

# Машиностроение и машиноведение

УДК 621.833.7

## Математическая модель сдвоенной волновой зубчатой передачи

И.Е. Люминарский, В.В. Баласанян, С.Е. Люминарский

МГТУ им. Н.Э. Баумана

## Mathematical model of the double harmonic drive

I.E. Lyuminarsky, V.V. Balasanian, S.E. Lyuminarsky

Bauman Moscow State Technical University

■ Применение аддитивных технологий позволяет решать задачу изготовления механических передач с использованием 3D-принтера. Такой способ характеризуется высокими производительностью и экономичностью. Рассмотрена пространственная математическая модель сдвоенной волновой зубчатой передачи, вторая ступень которой является зубчатой муфтой. Предложена методика расчета, основанная на определении упругого взаимодействия гибкого, жестких колес и генератора волн, учитывающая пространственный характер деформации элементов. Численные исследования выполнены для передачи, изготовленной с применением аддитивных технологий. Передаточное отношение сдвоенной волновой зубчатой передачи — 30, разница чисел зубьев гибкого и жесткого колес в первой ступени — 4. Проведены теоретические исследования распределения сил, действующих на боковые поверхности зубьев, в окружном и продольном направлениях. Расчетным путем получена характеристика крутильной жесткости сдвоенной волновой зубчатой передачи с дисковым генератором волн. Определены значения крутильной жесткости при различных значениях момента сопротивления.

**EDN:** QKWXVL, <https://elibrary/qkwxvl>

**Ключевые слова:** волновая зубчатая передача, гибкое колесо, жесткое колесо, дисковый генератор волн, крутильная жесткость, аддитивные технологии

■ Using the additive technologies makes it possible to solve the problem of manufacturing mechanical gears on a 3D printer. This manufacture method has high productivity and cost-effectiveness. The paper considers a spatial mathematical model of a double harmonic drive, which second stage is a toothed clutch. It proposes a computation technique based on determining elastic interaction of the flexible, rigid wheels and wave generator, taking into account spatial nature of the elements deformation. Numerical studies were performed for a drive manufactured using the additive technologies. The harmonic drive gear ratio was 30, the difference in the number of teeth of the flexible and rigid wheels in the first stage was 4. Theoretical studies were performed on distribution of forces acting on the lateral surfaces of the teeth in the circumferential and longitudinal directions. Computation was used to obtain the torsional stiffness characteristic of the harmonic drive disk wave generator. The torsional stiffness values were received for different values of the resistance moment.

EDN: QKWXVL, <https://elibrary/qkwxvl>

**Keywords:** harmonic drive, flexible gear, rigid gear, disk wave generator, torsional stiffness, additive technologies

Прямое цифровое производство получает все большее распространение в машиностроении и других сферах промышленности. Современные аддитивные технологии можно использовать для объемной печати изделий из пластика. Детали волновых зубчатых передач (ВЗП), ранее изготавливаемых только на фрезерном станке, сегодня можно напечатать на 3D-принтере, используя аддитивные технологии. Такой способ характеризуется высокими производительностью и экономичностью, безотходностью и быстрой переналадкой оборудования. В связи с этим необходимо исследовать возможность производства ВЗП с помощью аддитивных технологий [1].

На кафедре РК-2 МГТУ им. Н.Э. Баумана спроектирована и изготовлена ВЗП с применением аддитивных технологий. В составе изделия из покупных компонентов остались лишь подшипники и крепежные детали. Остальные компоненты были напечатаны из полимеров на 3D-принтерах. Передаточное отношение ВЗП — 30. Редуктор имеет полый вал для подводки воздушной магистрали.

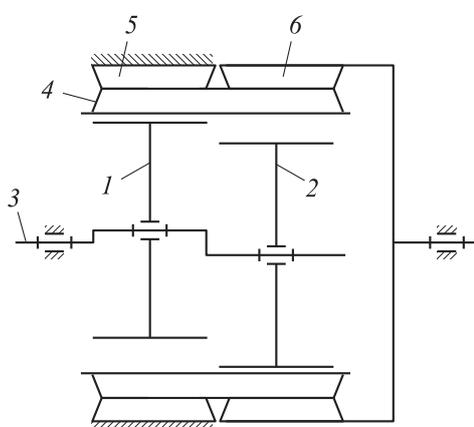
Спроектированная двуступенчатая ВЗП (СВЗП) представляет собой модификацию двухступенчатой ВЗП, второй ступенью которой является зубчатая муфта (рис. 1, а). Входным звеном СВЗП служит дисковый генератор волн, состоящий из деформирующих дисков 1 и 2, установленных на входном валу 3 с эксцентрисите-

том. Диски смонтированы с помощью двух роликовых подшипников. Подшипники с диском и входным валом образуют генератор волн СВЗП. Второе жесткое зубчатое колесо (ЖК<sub>2</sub>) 6 является выходным звеном.

В первой ступени зубчатый венец гибкого зубчатого колеса (ГК) зацеплен с неподвижным первым жестким зубчатым колесом (ЖК<sub>1</sub>) 5. СВЗП имеют разность чисел зубьев жесткого  $z_b$  и гибкого  $z_g$  колес, равную  $z_b - z_g = 2$ . В этом случае можно получить передаточное отношение  $u$  не менее 60. Для обеспечения  $u = 30$  принято, что разница  $z_{b1} - z_g = 4$ , где  $z_{b1}$  — число зубьев ЖК<sub>1</sub>.

Во второй ступени СВЗП зубчатый венец зацеплен с ЖК<sub>2</sub>, являющимся выходным звеном. Вторая ступень представляет собой волновую зубчатую муфту, где числа зубьев ЖК<sub>2</sub>  $z_{b2}$  и ГК равны:  $z_g = z_{b2}$ . Внешний СВЗП показан на рис. 1, б.

Разработка математических моделей ВЗП позволяет на этапе проектирования определять ее параметры, обеспечивающие качественную работу электроприводов. При проектировании таких моделей необходимо учитывать пространственный характер деформации элементов ВЗП. Сложность разработки пространственных математических моделей заключается в расчете упругого взаимодействия гибкого и жестких колес с большим количеством мелких зубьев (около 200) и неизвестной зоной контакта.



а



б

Рис. 1. Конструктивная схема (а) и внешний вид (б) СВЗП

**Постановка задачи.** Исследованию ВЗП с генератором волн внутреннего деформирования посвящено много работ, в частности [2–14]. В публикациях [1, 8, 11] предложена математическая модель таких ВЗП, которая учитывает пространственный характер упругого взаимодействия ее элементов и позволяет достаточно точно оценивать различные характеристики. Однако до настоящего времени не создана пространственная модель СВЗП, использование которой даст возможность подбирать ее параметры и достаточно точно оценивать работу СВЗП на этапе проектирования.

