$ м; 3 — $h_3^* = 0,25 \cdot 10^{-3}$ м

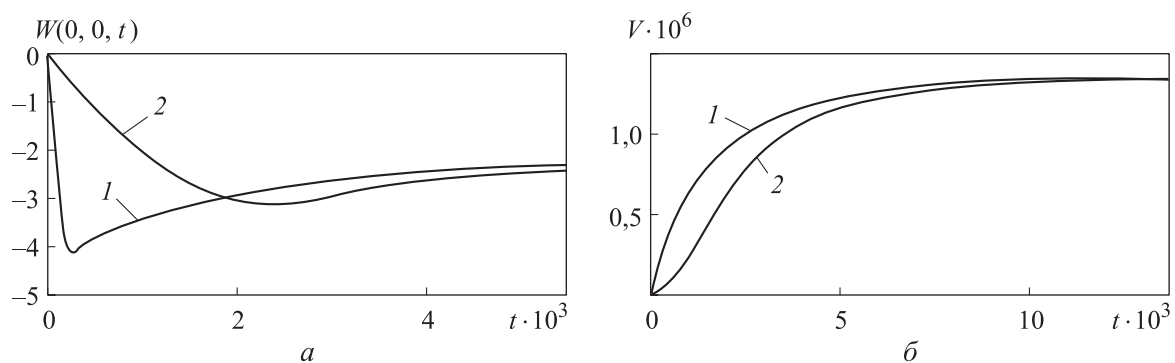


Рис. 5. Изменение перемещений $W(0, 0, t)$ и разности потенциалов V во времени t при толщине слоев $h_1^* = h_2^* = h_3^* = 1 \cdot 10^{-3}$ м и различных значениях времени, соответствующем максимальной температуре на верхней лицевой поверхности пластины:

1 — $t_{\max}^* = 0,1$ с; 2 — $t_{\max}^* = 1,0$ с

тенциалов на первом этапе работы конструкции. При установившемся температурном режиме параметры $W(0, 0, t)$ и $V(t)$ не зависят от величины $\partial \omega_1 / \partial t|_{t=0}$.

Выводы

1. При постоянной толщине слоя из пластика с увеличением толщины металлического слоя происходит рост перемещений и относи-

тельной деформации пластины, что приводит к повышению разности потенциалов.

2. Использование металлической подложки в преобразователях в первую очередь связано с необходимостью повышения их прочностных свойств, так как пьезокерамический материал является хрупким. В рассмотренной конструкции применение слоя из металла также позволяет повысить ее функциональные характеристики.

3. Увеличение толщины теплоизоляционного слоя из пластика при постоянных толщинах металлического и пьезокерамического слоев вызывает уменьшение температуры на нижней поверхности ($z = h_1 + h_2$) пьезокерамического слоя, что повышает относительные деформации при $z = h_1$ и разность потенциалов.

4. Разработанный алгоритм осесимметричной задачи термоэлектростатости для многослойной пластины также справедлив при жестком закреплении ее цилиндрической поверхности и удовлетворении любых линейных граничных условий теплопроводности.

