УДК 621.01 + 007.52

Решение прямой задачи о положениях механизма параллельной структуры с основанием в виде усеченного конуса

С.В. Соколовский

ФГБУН «Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН»

Solving the direct position problem for a parallel structure with the truncated cone base

S.V. Sokolovskii

Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences

Приведены особенности решения прямой задачи о положениях пространственного механизма параллельной структуры. Рассмотрен механизм параллельной структуры с основанием в виде усеченного конуса, диаметр нижнего обода которого меньше, чем у верхнего. Направляющие начальных кинематических пар такого механизма расположены между нижним и верхним ободами, а соседние кинематические цепи связаны сферической кинематической парой, выполненной в виде трех вращательных кинематических пар с пересекающимися в одной точке осями. Диаметр выходного звена меньше, чем у верхнего обода. В начальном положении промежуточные звенья вместе с выходным звеном размещены внутри основания. Предложена методика решения прямой задачи о положениях механизма параллельной структуры с основанием в виде усеченного конуса, позволяющая определить положение выходного звена в зависимости от положения управляющих приводов. Дальнейшие исследования будут связаны с построением рабочей зоны и определением точек бифуркации.

EDN: KFIVFI, https://elibrary/kfivfi

Ключевые слова: механизм параллельной структуры, усеченный конус, прямая задача о положениях

The paper presents the features of solution to the direct position problem for a parallel structure spatial mechanism. It considers the mechanism of a parallel structure with the truncated cone base, for which the lower rim diameter is smaller than that of the upper rim. Guides of the initial kinematic pairs of such a mechanism are positioned between the lower and upper rims, and the adjacent kinematic chains are connected by a spherical kinematic pair made in the form of three rotational kinematic pairs with the axes intersecting at one point. The output link diameter is smaller than that of the upper rim. In the initial position, the intermediate links together with the output link are positioned inside the base. The paper proposes a technique for solving the direct position problem for a parallel structure mechanism with the truncated cone base, which makes it possible to determine position of the output link depending on the control drives position. Further studies would include construction of the working zone and determination of the bifurcation points.

EDN: KFIVFI, https://elibrary/kfivfi

Keywords: parallel structure mechanism, truncated cone, direct position problem

Задача о положениях механизма параллельной структуры (МПС) — одна из основных задач создания МПС [1, 2]. Решение этой задачи позволяет определить положение выходного звена (ВЗ) МПС в зависимости от положения управляющих приводов [3, 4].

Эту задачу решают различными [5] современными способами:

• используют искусственные нейронные сети для аппроксимации прямой кинематической задачи в параллельном роботе 3-PRS в режиме реального времени [6];

• находят все реальные решения сертифицированным способом без каких-либо предположений о манипуляторе, применяя в качестве черных ящиков новейшие алгоритмы из компьютерной алгебры, такие как F4/F5 для расчета базисов Гребнера, новейшие методы выделения действительных корней с помощью интервалов с рациональными границами, которые смешивают со стратегиями из области интервальной арифметики [7];

• используя геометрические характеристики сферического робота, получают два связанных тригонометрических уравнения с применением представления угловой оси, а затем их решают методом исключения Сильвестра, который приводит к многочлену восьми степеней [8].

Рассмотрим решение задачи о положениях МПС с основанием в виде усеченного конуса (рис. 1).

Цель исследования — разработка методики решения задачи о положениях МПС с основанием в виде усеченного конуса и создание алгоритма расчета координат опорных точек ВЗ [9, 10].

Схема МПС с основанием в виде усеченного конуса приведена на рис. 2. Здесь введены следующие обозначения: O — основание; l_{11}, l_{12}, l_{21}, l_{22}, l_{31}, l_{32} — направляющие; $x_{11}y_{11}z_{11}$, $x_{12}y_{12}z_{12}$ — начальная цилиндрическая кинематическая пара (КП); $x_{21}y_{21}z_{21}$, $x_{22}y_{22}z_{22}$ и $x_{31}y_{31}z_{31}$, $x_{32}y_{32}z_{32}$ — первая и вторая промежуточная вращательная КП соответственно; $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2$, $x_3y_3z_3$ — конечная сферическая КП, выполненная в виде совокупности трех вращательных КП.