Цель работы — разработать математическую модель СВЗП с дисковым генератором волн, учитывающую пространственное упругое взаимодействие элементов, провести на ее основе теоретические исследования распределения сил между зубьями и получить крутильную жесткость СВЗП.

**Математическая модель.** Для расчета упругого взаимодействия звеньев СВЗП использовали пространственную математическую модель, в которой поверхностный контакт звеньев заменен односторонним контактом в отдельных точках. При этом учитывали только нормальные силы взаимодействия поверхностей. Ободы ЖК<sub>1</sub> и ЖК<sub>2</sub> приняли абсолютно твердыми телами. Деформации зубьев ЖК<sub>1</sub>, ЖК<sub>2</sub> и ГК определяли методом конечных элементов.

В рассматриваемой математической модели диски как жесткие тела могли поступательно перемещаться в плоскости, перпендикулярной оси вращения ГК, которое под действием сил со стороны дисков и двух жестких колес находилось в равновесии. Во второй ступени ЖК<sub>2</sub> устанавливали на выходном валу. Учитывали только смещения ГК как жесткого целого вдоль осей  $x$ ,  $y$  (лежащих в плоскости, перпендикулярной оси вращения ГК) и его поворот вокруг оси  $z$ . Для упрощения расчетов принимали, что выходное звено ЖК<sub>2</sub> способно только поворачиваться вокруг оси вращения  $z$ .

Деформацию ГК определяли по линейной теории тонких оболочек. Часть ГК, на которой нарезаны зубья, заменяли ортотропной оболочкой с эквивалентными жесткостями на растяжение и изгиб. В расчетной схеме непрерывный контакт между ГК и дисками заменяли дискретным, для чего внутреннюю поверхность ГК разбивали на четырехугольные области,

в узлах которых могло осуществляться взаимодействие ГК с дисками.

В осевом направлении точки возможного контакта расположены с шагом 3 мм (рис. 2, а), в окружном — под каждым зубом ГК (рис. 2, б и в). С первым диском ГК взаимодействует в сечениях 1–12 (рис. 2, а и б), со вторым — в сечениях 13–22 (рис. 2, а и в). Точки возможного контакта боковых поверхностей зубьев расположены в девяти расчетных сечениях по высоте зубьев (рис. 2, г и д). Векторы сил поверхностного взаи-

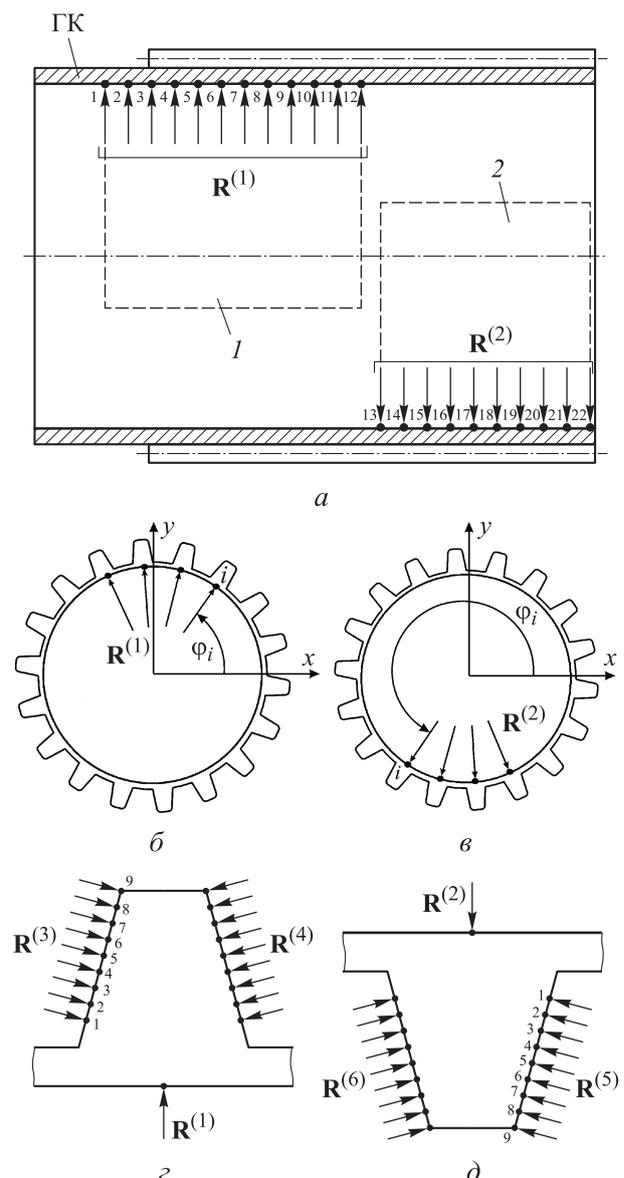


Рис. 2. Схемы расчета взаимодействия элементов СВЗП:

а — схема осевого сечения ГК (1 и 2 — первый и второй диски);

б и в — схемы поперечных сечений ГК 1–12 и 13–22;

г и д — схемы поперечных сечений зубьев ГК 3–12 (г) и 13–22 (д)

модействия ГК с первым и вторым дисками обозначены через  $\mathbf{R}^{(1)} = (R_1^{(1)}, \dots, R_j^{(1)}, \dots, R_{N1}^{(1)})$  и  $\mathbf{R}^{(2)} = (R_1^{(2)}, \dots, R_j^{(2)}, \dots, R_{N2}^{(2)})$ , соответственно, векторы сил поверхностного взаимодействия зубьев —  $\mathbf{R}^{(3)}, \mathbf{R}^{(4)}, \mathbf{R}^{(5)}, \mathbf{R}^{(6)}$ .

Методика определения взаимодействия ГК с дисками основана на использовании модели Винклера. При деформации ГК вдавливается в поверхность диска, представленную конечным числом несвязанных между собой пружин. Для ГК пружины жесткостью  $k_d = 10^6$  Н/м являются односторонними связями, которые работают только на сжатие.