Литература

- [1] Ионов Б.П., Ионов А.Б. Спектрально-статистический подход к бесконтактному измерению температуры. *Датчики и системы*, 2009, № 2, с. 9–12.
- [2] Паньков А.А. Резонансная диагностика распределения температуры пьезоэлектрOLUMИнесцентным оптоволоконным датчиком по решению интегрального уравнения Фредгольма. *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2018, № 2, с. 72–82, doi: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.2.07>
- [3] Казарян А.А. Тонкопленочный датчик давления и температуры. *Датчики и системы*, 2016, № 3, с. 50–56.
- [4] Mindlin R.D. Equations of high frequency vibrations of thermopiezoelectric crystal plates. *Int. J. Solids Struct.*, 1974, vol. 10, no. 6, pp. 625–637, doi: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(74\)90047-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(74)90047-X)
- [5] Lord H. A generalized dynamical theory of thermoelasticity. *J. Elasticity*, 1967, vol. 15, no. 5, pp. 299–309, doi: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(67\)90024-5](https://doi.org/10.1016/0022-5096(67)90024-5)
- [6] Green A.E. Thermoelasticity without energy dissipation. *J. Elasticity*, 1993, no. 31, pp. 189–208, doi: <https://doi.org/10.1007/BF00044969>
- [7] Saadatfar M., Razavi A.S. Piezoelectric hollow cylinder with thermal gradient. *J. Mech. Sci. Technol.*, 2009, vol. 23, no. 1, pp. 45–53, doi: <https://doi.org/10.1007/s12206-008-1002-8>
- [8] Chen W.Q., Shioya T. Piezothermoelastic behavior of a pyroelectric spherical shell. *J. Therm. Stress.*, 2001, no. 24, no. 2, pp. 105–120, doi: <https://doi.org/10.1080/01495730150500424>
- [9] Obata Y., Noda N. Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material. *J. Therm. Stress.*, 1994, no. 17, no. 3, pp. 471–487, doi: <https://doi.org/10.1080/01495739408946273>
- [10] Podil'chuk Y.N. Exact analytical solutions of static electroelastic and thermoelectroelastic problems for a transversely isotropic body in curvilinear coordinate systems. *Int. Appl. Mech.*, 2003, vol. 39, no. 2, pp. 132–170, doi: <https://doi.org/10.1023/A:1023953313612>
- [11] Khorsand M. Dynamic analysis of a functionally graded piezoelectric spherical shell under mechanical and thermal shocks. *J. Mech. Eng. Sci.*, 2014, vol. 228, no. 4, pp. 632–645, doi: <https://doi.org/10.1177/0954406213489445>
- [12] Akbarzadeh A.H., Babaei M.H., Chen Z.T. The thermo-electromagnetoelastic behavior of a rotating functionally graded piezoelectric cylinder. *Smart Mater. Struct.*, 2011, vol. 20, no. 6, art. 065008, doi: <https://doi.org/10.1088/0964-1726/20/6/065008>
- [13] Rahimi G.H., Arefi M., Khoshgoftar M.J. Application and analysis of functionally graded piezoelectrical rotating cylinder as mechanical sensor subjected to pressure and thermal loads. *Appl. Math. Mech.*, 2011, vol. 32, no. 8, pp. 997–1008, doi: <https://doi.org/10.1007/s10483-011-1475-6>
- [14] Shlyakhin D.A., Kalmova M.A. Uncoupled problem of thermoelectroelasticity for a cylindrical shell. In: XXX Russian-Polish-Slovak seminar theoretical foundation of civil engineering (RSP 2021). *Springer*, 2022, pp. 263–271, doi: https://doi.org/10.1007/978-3-030-86001-1_31
- [15] Шляхин Д.А., Савинова Е.В., Юрин В.А. Динамическая задача термоэлектростатости для круглой жестко закрепленной пластины. *Вестник инженерной школы ДВФУ*, 2022, № 1, с. 3–16, doi: <https://doi.org/10.24866/2227-6858/2022-1/3-16>
- [16] Ватульян А.О. Тепловой удар по термоэлектростатическому слою. *Вестник Донского государственного технического университета*, 2001, т. 1, № 1, с. 82–89.