Положение ВЗ в пространстве однозначно определяется координатами точек крепления к нему промежуточных звеньев, образующих вписанный в ВЗ равносторонний треугольник с вершинами, имеющими координаты (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3). Прямая задача о положениях МПС заключается в нахождении зависимости координат его вершин от координат точек расположения начальных цилиндрических КП на направляющих [11, 12].

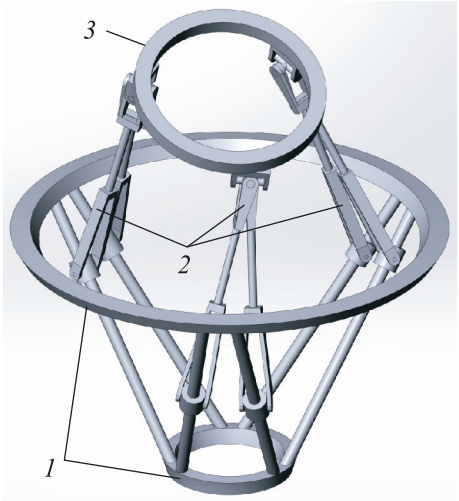

Рис. 1. Модель МПС с основанием в виде усеченного конуса:
1 — основание; *2* — попарно соединенные промежуточные звенья; *3* — ВЗ

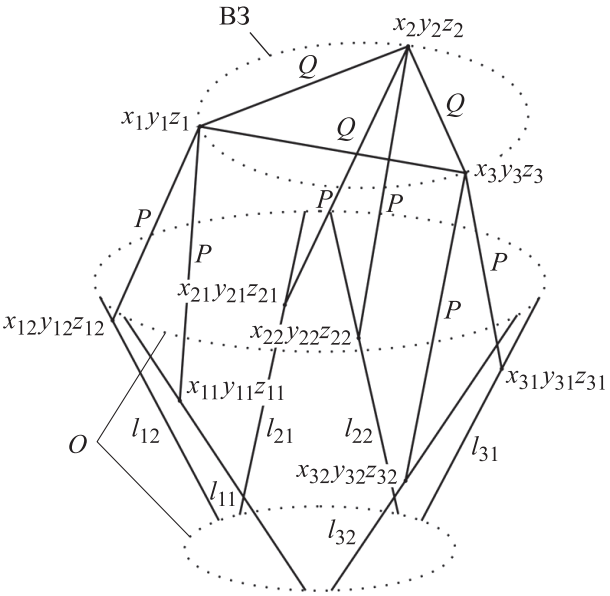

Рис. 2. Схема МПС с основанием в виде усеченного конуса

Точка (x_2, y_2, z_2) является пересечением трех сфер (рис. 3): с центром в точке (x_1, y_1, z_1) радиусом Q, с центром в точке (x_{21}, y_{21}, z_{21}) радиусом P и с центром в точке (x_{22}, y_{22}, z_{22}) радиусом P. Точка (x_3, y_3, z_3) является пересечением трех сфер: с центром в точке (x_1, y_1, z_1) радиусом Q, с центром в точке (x_{31}, y_{31}, z_{31}) радиусом P и с центром в точке (x_{32}, y_{32}, z_{32}) радиусом P.