Векторы зазоров между первым диском  $\Delta^{(1)}$  и ГК и между вторым диском и ГК  $\Delta^{(2)}$  определяются выражениями

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)} &= -\mathbf{W}_d^{(1)} + \mathbf{D}^{(11)}\mathbf{R}^{(1)} + \mathbf{D}^{(12)}\mathbf{R}^{(2)} + \mathbf{D}^{(13)}\mathbf{R}^{(3)} + \\ &+ \mathbf{D}^{(14)}\mathbf{R}^{(4)} + \mathbf{D}^{(15)}\mathbf{R}^{(5)} + \mathbf{D}^{(16)}\mathbf{R}^{(6)} + \mathbf{G}^{(d)}\mathbf{U}^{(d1)} + \\ &+ \mathbf{G}^{(g)}\mathbf{U}^{(g)} + \Lambda^{(1)}\mathbf{R}^{(1)}; \\ \Delta^{(2)} &= -\mathbf{W}_d^{(2)} + \mathbf{D}^{(21)}\mathbf{R}^{(1)} + \mathbf{D}^{(22)}\mathbf{R}^{(2)} + \mathbf{D}^{(23)}\mathbf{R}^{(3)} + \\ &+ \mathbf{D}^{(24)}\mathbf{R}^{(4)} + \mathbf{D}^{(25)}\mathbf{R}^{(5)} + \mathbf{D}^{(26)}\mathbf{R}^{(6)} + \mathbf{G}^{(d)}\mathbf{U}^{(d2)} + \\ &+ \mathbf{G}^{(g)}\mathbf{U}^{(g)} + \Lambda^{(2)}\mathbf{R}^{(2)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{W}_d^{(1)}$  и  $\mathbf{W}_d^{(2)}$  — векторы радиального перемещения узловых точек на первом и втором деформирующих дисках при их смещении на эксцентриситет;  $\mathbf{D}^{(km)}$  — матрицы узловых податливостей ГК ( $k = 1, 2; m = 1, 6$ );  $\mathbf{R}^{(1)}$  и  $\mathbf{R}^{(2)}$  — векторы узловых сил взаимодействия ГК с первым и вторым дисками;  $\mathbf{R}^{(3)}$  и  $\mathbf{R}^{(4)}$  — векторы узловых сил взаимодействия ГК с ЖК<sub>1</sub> по рабочим и нерабочим боковым поверхностям зубьев;  $\mathbf{R}^{(5)}$  и  $\mathbf{R}^{(6)}$  — векторы узловых сил взаимодействия ГК с ЖК<sub>2</sub> по нерабочим и рабочим боковым поверхностям зубьев;  $\mathbf{G}^{(d)}$  и  $\mathbf{G}^{(g)}$  — матрицы коэффициентов влияния смещения деформирующих дисков и ГК на зазоры в узловых точках;  $\mathbf{U}^{(d1)} = (u_x^{(d1)}, u_y^{(d1)})^T$  и  $\mathbf{U}^{(d2)} = (u_x^{(d2)}, u_y^{(d2)})^T$  — векторы смещений центров первого и второго дисков вдоль осей  $x, y$ , вызванных упругой деформацией подшипников;  $\mathbf{U}^{(g)} = (u_x^{(g)}, u_y^{(g)}, u_\phi^{(g)})^T$  — вектор смещения ГК как жесткого тела;  $\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}$  — диагональные матрицы, элементами которых являются податливости пружин модели Винклера.

Индекс « $k$ » матриц узловых податливостей ГК  $\mathbf{D}^{(km)}$  и индекс векторов узловых сил соответствуют номеру контактной поверхности, на которой определяются перемещения, а индекс « $m$ » матриц  $\mathbf{D}^{(km)}$  — номеру контактной поверхности, к которой приложены силы. Для

поверхностей введены следующие обозначения: 1 и 2 — части внутренней поверхности ГК, взаимодействующие с первым и вторым дисками (см. рис. 1, а); 3 и 4 — рабочие и нерабочие боковые поверхности зубьев ГК первой ступени; 5 и 6 — нерабочие и рабочие боковые поверхности зубьев второй ступени.

Элемент матриц узловых податливостей  $d_{ij}^{(km)}$  ( $k = 1, 2; m = 3, 6$ ) равен радиальному перемещению  $i$ -й точки под действием нормальной единичной силы, приложенной в  $j$ -й точке.

Коэффициенты матрицы  $\mathbf{G}^{(d)}$ , связывающие смещения дисков с приращениями зазоров в узловых точках на внутренней поверхности ГК,

$$g_{i1}^{(d)} = -\cos \varphi_i; \quad g_{i2}^{(d)} = -\sin \varphi_i,$$

где  $\varphi_i$  — угловая координата узловой точки на внутренней поверхности ГК (см. рис. 2, б и в).

Коэффициенты матрицы  $\mathbf{G}^{(g)}$ , связывающие смещение ГК с приращениями зазоров в узловых точках на внутренней поверхности ГК,

$$g_{i1}^{(g)} = \cos \varphi_i; \quad g_{i2}^{(g)} = \sin \varphi_i; \quad g_{i3}^{(g)} = 0.$$

При сборке СВЗП диски деформируют ГК. Перемещение дисков на эксцентриситет  $e$  приводит к радиальному смещению узловых точек возможного контакта первого  $w_{di}^{(1)}$  и второго  $w_{di}^{(2)}$  дисков, которые являются элементами векторов  $\mathbf{W}_d^{(1)}$  и  $\mathbf{W}_d^{(2)}$ .

Векторы зазоров между узловыми точками боковых поверхностей зубьев первой  $\Delta^{(3)}, \Delta^{(4)}$  и второй  $\Delta^{(5)}, \Delta^{(6)}$  ступеней определяются выражениями