- [17] Shang F., Kuna M., Kitamura T. Theoretical investigation of an elliptical crack in thermopiezoelectric material. Part I: Analytical development. *Theor. Appl. Fract. Mech.*, 2003, vol. 40, no. 3, pp. 237–246, doi: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2003.08.003>
- [18] Kirilyuk V.S. Thermostressed state of a piezoelectric body with a plate crack under symmetric thermal load. *Int. Appl. Mech.*, 2008, vol. 44, no. 3, pp. 320–330, doi: <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0048-8>
- [19] Пряхина О.Д., Смирнова А.В., Самойлов М.В. и др. Учет связанности физических полей в динамических задачах для многослойных сред. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2010, т. 7, № 1, с. 54–60.
- [20] Шляхин Д.А., Кальмова М.А. Нестационарная задача термоэлектроупругости для длинного пьезокерамического цилиндра. *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2021, № 2, с. 181–190, doi: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.2.16>
- [21] Шляхин Д.А., Кальмова М.А. Связанная динамическая осесимметричная задача термоэлектроупругости для длинного полого пьезокерамического цилиндра. *Advanced Engineering Research*, 2022, т. 22, № 2, с. 81–90, doi: <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-2-81-90>
- [22] Калоеров С.А., Глушанков Е.С. Определение термоэлектромагнитоупругого состояния многосвязных кусочно-однородных пьезопластин. *Прикладная механика и техническая физика*, 2018, т. 59, № 6, с. 88–101, doi: <https://doi.org/10.15372/PMTF20180609>
- [23] Qin H.Q. Greens function for thermopiezoelectric plates with holes of various shapes. *Arch. Appl. Mech.*, 1999, vol. 69, pp. 406–418, doi: <https://doi.org/10.1007/s004190050230>
- [24] Фирсанов В.В., Нгуен Л.Х. Напряженно-деформированное состояние произвольных оболочек с учетом термоэлектрического воздействия на основе уточненной теории. *Тепловые процессы в технике*, 2020, т. 12, № 3, с. 110–117, doi: <https://doi.org/10.34759/tpt-2020-12-3-110-117>
- [25] Ishihara M., Ootao Y., Kameo Y. et al. Thermoelastoelectric response of a piezoelectric cylinder with symmetry under axisymmetric mechanical and thermal loading. *Mech. Eng. J.*, 2017, vol. 4, no. 5, pp. 16–00609, doi: <https://doi.org/10.1299/mej.16-00609>
- [26] Gupta V., M.S., B. and Das S. Impact of memory-dependent heat transfer on Rayleigh waves propagation in nonlocal piezo-thermo-elastic medium with voids. *Int. J. Numer. Method H.*, 2024, vol. 34, no. 4, pp. 1902–1926, doi: <https://doi.org/10.1108/HFF-10-2023-0615>
- [27] Куликов Г.М., Плотникова С.В. Управление формой слоистых композитных пластин с пьезоэлектрическими накладками при тепловом нагружении на основе метода отсеченных поверхностей. *Известия РАН. МТТ*, 2021, № 5, с. 45–63, doi: <https://doi.org/10.31857/S0572329921040085>
- [28] Azizzadeh A., Behjat B. Static and natural frequency investigation of FGP beams considering thermal effects and design parameters. *J. Eng. Appl. Sci.*, 2023, vol. 70, art. 92, doi: <https://doi.org/10.1186/s44147-023-00250-4>
- [29] Zhong X., Wu Y., Zhang K. An extended dielectric crack model for fracture analysis of a thermopiezoelectric strip. *Acta Mech. Solida Sin.*, 2020, vol. 33, no. 4, pp. 521–545, doi: <https://doi.org/10.1007/s10338-019-00149-9>
- [30] Ватульян А.О., Нестеров С.А. Динамическая задача термоэлектроупругости для функционально-градиентного слоя. *Вычислительная механика сплошных сред*, 2017, т. 10, № 2, с. 117–126, doi: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.2.10>
- [31] Ватульян А.О., Нестеров С.А. Итерационная схема решения коэффицентной обратной задачи термоэлектроупругости. *Вычислительная механика сплошных сред*, 2017, т. 10, № 4, с. 445–455, doi: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.4.36>
- [32] Шляхин Д.А., Даулетмуратова Ж.М. Нестационарная связанная осесимметричная задача термоупругости для жестко закрепленной круглой пластины. *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2019, № 4, с. 191–200, doi: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.4.18>
- [33] Шляхин Д.А., Савинова Е.В. Связанная нестационарная осесимметричная задача термоэлектроупругости для круглой пьезокерамической шарнирно закрепленной пластины. *Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки*, 2023, т. 27, № 1, с. 159–178, doi: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1959>
- [34] Коваленко А.Д. *Основы термоупругости*. Киев, Наукова Думка, 1970. 307 с.

- [35] Партон В.З., Кудрявцев Б.А. *Электроупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел*. Москва, Наука, 1988. 470 с.
- [36] Карташов Э.М. *Аналитические методы в теплопроводности твердых тел*. Москва, Высшая школа, 1985. 480 с.
- [37] Снеддон И.Н. *Преобразования Фурье*. Москва, Изд-во иностр. лит., 1955. 668 с.
- [38] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. *Специальные функции*. Москва, Наука, 1977. 342 с.
- [39] Сеницкий Ю.Э. Биортогональное многокомпонентное конечное интегральное преобразование и его приложение к краевым задачам механики. *Изв. вузов. Математика*, 1996, № 8, с. 71–81.
- [40] Selvamani R. Influence of thermo-piezoelectric field in a circular bar subjected to thermal loading due to laser pulse. *Физика и механика материалов*, 2016, т. 27, № 1, с. 1–8.