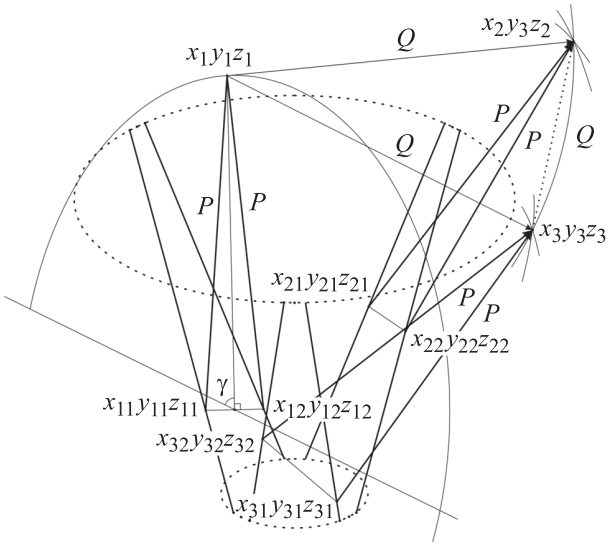

Рис. 3. Схема расчета МПС с основанием в виде усеченного конуса

Задача нахождения точки пересечения трех сфер в пространстве решается аналитически. Остается найти такую точку (x_1, y_1, z_1), чтобы выполнялось условие

$$|(x_2, y_2, z_2)(x_3, y_3, z_3)| = Q.$$

Если представить координаты точки (x_1, y_1, z_1) как функции некоторого угла γ между плоскостью, проходящей через первую КП промежуточных звеньев и горизонталью, то задачу нахождения точек (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3), расстояние между которыми равно Q, можно решить вычислительными методами.

Если зафиксировать положения цилиндрических КП на направляющих — в точках (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}), то выходящие из них промежуточные звенья образуют три равнобедренных треугольника с основаниями $[(x_{i1}, y_{i1}, z_{i1})(x_{i2}, y_{i2}, z_{i2})]$, соединяющими цилиндрические КП.

Их вершины (x_i, y_i, z_i) при отсутствии ограничений могли бы описывать в пространстве окружности вокруг середин соответствующих отрезков $[(x_{i1}, y_{i1}, z_{i1})(x_{i2}, y_{i2}, z_{i2})]$ в плоскостях, перпендикулярных этим отрезкам, радиусы которых равны высоте равнобедренного треугольника, опущенной из его вершины (x_i, y_i, z_i) на основание $[(x_{i1}, y_{i1}, z_{i1})(x_{i2}, y_{i2}, z_{i2})]$.

Каждая из этих окружностей представляет собой множество точек пересечения двух сфер с центрами в точках (x_{i1}, y_{i1}, z_{i1}) и (x_{i2}, y_{i2}, z_{i2}) и радиусом P.

Для некоторого множества положений первой КП промежуточных звеньев, образующих треугольник с вершинами, имеющими координаты (x_{11}, y_{11}, z_{11}), (x_{12}, y_{12}, z_{12}) и (x_1, y_1, z_1), существуют такие точки (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3), что

$$|(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2)| = |(x_1, y_1, z_1)(x_3, y_3, z_3)| = Q.$$

Геометрический смысл задачи состоит в нахождении точек пересечения сферы с центром (x_1, y_1, z_1) радиусом Q и окружности, являющейся пересечением двух сфер радиусом P с центрами (x_{21}, y_{21}, z_{21}) и (x_{22}, y_{22}, z_{22}). Так как окружность в пространстве может пересекать сферу в одной точке или в двух, задача нахождения вершины (x_2, y_2, z_2) треугольника, частично определяющего положение ВЗ, имеет не более двух решений.

Аналогично находятся не более двух решений для третьей вершины (x_3, y_3, z_3) треугольника, определяющего положение ВЗ.

Количество решений задачи равно числу сочетаний из количества решений для каждой из вершин. Таким образом, задача нахождения КП вершин треугольника в пространстве, определяющего положение ВЗ, может не иметь решений, либо иметь одно, два или четыре решения.