$$\begin{aligned} \Delta^{(3)} &= \Delta_0^{(3)} + \mathbf{D}^{(31)}\mathbf{R}^{(1)} + \mathbf{D}^{(32)}\mathbf{R}^{(2)} + \mathbf{D}^{(33)}\mathbf{R}^{(3)} + \\ &+ \mathbf{D}^{(34)}\mathbf{R}^{(4)} + \mathbf{D}^{(35)}\mathbf{R}^{(5)} + \mathbf{D}^{(36)}\mathbf{R}^{(6)} + \mathbf{G}^{(3)}\mathbf{U}^{(g)}; \\ \Delta^{(4)} &= \Delta_0^{(4)} + \mathbf{D}^{(41)}\mathbf{R}^{(1)} + \mathbf{D}^{(42)}\mathbf{R}^{(2)} + \mathbf{D}^{(43)}\mathbf{R}^{(3)} + \\ &+ \mathbf{D}^{(44)}\mathbf{R}^{(4)} + \mathbf{D}^{(45)}\mathbf{R}^{(5)} + \mathbf{D}^{(46)}\mathbf{R}^{(6)} + \mathbf{G}^{(4)}\mathbf{U}^{(g)}; \\ \Delta^{(5)} &= \Delta_0^{(5)} + \mathbf{D}^{(51)}\mathbf{R}^{(1)} + \mathbf{D}^{(52)}\mathbf{R}^{(2)} + \mathbf{D}^{(53)}\mathbf{R}^{(3)} + \\ &+ \mathbf{D}^{(54)}\mathbf{R}^{(4)} + \mathbf{D}^{(55)}\mathbf{R}^{(5)} + \mathbf{D}^{(56)}\mathbf{R}^{(6)} + \mathbf{G}^{(5)}\mathbf{U}^{(g)} + \\ &+ \mathbf{B}^{(5)}\mathbf{U}^{(b2)}; \\ \Delta^{(6)} &= \Delta_0^{(6)} + \mathbf{D}^{(61)}\mathbf{R}^{(1)} + \mathbf{D}^{(62)}\mathbf{R}^{(2)} + \mathbf{D}^{(63)}\mathbf{R}^{(3)} + \\ &+ \mathbf{D}^{(64)}\mathbf{R}^{(4)} + \mathbf{D}^{(65)}\mathbf{R}^{(5)} + \mathbf{D}^{(66)}\mathbf{R}^{(6)} + \mathbf{G}^{(6)}\mathbf{U}^{(g)} + \\ &+ \mathbf{B}^{(6)}\mathbf{U}^{(b2)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\Delta_0^{(3)}$  и  $\Delta_0^{(4)}$  — векторы начальных зазоров между рабочими и нерабочими поверхностями зубьев первой ступени, т. е. зазоры между зубьями ЖК<sub>1</sub> и зубьями недеформированного (до сборки) ГК;  $\Delta_0^{(5)}$  и  $\Delta_0^{(6)}$  — векторы начальных зазоров между нерабочими и рабочими

поверхностями зубьев второй ступени;  $U^{(b_2)} = u_{\phi}^{(b_2)}$  — угол поворота ЖК<sub>2</sub> вокруг оси  $z$ .

Для определения элементов матриц  $D^{(km)}$  ( $k = 3, 6; m = 1, 2$ ) к каждой узловой точке, расположенной на внутренней поверхности ГК, последовательно прикладывали единичные радиальные силы  $P_j^{(m)} = 1$ . При вычислениях ГК заменяли эквивалентной ортотропной оболочкой. Под действием указанных сил определяли радиальные  $wP_{ij}^{(km)}$  и касательные  $vP_{ij}^{(km)}$  перемещения точек срединной эквивалентной оболочки ГК, а также углы поворота поперечных сечений эквивалентной оболочки ГК  $\theta P_{ij}^{(km)}$ .

Через полученные перемещения вычисляли элементы указанных матриц, равные перемещениям узловых точек в направлении нормали к поверхности  $n-n$  (рис. 3):

$$d_{ij}^{(km)} = sP_{ij}^{(km)} = -wP_{ij}^{(km)} \sin \alpha_i^{(k)} - vP_{ij}^{(km)} \cos \alpha_i^{(k)} - \theta P_{ij}^{(km)} h_i^{(k)} \quad (k = 3, 5; m = 1, 2);$$

$$d_{ij}^{(km)} = sP_{ij}^{(km)} = wP_{ij}^{(km)} \sin \alpha_i^{(k)} + vP_{ij}^{(km)} \cos \alpha_i^{(k)} + \theta P_{ij}^{(km)} h_i^{(k)} \quad (k = 4, 6; m = 1, 2),$$

где  $sP_{ij}^{(km)}$  — нормальные перемещения узловых точек, расположенных на боковых поверхностях зубьев ГК ( $k = 3, \dots, 6$ ), под действием единичных радиальных сил ( $P_j^{(m)} = 1$ ), приложенных к узловым точкам внутренней поверхности ГК ( $m = 1, 2$ );  $\alpha_i^{(k)}$  — углы профиля эвольвент жесткого колеса в узловых точках на  $k$ -й поверхности;  $h_i^{(k)}$  — кратчайшие расстояния от точки  $O$  до нормалей к боковым поверхностям зубьев, проведенных в узловых точках.

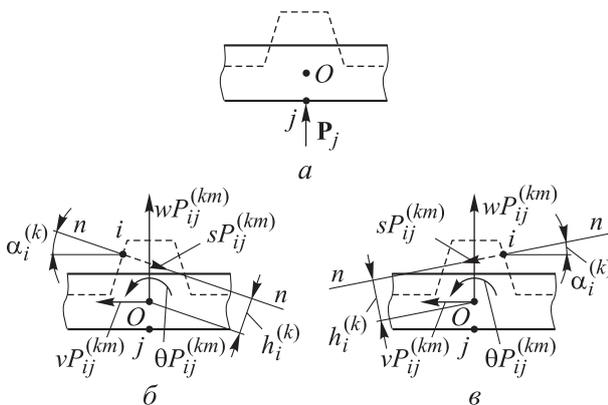


Рис. 3. Схемы расчета элементов матриц узловых податливостей ГК  $D^{(km)}$  ( $k = 3, 6; m = 1, 2$ ):

$a$  — схема приложения сил;

$b$  и  $в$  — схемы перемещений на рабочей ( $k = 3, 4; m = 1, 2$ ) и нерабочей ( $k = 4, 5; m = 1, 2$ ) поверхностях зубьев;

----- ГК; — — эквивалентная оболочка ГК

Коэффициенты матриц узловых податливостей боковых поверхностей зубьев ГК  $D^{(km)}$  ( $k = 3, 6; m = 3, 6$ ) равны перемещениям  $s_{ij}^{(km)}$  узловых точек в направлении нормали к  $k$ -й поверхности под действием единичных нормальных сил  $R_j^m = 1$ , приложенных в узловых точках к  $m$ -й поверхности:

$$d_{ij}^{(km)} = s_{ij}^{(km)} = -sP_{ij}^{(km)} \sin \alpha_j^{(m)} - sT_{ij}^{(km)} \cos \alpha_j^{(m)} - sM_{ij}^{(km)} h_j^{(m)} + \lambda_{ij}^{(km)} \quad (k = 3, 6; m = 3, 5);$$

$$d_{ij}^{(km)} = s_{ij}^{(km)} = -sP_{ij}^{(km)} \sin \alpha_j^{(m)} + sT_{ij}^{(km)} \cos \alpha_j^{(m)} + sM_{ij}^{(km)} h_j^{(m)} + \lambda_{ij}^{(km)} \quad (k = 3, 6; m = 4, 6),$$

где  $sT_{ij}^{(km)}$  и  $sM_{ij}^{(km)}$  — перемещения узловых точек в направлении нормали к  $k$ -й боковой поверхности зубьев ( $k = 3, \dots, 6$ ) под действием единичных касательной силы  $T_j$  и момента  $M_j$ , приложенных к эквивалентной оболочке ГК в узловых точках;  $\alpha_j^{(m)}$  — углы профиля эвольвент жесткого колеса в узловых точках на поверхности с номером  $m$ ;  $\lambda_{ij}^{(km)}$  — нормальные перемещения узловых точек боковых поверхностей зубьев, вызванные деформацией зубьев ГК.