References

- [1] Ionov B.P., Ionov A.B. Statistic-spectral approach to noncontact temperature measurement. *Datchiki i sistemy* [Sensors & Systems], 2009, no. 2, pp. 9–12. (In Russ.).
- [2] Pankov A.A. Resonant diagnostics of temperature distribution by the piezo-electroluminescent fiber-optical sensor according to the solution of the Fredholm integral equation. *Vestnik PNIPU. Mekhanika* [PNRPU Mechanics Bulletin], 2018, no. 2, pp. 72–82, doi: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.2.07> (in Russ.).
- [3] Kazaryan A.A. Fine-film captive pressure and temperature. *Datchiki i sistemy* [Sensors & Systems], 2016, no. 3, pp. 50–56. (In Russ.).
- [4] Mindlin R.D. Equations of high frequency vibrations of thermopiezoelectric crystal plates. *Int. J. Solids Struct.*, 1974, vol. 10, no. 6, pp. 625–637, doi: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(74\)90047-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(74)90047-X)
- [5] Lord H. A generalized dynamical theory of thermoelasticity. *J. Elasticity*, 1967, vol. 15, no. 5, pp. 299–309, doi: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(67\)90024-5](https://doi.org/10.1016/0022-5096(67)90024-5)
- [6] Green A.E. Thermoelasticity without energy dissipation. *J. Elasticity*, 1993, no. 31, pp. 189–208, doi: <https://doi.org/10.1007/BF00044969>
- [7] Saadatfar M., Razavi A.S. Piezoelectric hollow cylinder with thermal gradient. *J. Mech. Sci. Technol.*, 2009, vol. 23, no. 1, pp. 45–53, doi: <https://doi.org/10.1007/s12206-008-1002-8>
- [8] Chen W.Q., Shioya T. Piezothermoelastic behavior of a pyroelectric spherical shell. *J. Therm. Stress.*, 2001, no. 24, no. 2, pp. 105–120, doi: <https://doi.org/10.1080/01495730150500424>
- [9] Obata Y., Noda N. Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material. *J. Therm. Stress.*, 1994, no. 17, no. 3, pp. 471–487, doi: <https://doi.org/10.1080/01495739408946273>
- [10] Podil'chuk Y.N. Exact analytical solutions of static electroelastic and thermoelectroelastic problems for a transversely isotropic body in curvilinear coordinate systems. *Int. Appl. Mech.*, 2003, vol. 39, no. 2, pp. 132–170, doi: <https://doi.org/10.1023/A:1023953313612>
- [11] Khorsand M. Dynamic analysis of a functionally graded piezoelectric spherical shell under mechanical and thermal shocks. *J. Mech. Eng. Sci.*, 2014, vol. 228, no. 4, pp. 632–645, doi: <https://doi.org/10.1177/0954406213489445>
- [12] Akbarzadeh A.H., Babaei M.H., Chen Z.T. The thermo-electromagnetoelastic behavior of a rotating functionally graded piezoelectric cylinder. *Smart Mater. Struct.*, 2011, vol. 20, no. 6, art. 065008, doi: <https://doi.org/10.1088/0964-1726/20/6/065008>
- [13] Rahimi G.H., Arefi M., Khoshgoftar M.J. Application and analysis of functionally graded piezoelectrical rotating cylinder as mechanical sensor subjected to pressure and thermal loads. *Appl. Math. Mech.*, 2011, vol. 32, no. 8, pp. 997–1008, doi: <https://doi.org/10.1007/s10483-011-1475-6>
- [14] Shlyakhin D.A., Kalmova M.A. Uncoupled problem of thermoelectroelasticity for a cylindrical shell. In: XXX Russian-Polish-Slovak seminar theoretical foundation of civil engineering (RSP 2021). *Springer*, 2022, pp. 263–271, doi: https://doi.org/10.1007/978-3-030-86001-1_31
- [15] Shlyakhin D.A., Savinova E.V., Yurin V.A. Dynamic problem of thermoelectricity for round rigidly fixed plate. *Vestnik inzhenernoy shkoly DVFU* [FEFU: School of Engineering Bulletin], 2022, no. 1, pp. 3–16, doi: <https://doi.org/10.24866/2227-6858/2022-1/3-16> (in Russ.).