При условии, что положение ВЗ, соответствующее зафиксированным позициям цилиндрических КП, существует, его можно найти, меняя положение в пространстве вершины (x_1, y_1, z_1) перебором значений угла γ отклонения высоты рассматриваемого треугольника $(x_{11}, y_{11}, z_{11})(x_{12}, y_{12}, z_{12})(x_1, y_1, z_1)$ от горизонтали. Если $|(x_2, y_2, z_2)(x_3, y_3, z_3)| = Q$, то

Результаты расчета координат опорных точек ВЗ

Координаты точек крепления к ВЗ промежуточных звеньев								
первого и второго			третьего и четвертого			пятого и шестого		
x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3
0,956	1,059	1,689	1,219	0,590	0,846	0,395	0,310	1,338
0,925	0,861	1,762	0,112	0,359	2,057	0,563	0,120	1,197
0,788	0,413	1,836	0,001	0,045	2,332	–0,140	0,633	1,535
0,639	0,109	1,809	0,942	0,698	1,060	0,731	–0,264	0,886

точки (x_i, y_i, z_i) образуют равносторонний треугольник со стороной Q.

Таким образом, при выполнении условий принадлежности внутренней области конуса, образованного ободами основания и усеченного нижним ободом, они однозначно описывают возможное положение ВЗ.

Для произвольного набора смещений по направляющим 0,42, 0,21, 0,89, 0,74, 0,53, 0,10 получены координаты точек крепления к ВЗ промежуточных звеньев, указанные в таблице.

Выводы

1. Предложена методика решения прямой задачи о положениях пространственного МПС с основанием в виде усеченного конуса, основанная на аналитическом решении задачи о пересечении сфер в пространстве и итерационном нахождении корней уравнения.

2. Дальнейшее исследование будут направлены на построение рабочей зоны и определение точек бифуркации [13, 14].

Литература

[1] Merlet J.P. Parallel robots. *Springer*, 2006. 402 p.
[2] Taghirad H. *Parallel robots. Mechanics and control*. CRC Press, 2013. 534 p.
[3] Siciliano D., Khatib O., eds. Springer handbook of robotics. *Springer*, 2016. 2228 p.
[4] Masafumi O., ed. Advances in mechanism and machine science. Proceedings of the 16th IFToMM World Congress. Vol. 1, 2. *Springer*, 2023. 1027 p., 997 p.
[5] Лапиков А.Л., Масюк В.М. Анализ решения прямой задачи о положении механизма параллельной структуры с вращательными приводами в кинематических цепях. *Науковедение*, 2017, т. 9, № 4. URL: http://naukovedenie.ru/PDF/28TVN417.pdf
[6] Zubizarreta A., Larrea M., Irigoyen E. et al. Real time parallel robot direct kinematic problem computation using neural networks. In: 10th International Conference on Soft Computing Models in Industrial and Environmental Applications. *Springer*, 2015, pp. 285–295, doi https://doi.org/10.1007/978-3-319-19719-7_25
[7] Faugère J., Merlet J.-P., Rouillier F. *On solving the direct kinematics problem for parallel robots*. URL: https://inria.hal.science/inria-00072366v1 (дата обращения: 15.06.2024).
[8] Enferadi J., Nabavi N. A new approach for solving the direct kinematic problem of a general 3-RRR spherical parallel robot. *Int. J. Robot. Appl.*, 2023, vol. 9, no. 1, pp. 38–51.
[9] Глазунов В.А. *Механизмы параллельной структуры и их применение*. Москва-Ижевск, ИКИ, 2018. 1036 с.
[10] Глазунов В.А., ред. *Новые механизмы в современной робототехнике*. Москва, Техносфера, 2018. 315 с.
[11] Глазунов В.А., Хейло С.В., ред. *Механизмы перспективных робототехнических систем*. Москва, Техносфера, 2020. 296 с.
[12] Артоболевский И.И. *Теория механизмов и машин*. Москва, Наука, 1988. 640 с.
[13] Mohamed M.G., Duffy J. A direct determination of the instantaneous kinematics of fully parallel robot manipulators. *J. Mech., Trans., and Automation.*, 1985, vol. 107, no. 2, pp. 226–229, doi: https://doi.org/10.1115/1.3258713
[14] Ryu J.-H. *Parallel manipulators. New developments*. IntechOpen, 2008. 508 p.