Элементы матриц  $G^{(3)}$ ,  $G^{(4)}$  и  $G^{(5)}$ ,  $G^{(6)}$  учитывают влияние смещения ГК как жесткого целого  $U^{(g)}$  на зазоры в узловых точках боковых поверхностей зубьев первой  $\Delta^{(3)}$ ,  $\Delta^{(4)}$  и второй  $\Delta^{(5)}$ ,  $\Delta^{(6)}$  ступени соответственно.

Для вычисления начальных зазоров между узловыми точками боковых поверхностей зубьев использованы значения упругих радиальных смещений зубьев ГК, определенные в результате расчета упругого взаимодействия элементов СВЗП. Поэтому начальные зазоры вычислены итерационным способом [8, 9]. На первой итерации радиальные смещения зубьев ГК определялись формой деформирующих дисков, смещенных на эксцентриситет, на последующих итерациях — формой деформации ГК.

Схема расчета векторов начальных зазоров в узловых точках между боковыми поверхностями зубьев первой ступени  $\Delta_0^{(3)}$ ,  $\Delta_0^{(4)}$  приведена на рис. 4. Зазоры между рабочими поверхностями зубьев

$$\Delta_0^{(3)} = \left[ r_i (\varphi_i^b - \varphi_i^g) - 0,5 (s_i^b - s_i^g) \right] \cos \alpha_i^{(3)} + w_{i^*} \sin \alpha_i^{(3)}$$

и нерабочими

$$\Delta_{0i}^{(4)} = \left[ r_i \left( \varphi_{i^*}^g - \varphi_{i^*}^b - \frac{2\pi}{z_{b1}} \right) - 0,5(s_i^b - s_i^g) \right] \cos \alpha_i^{(4)} + w_{i^*} \sin \alpha_i^{(4)},$$

где  $i^*$  — номер зуба, для которого определяют зазоры;  $\varphi_{i^*}^g$  и  $\varphi_{i^*}^b$  — угловая координата зубьев ГК и ЖК<sub>1</sub>;  $s_i^b$  и  $s_i^g$  — толщина зуба ЖК<sub>1</sub> и деформированного ГК по окружности радиусом  $r_i$ ;  $w_{i^*}$  — радиальное смещение узловой точки, расположенной на внутренней поверхности ГК под  $i^*$ -м зубом ГК.

Аналогично определяются векторы начальных зазоров в узловых точках между боковыми поверхностями зубьев второй ступени  $\Delta_0^{(5)}$  и  $\Delta_0^{(6)}$ .

В разрешающую систему уравнений должны входить уравнения равновесия деформирующихся дисков, ГК и ЖК<sub>2</sub> (выходного звена). Деформирующие диски находятся в равновесии под действием сил со стороны ГК и подшипников. В математической модели предполагалось, что диски могут только поступательно перемещаться в поперечной плоскости. Поэтому для каждого диска составляли уравнения равновесия  $\sum R_{kx} = 0$  и  $\sum R_{ky} = 0$ .

ГК находится в равновесии под действием сил со стороны дисков  $\mathbf{R}^{(1)}, \mathbf{R}^{(2)}$  и жестких колес  $\mathbf{R}^{(3)}, \mathbf{R}^{(4)}, \mathbf{R}^{(5)}, \mathbf{R}^{(6)}$ . В предлагаемой математической модели ГК может произвольно смещаться только в поперечной плоскости. Поэтому для ГК использованы три условия равновесия:  $\sum R_{kx} = 0, \sum R_{ky} = 0, \sum m_o(\mathbf{R}_k) = 0$ . ЖК<sub>2</sub> находится в равновесии под действием сил со стороны ГК  $\mathbf{R}^{(5)}, \mathbf{R}^{(6)}$ , нормальных сил со стороны стойки и момента сопротивления. В математической модели принято, что ЖК<sub>2</sub> может поворачиваться только в поперечной плоско-

сти вокруг оси вращения  $z$ . Поэтому для ЖК<sub>2</sub> использовано одно уравнение равновесия  $\sum m_o(\mathbf{R}_k) = M_b$ , где  $M_b$  — момент сопротивления, приложенный к выходному звену ЖК<sub>2</sub>.

В матричной форме уравнения равновесия деформирующих дисков, ГК и ЖК<sub>2</sub> имеют вид

$$\mathbf{G}^T \mathbf{R} - \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{M}, \tag{3}$$

где  $\mathbf{G}, \mathbf{R}, \mathbf{U}$  — матрицы и векторы, входящие в состав выражений (1) и (2);  $\mathbf{K} = \text{diag}(k_{1F}, k_{1F}, k_{2F}, k_{2F}, 0, 0, 0, 0)$  — диагональная матрица, учитывающая влияние жесткостей подшипников деформирующих дисков;  $\mathbf{M}$  — вектор внешних нагрузок,  $\mathbf{M} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, M_b)^T$ .

Жесткости деформирующих подшипников первого  $k_{1F}$  и второго  $k_{2F}$  дисков определяют по выражению [14]

$$k_F = \frac{l_p^{0,85}}{4,05 \cdot 10^{-6}} \left( \frac{z_p \sin \alpha}{5} \right)^{0,925} F_r^{0,075},$$

где  $F_r^{(1)}$  и  $F_r^{(2)}$  — радиальные силы, действующие на деформирующие подшипники первого и второго дисков;  $l_p$  и  $z_p$  — длина и число роликов;  $\alpha$  — угол контакта.