- [16] Vatulyan A.O. Thermal shock on thermo-electroelastic layer. *Vestnik Donskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Vestnik of Don State Technical University], 2001, vol. 1, no. 1, pp. 82–89. (In Russ.).
- [17] Shang F., Kuna M., Kitamura T. Theoretical investigation of an elliptical crack in thermopiezoelectric material. Part I: Analytical development. *Theor. Appl. Fract. Mech.*, 2003, vol. 40, no. 3, pp. 237–246, doi: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2003.08.003>
- [18] Kirilyuk V.S. Thermostressed state of a piezoelectric body with a plate crack under symmetric thermal load. *Int. Appl. Mech.*, 2008, vol. 44, no. 3, pp. 320–330, doi: <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0048-8>
- [19] Pryakhina O.D., Smirnova A.V., Samoylov M.V. et al. The physical fields coherence account in dynamic problems for multilayered mediums. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2010, vol. 7, no. 1, pp. 54–60. (In Russ.).
- [20] Shlyakhin D.A., Kalmova M.A. The nonstationary thermoelectric elasticity problem for a long piezoceramic cylinder. *Vestnik PNIPU. Mekhanika* [PNRPU Mechanics Bulletin], 2021, no. 2, pp. 181–190, doi: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.2.16> (in Russ.).
- [21] Shlyakhin D.A., Kalmova M.A. Related dynamic axisymmetric thermoelectroelasticity problem for a long hollow piezoceramic cylinder. *Advanced Engineering Research*, 2022, vol. 22, no. 2, pp. 81–90, doi: <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-2-81-90> (in Russ.).
- [22] Kaloerov S.A., Glushankov E.S. Determining the thermo-electro-magneto-elastic state of multiply connected piecewise-homogeneous piezoelectric plates. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 2018, vol. 59, no. 6, pp. 88–101, doi: <https://doi.org/10.15372/PMTF20180609> (in Russ.). (Eng. version: *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2018, vol. 59, no. 6, pp. 1036–1048, doi: <https://doi.org/10.1134/S0021894418060093>)
- [23] Qin H.Q. Greens function for thermopiezoelectric plates with holes of various shapes. *Arch. Appl. Mech.*, 1999, vol. 69, pp. 406–418, doi: <https://doi.org/10.1007/s004190050230>
- [24] Firsanov V.V., Nguen L.Kh. Stress-strain state of arbitrary shells with account for thermoelectric impact based on refined theory. *Teplovye protsessy v tekhnike* [Thermal Processes in Engineering], 2020, vol. 12, no. 3, pp. 110–117, doi: <https://doi.org/10.34759/tpt-2020-12-3-110-117> (in Russ.).
- [25] Ishihara M., Ootao Y., Kameo Y. et al. Thermoelectroelastic response of a piezoelectric cylinder with symmetry under axisymmetric mechanical and thermal loading. *Mech. Eng. J.*, 2017, vol. 4, no. 5, pp. 16–00609, doi: <https://doi.org/10.1299/mej.16-00609>
- [26] Gupta V., M.S., B. and Das S. Impact of memory-dependent heat transfer on Rayleigh waves propagation in nonlocal piezo-thermo-elastic medium with voids. *Int. J. Numer. Method H.*, 2024, vol. 34, no. 4, pp. 1902–1926, doi: <https://doi.org/10.1108/HFF-10-2023-0615>
- [27] Kulikov G.M., Plotnikova S.V. Controlling the shape of laminated composite plates with piezoelectric patches under thermal loading based on the reference surface method. *Izvestiya RAN. MTT*, 2021, no. 5, pp. 45–63, doi: <https://doi.org/10.31857/S0572329921040085> (in Russ.). (Eng. version: *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, no. 5, pp. 646–660, doi: <https://doi.org/10.3103/S0025654421050137>)
- [28] Azizzadeh A., Behjat B. Static and natural frequency investigation of FGP beams considering thermal effects and design parameters. *J. Eng. Appl. Sci.*, 2023, vol. 70, art. 92, doi: <https://doi.org/10.1186/s44147-023-00250-4>
- [29] Zhong X., Wu Y., Zhang K. An extended dielectric crack model for fracture analysis of a thermopiezoelectric strip. *Acta Mech. Solida Sin.*, 2020, vol. 33, no. 4, pp. 521–545, doi: <https://doi.org/10.1007/s10338-019-00149-9>
- [30] Vatulyan A.O., Nesterov S.A. The dynamic problem of thermoelectroelasticity for functionally graded layer. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred* [Computational Continuum Mechanics], 2017, vol. 10, no. 2, pp. 117–126, doi: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.2.10> (in Russ.).
- [31] Vatulyan A.O., Nesterov S.A. Iterative scheme for solving the coefficient inverse problem of thermoelectroelasticity. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred* [Computational Continuum Mechanics], 2017, vol. 10, no. 4, pp. 445–455, doi: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.4.36> (in Russ.).