References

[1] Merlet J.P. Parallel robots. *Springer*, 2006. 402 p.
[2] Taghirad H. *Parallel robots. Mechanics and control*. CRC Press, 2013. 534 p.
[3] Siciliano D., Khatib O., eds. Springer handbook of robotics. *Springer*, 2016. 2228 p.
[4] Masafumi O., ed. Advances in mechanism and machine science. Proceedings of the 16th IFToMM World Congress. Vol. 1, 2. *Springer*, 2023. 1027 p., 997 p.
[5] Lapikov A.L., Masyuk V.M. Analysis of solution for direct position problem of a parallel mechanism with rotary actuators in kinematic chains. *Naukovedenie*, 2017, vol. 9, no. 4. URL: http://naukovedenie.ru/PDF/28TVN417.pdf (in Russ.).
[6] Zubizarreta A., Larrea M., Irigoyen E. et al. Real time parallel robot direct kinematic problem computation using neural networks. In: 10th International Conference on Soft Computing

Models in Industrial and Environmental Applications. *Springer*, 2015, pp. 285–295, doi https://doi.org/10.1007/978-3-319-19719-7_25

[7] Faugère J., Merlet J.-P., Rouillier F. *On solving the direct kinematics problem for parallel robots*. URL: https://inria.hal.science/inria-00072366v1 (accessed: 15.06.2024).

[8] Enferadi J., Nabavi N. A new approach for solving the direct kinematic problem of a general 3-RRR spherical parallel robot. *Int. J. Robot. Appl.*, 2023, vol. 9, no. 1, pp. 38–51.

[9] Glazunov V.A. *Mekhanizmy parallelnoy struktury i ikh primenenie* [Mechanisms of parallel structure and their application]. Moscow-Izhevsk, IKI Publ., 2018. 1036 p. (In Russ.).

[10] Glazunov V.A., ed. *Novye mekhanizmy v sovremennoy robototekhnike* [New mechanisms in modern robotics]. Moscow, Tekhnosfera Publ., 2018. 315 p. (In Russ.).

[11] Glazunov V.A., Kheylo S.V., red. *Mekhanizmy perspektivnykh robototekhnicheskikh system* [Mechanisms of perspective robotic systems]. Moscow, Tekhnosfera Publ., 2020. 296 p. (In Russ.).

[12] Artobolevskiy I.I. *Teoriya mekhanizmov i mashin* [Theory of mechanisms and machines]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 640 p. (In Russ.).

[13] Mohamed M.G., Duffy J. A direct determination of the instantaneous kinematics of fully parallel robot manipulators. *J. Mech., Trans., and Automation*., 1985, vol. 107, no. 2, pp. 226–229, doi: https://doi.org/10.1115/1.3258713

[14] Ryu J.-H. *Parallel manipulators. New developments*. IntechOpen, 2008. 508 p.

Статья поступила в редакцию 03.09.2024

Информация об авторе

СОКОЛОВСКИЙ Станислав Вячеславович — аспирант. ФГБУН «Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН» (101000, Москва, Российская Федерация, Малый Харитоньевский переулок, д. 4, e-mail: stav.so@mail.ru).

Information about the author

SOKOLOVSKII Stanislav Viacheslavovich — Postgraduate. Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences (101000, Moscow, Russian Federation, Malyy Kharitonyevskiy Pereulok, Bldg. 4, e-mail: stav.so@mail.ru).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Соколовский С.В. Решение прямой задачи о положениях механизма параллельной структуры с основанием в виде усеченного конуса. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2025, № 5, с. 52–56.

Please cite this article in English as:

Sokolovskii S.V. Solving the direct position problem for a parallel structure with the truncated cone base. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2025, no. 5, pp. 52–56.