После объединения уравнений (1)–(3) и добавления условий, отражающих односторонний характер взаимодействия элементов в узловых точках, получена система разрешающих уравнений

$$\begin{cases} \Delta = -\mathbf{W}_d + \Delta_0 + (\mathbf{D} + \Lambda) \mathbf{R} + \mathbf{G} \mathbf{U}; \\ \mathbf{G}^T \mathbf{R} - \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{M}; \\ \Delta_i \geq 0, \quad i = 1, L; \\ R_i \geq 0, \quad i = 1, L \\ \Delta_i R_i = 0 \quad i = 1, L, \end{cases}$$

где  $\Delta$  — вектор зазоров в односторонних связях,

$$\Delta = (\Delta^{(1)T}, \Delta^{(2)T}, \Delta^{(3)T}, \Delta^{(4)T}, \Delta^{(5)T}, \Delta^{(6)T})^T;$$

$\mathbf{W}_d$  — вектор смещения узловых точек деформирующих дисков,  $\mathbf{W}_d = (\mathbf{W}_d^{(1)}, \mathbf{W}_d^{(2)}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})^T$ ;

$\mathbf{D}$  — блочная матрица узловых податливостей,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^{(11)} & \mathbf{D}^{(12)} & \mathbf{D}^{(13)} & \mathbf{D}^{(14)} & \mathbf{D}^{(15)} & \mathbf{D}^{(16)} \\ \mathbf{D}^{(21)} & \mathbf{D}^{(22)} & \mathbf{D}^{(23)} & \mathbf{D}^{(24)} & \mathbf{D}^{(25)} & \mathbf{D}^{(26)} \\ \mathbf{D}^{(31)} & \mathbf{D}^{(32)} & \mathbf{D}^{(33)} & \mathbf{D}^{(34)} & \mathbf{D}^{(35)} & \mathbf{D}^{(36)} \\ \mathbf{D}^{(41)} & \mathbf{D}^{(42)} & \mathbf{D}^{(43)} & \mathbf{D}^{(44)} & \mathbf{D}^{(45)} & \mathbf{D}^{(46)} \\ \mathbf{D}^{(51)} & \mathbf{D}^{(52)} & \mathbf{D}^{(53)} & \mathbf{D}^{(54)} & \mathbf{D}^{(55)} & \mathbf{D}^{(56)} \\ \mathbf{D}^{(61)} & \mathbf{D}^{(62)} & \mathbf{D}^{(63)} & \mathbf{D}^{(64)} & \mathbf{D}^{(65)} & \mathbf{D}^{(66)} \end{bmatrix};$$

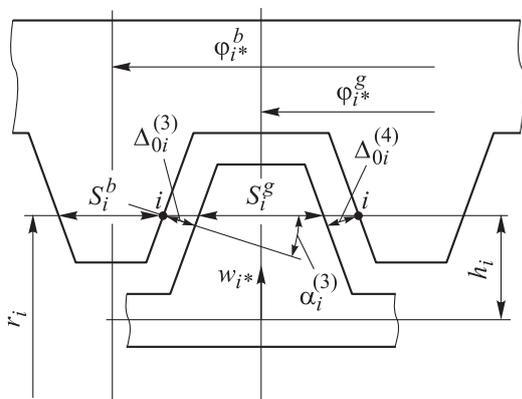


Рис. 4. Схема расчета начальных зазоров в узловых точках между боковыми поверхностями зубьев ГК первой ступени

$\Lambda$  — диагональная блочная матрица, элементами которой являются податливости пружин модели Винклера,

$$\Lambda = \text{diag}(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0});$$

$\mathbf{R}$  — вектор реакций в односторонних связях,

$$\mathbf{R} = (\mathbf{R}^{(1)T}, \mathbf{R}^{(2)T}, \mathbf{R}^{(3)T}, \mathbf{R}^{(4)T}, \mathbf{R}^{(5)T}, \mathbf{R}^{(6)T})^T;$$

$\mathbf{G}$  — блочная матрица, учитывающая смещение упругих звеньев как жестких тел,

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}^{(d)} & \mathbf{0} & \mathbf{G}^{(g)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^{(d)} & \mathbf{G}^{(g)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}^{(3)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}^{(4)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}^{(5)} & \mathbf{B}^{(5)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}^{(6)} & \mathbf{B}^{(6)} \end{pmatrix};$$

$\mathbf{U}$  — вектор смещений звеньев как жестких тел,

$$\mathbf{U} = (\mathbf{U}^{(d_1)T}, \mathbf{U}^{(d_2)T}, \mathbf{U}^{(g)T}, \mathbf{U}^{(b_2)T})^T;$$

$L$  — количество односторонних связей.

Для решения системы задавали начальные зазоры в односторонних связях  $\Delta_0$ , смещения узловых точек деформирующих дисков  $\mathbf{W}_d$ , жесткости деформирующих подшипников первого  $k_{1F}$  и второго  $k_{2F}$  дисков и момент сопротивления на выходном валу  $M_b$ , входящий в состав вектора внешних нагрузок  $\mathbf{M}$ . По результатам расчета определяли значения векторов  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{U}$ ,  $\Delta$ . Вычисления выполняли методом введения восстанавливающих сил [9].

Вектор начальных зазоров  $\Delta_0$  зависит от формы деформированного ГК, определяемой через векторы реакции в односторонних связях  $\mathbf{R}$ . Значения жесткостей подшипников деформирующих дисков  $k_{1F}$  и  $k_{2F}$  зависят от ра-

диальных сил, действующих на подшипники. Поэтому вычисления выполняли итерационным способом.

**Результаты исследования.** Рассматриваемая СВЗП (см. рис. 1) имела следующие параметры: числа зубьев ЖК<sub>1</sub>  $z_{b1} = 124$  и ЖК<sub>2</sub>  $z_{b2} = 120$ ; число зубьев ГК  $z_g = 120$ ; коэффициенты смещения ЖК<sub>1</sub>  $x_{b1} = 1,41$  и ЖК<sub>2</sub>  $x_{b2} = 3,92$ ; коэффициент смещения ГК  $x_g = 1,9$ ; модуль  $m = 1,25$  мм; коэффициент ширины впадин ГК  $K_S^{(g)} = 1,7$ ; коэффициенты ширины впадин ЖК<sub>1</sub>  $K_S^{(b1)} = 1,0$  и ЖК<sub>2</sub>  $K_S^{(b2)} = 3,2$ ; диаметры вершин ЖК<sub>1</sub> и ЖК<sub>2</sub>  $d_{ab1} = d_{ab2} = 157,38$  мм; диаметр вершин ГК  $d_{ag} = 155,88$  мм; толщина ГК под зубчатым венцом  $h_1 = 1,2$  мм; длина ГК  $L = 72$  мм; ширина зубчатого венца ГК  $b_w = 57$  мм; внутренний диаметр ГК  $D = 149,22$  мм; максимальная деформация ГК  $w_0 = 2,48$  мм; диаметр дисков генератора — 138 мм; ширина первого диска — 33 мм; ширина второго диска — 24 мм; ширина ЖК<sub>1</sub> и ЖК<sub>2</sub> — 27 мм. Момент на выходном валу  $M_b = 50$  Н·м. Гибкое и жесткие колеса изготавливали из полимера PLA+, имеющего модуль упругости  $E = 1973$  МПа.

Коэффициент ширины впадины

$$K_S = s_0/e_0,$$

где  $s_0$  — толщина зуба;  $e_0$  — ширина впадины по делительной прямой исходного производящего контура.