- [32] Shlyakhin D.A., Dauletmuratova Zh.M. Non-stationary coupled axisymmetric thermoelasticity problem for a rigidly fixed round plate. *Vestnik PNIPU. Mekhanika* [PNRPU Mechanics Bulletin], 2019, no. 4, pp. 191–200, doi: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.4.18> (in Russ.).
- [33] Shlyakhin D.A., Savinova E.V. A coupled non-stationary axisymmetric problem of thermoelectroelasticity for a circular piezoceramic hinged plate. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Ser. Fiziko-matematicheskie nauki* [Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences], 2023, vol. 27, no. 1, pp. 159–178, doi: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1959> (in Russ.).
- [34] Kovalenko A.D. *Osnovy termouprugosti* [Fundamentals of thermoelasticity]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1970. 307 p. (In Russ.).
- [35] Parton V.Z., Kudryavtsev B.A. *Elektrouprugost pyzoelektricheskikh i elektroprovodnykh tel* [Electroelasticity of piezoelectric and electrically conductive bodies]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 470 p. (In Russ.).
- [36] Kartashov E.M. *Analiticheskie metody v teploprovodnosti tverdykh tel* [Analytical methods in heat conduction of solid bodies.]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1985. 480 p. (In Russ.).
- [37] Sneddon I.N. *Fourier transforms*. Courier Corporation, 1995. 542 p. (Russ. ed.: *Preobrazovaniya Furye*. Moscow, Izd-vo inostr. lit. Publ., 1955. 668 p.)
- [38] Janke E., Emde F., Lösch F. *Tafeln hoherer funktionen*. B.G. Teubner, 1960. 318 p. (Russ. ed.: *Spetsialnye funktsii*. Moscow, Nauka Publ., 1977. 342 p.)
- [39] Senitskiy Yu.E. A biorthogonal multicomponent finite integral transformation and its application to boundary value problems in mechanics. *Izv. vuzov. Matematika*, 1996, no. 8, pp. 71–81. (In Russ.). (Eng. version: *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1996, vol. 40, no. 8, pp. 69–79.)
- [40] Selvamani R. Influence of thermo-piezoelectric field in a circular bar subjected to thermal loading due to laser pulse. *Fizika i mekhanika materialov* [Materials Physics and Mechanics], 2016, vol. 27, no. 1, pp. 1–8.

Статья поступила в редакцию 03.01.2025

Информация об авторах

ШЛЯХИН Дмитрий Аверкиевич — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Строительная механика, инженерная геология, основания и фундаменты». Самарский государственный технический университет (443100, Самара, Российская Федерация, ул. Молодогвардейская, 244, e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru).

САВИНОВА Елена Владимировна — старший преподаватель кафедры «Строительная механика, инженерная геология, основания и фундаменты». Самарский государственный технический университет (443100, Самара, Российская Федерация, ул. Молодогвардейская, д. 244, e-mail: slenax@yandex.ru).

Information about the authors

SHLYAKHIN Dmitry Averkievich — Doctor of Science (Eng.), Professor, Head of the Department of Construction Mechanics, Engineering Geology, Bases and Foundations. Samara State Technical University (443100, Samara, Russian Federation, Molodogvardeyskaya St., Bldg. 244, e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru).

SAVINOVA Elena Vladimirovna — Senior Lecturer, Department of Construction Mechanics, Engineering Geology, Bases and Foundations. Samara State Technical University (443100, Samara, Russian Federation, Molodogvardeyskaya St., Bldg. 244, e-mail: slenax@yandex.ru).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Шляхин Д.А., Савинова Е.В. Связанная нестационарная осесимметричная задача термоэлектроупругости для круглой многослойной пластины. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2025, № 3, с. 16–29.

Please cite this article in English as:

Shlyakhin D.A., Savinova E.V. Coupled nonstationary axisymmetric problem of the thermal electrical elasticity for a circular multilayer plate. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2025, no. 3, pp. 16–29.