Использование жестких колес с широкой впадиной обусловлено необходимостью устранения интерференции зубьев и обеспечения зацепления зубьев во второй ступени (зубчатой муфте). В зубчатой муфте для свободного перемещения зубьев ГК во впадинах жесткого колеса толщина его зуба должна быть значительно больше толщины зуба ГК.

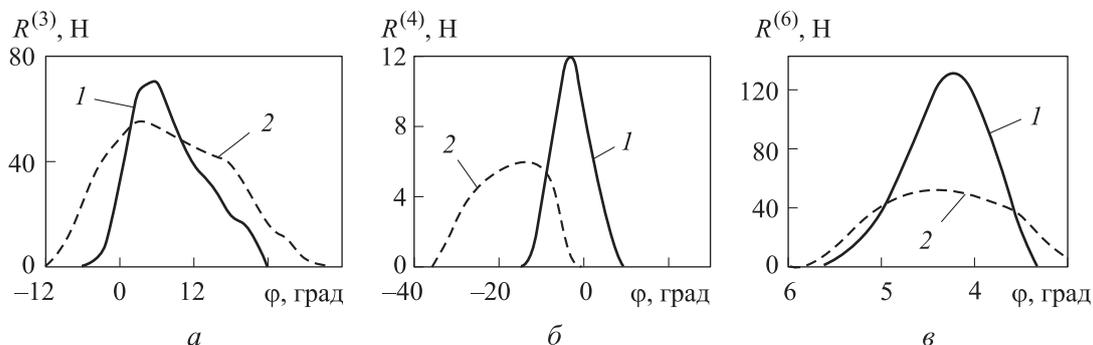


Рис. 5. Распределения сил по рабочим  $R^{(3)}$  (а) и нерабочим  $R^{(4)}$  (б) поверхностям зубьев первой ступени и рабочим поверхностям зубьев второй ступени  $R^{(6)}$  (в): 1 и 2 — полутолны ГК, взаимодействующие и не взаимодействующие с дисками

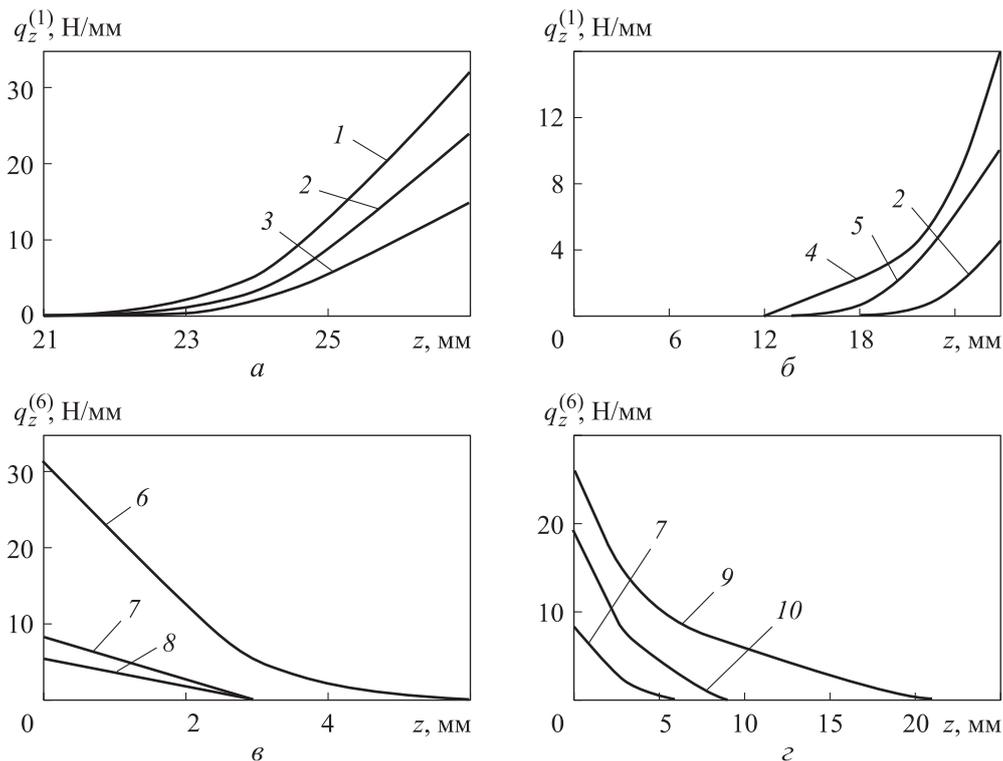


Рис. 6. Распределения погонных сил по рабочим поверхностям зубьев вдоль продольной оси  $z$ :

- $a$  — первая полуволна первой ступени при  $\varphi = 6$  (1),  $-3$  (2) и  $18^\circ$  (3);  
 $б$  — вторая полуволна первой ступени при  $\varphi = 3$  (4),  $24$  (5) и  $-3^\circ$  (1);  
 $в$  — первая полуволна второй ступени при  $\varphi = 21$  (6),  $9$  (7) и  $33^\circ$  (8);  
 $г$  — вторая полуволна второй ступени при  $\varphi = 21$  (6),  $15$  (9) и  $12^\circ$  (10)

Графики распределения сил взаимодействия зубьев в первой и второй ступенях приведены на рис. 5. Угловая координата  $\varphi$  отсчитывалась от большой оси генератора в сторону его вращения. Анализ приведенных зависимостей показал, что на полуволнах ГК, взаимодействующих с дисками, нагрузка на зубья (кривые 1), больше чем на не взаимодействующих полу волнах (кривые 2). В первой ступени максимальная сила взаимодействия между зубьями смещена от большой оси приблизительно на  $6^\circ$  в сторону вращения генератора волн, во второй ступени — примерно на  $20^\circ$ . На первой ступени происходит взаимодействие зубьев по нерабочим поверхностям (см. рис. 2, б). Силы взаимодействия зубьев распределены на дугах, длины которых не превышают  $40^\circ$ .

Распределения погонных сил по рабочим поверхностям зубьев вдоль продольной оси  $z$  показаны на рис. 6. В первой ступени координата  $z$  отсчитывалась от внешнего торца ЖК<sub>1</sub>, во второй ступени — от внутреннего торца ЖК<sub>2</sub> (см. рис. 1). Максимальная нагрузка на зубья смещена к внутренним торцам жестких колес.

Погонная сила имеет менее равномерное распределение в полу волнах, не взаимодействующих с дисками (см. рис. 6, б и в): во второй полу волне первой ступени и первой полу волне второй ступени. В этих полу волнах зубья гибкого и жестких колес взаимодействуют по длине не более 6 мм, что составляет 22 % длины жестких колес. На полу волнах ГК, облегаемых дисками (см. рис. 6, а и г), контакт зубьев на большой оси превышает половину длины жестких колес. Большая неравномерность распределения сил по длине ГК вызвана закручиванием оболочки под действием момента сопротивления.

График крутильной жесткости СВЗП в виде зависимости угла поворота выходного вала  $\theta_b$  от момента сопротивления  $M_b$  приведен на рис. 7. В диапазоне момента сопротивления  $M_b = 30 \dots 65$  Н·м крутильную жесткость можно приближенно считать постоянной с коэффициентом  $k \approx 0,2 \cdot 10^5$  Н·м/рад. При моменте сопротивления  $M_b = 0 \dots 15$  Н·м график крутильной жесткости имеет большой угол наклона, что соответствует коэффициенту крутильной жесткости  $k \approx 330$  Н·м/рад.

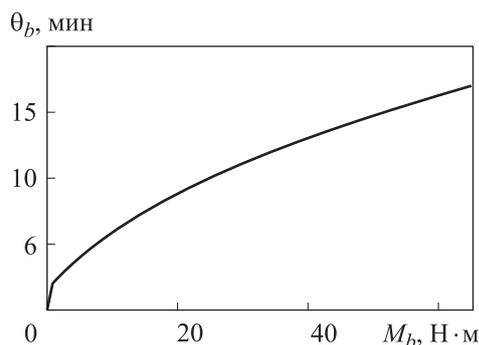


Рис. 7. Зависимость угла поворота выходного вала  $\theta_b$  от момента сопротивления  $M_b$

Снижение крутильной жесткости на начальном участке связано с изменением характера взаимодействия зубьев во второй ступени СВЗП. После сборки передачи ( $M_b = 0$ ) зубья взаимодействуют участками боковых поверхностей, расположенными со стороны наружного торца ЖК<sub>2</sub>. При моменте сопротивления  $M_b > 0,15$  Н·м зоны контакта зубьев смещаются в сторону внутреннего торца, что приводит к уменьшению расстояния между ними в первой и второй ступенях. Следовательно, уменьшается длина, на которой происходит закручивание ГК.

## Выводы

1. Предложена математическая модель СВЗП со второй ступенью в виде зубчатой муфты, учитывающая пространственное упругое взаимодействие ГК, генератора волн и жестких колес. Проведены расчетные исследования СВЗП, изготовленной с помощью аддитивных технологий.

2. В первой ступени максимальная сила взаимодействия между зубьями смещена от большой оси приблизительно на  $6^\circ$  в сторону вращения генератора волн, во второй ступени — примерно на  $20^\circ$ .

3. Силы взаимодействия зубьев распределены на дугах, длина которых не превышает  $40^\circ$ .

4. Нагрузка на зубья смещена к внутренним торцам жестких колес. В полуволнах, не взаимодействующих с деформирующими дисками, зубья гибкого и жестких колес в продольном направлении взаимодействуют по длине не более 6 мм.

5. При моменте на выходном валу  $M_b = 30 \dots 65$  Н·м крутильную жесткость СВЗП можно приближенно считать постоянной с коэффициентом крутильной жесткости  $k \approx 0,2 \cdot 10^5$  Н·м/рад.

## Литература

- [1] Беседина К.С., Лавров Н.А., Барсков В.В. Применение аддитивных технологий полимеров в машиностроении. *Инновационные материалы и технологии в дизайне. Тез. док. IV Всерос. науч.-практ. конф. с участием молодых ученых*. Санкт-Петербург, СПбГИКиТ, 2018, с. 26–27.
- [2] Иванов М.Н. *Волновые зубчатые передачи*. Москва, Высшая школа, 1981. 184 с.
- [3] Гинзбург Е.Г. *Волновые зубчатые передачи*. Ленинград, Машиностроение, 1969. 159 с.
- [4] Шувалов С.А. *Теория и автоматизированное проектирование волновых зубчатых передач*. Дисс. ... док. тех. наук. Москва, МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1986. 354 с.
- [5] Полетучий А.И. *Теория и конструирование высокоэффективных волновых зубчатых механизмов*. Харьков, ХАИ им. М. Жуковского, 2005. 675 с.
- [6] Flavius A. Ardelean. 3D modeling of the harmonic drive using "CATIA". *Annals of the Oradea University. Fascicle of Management and Technological Engineering*, 2007, vol. VI(XVI), pp. 882–885.
- [7] Dhaouadi R., Ghorbel F.H. Modelling and analysis of nonlinear stiffness, hysteresis and friction in harmonic drive gears. *Int. J. Model. Simul.*, 2008, vol. 28, no. 3, pp. 329–336, doi: <https://doi.org/10.1080/02286203.2008.11442485>
- [8] Люминарский И.Е., Люминарский С.Е., Люминарская Е.С. Влияние степени точности зубчатых колес на кинематическую погрешность волновой зубчатой передачи. *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*, 2022, № 4, с. 11–16.
- [9] Люминарский С.Е., Люминарский И.Е. Математическая модель волновой зубчатой передачи с дисковым генератором волн. *Машиностроение и инженерное образование*, 2012, № 2, с. 45–52.
- [10] Тимофеев Г.А. *Разработка методов расчета и проектирования волновых зубчатых передач для приводов следящих систем*. Дисс. ... док. тех. наук. Москва, ИМАШ РАН, 1997. 352 с.

- [11] Тимофеев Г.А., Костиков Ю.В., Фурсяк Ф.И. Волновые редукторы внешнего деформирования. *Вестник машиностроения*, 1977, № 1, с. 21.
- [12] Костиков Ю.В., Тимофеев Г.А., Фурсяк Ф.И. Крутильная жесткость волновых зубчатых передач внешнего деформирования. *Приводы и компоненты машин*, 2013, № 1, с. 10–13.
- [13] Тимофеев Г.А., Костиков Ю.В. Исследование крутильной жесткости волновых зубчатых передач внешнего деформирования с гибким колесом-кольцом. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2012, № 8, с. 3–7. EDN: PBJFSV
- [14] Бейзельман Р.Д., Цыпкин Б.В., Перель Л.Я. *Подшипники качения*. Москва, Машиностроение, 1975. 574 с.

## References

- [1] Besedina K.S., Lavrov N.A., Barskov V.V. [Application of additive polymer technologies in mechanical engineering]. *Innovatsionnye materialy i tekhnologii v dizayne. Tez. dok. IV Vseros. nauch.-prakt. konf. s uchastiem molodykh uchenykh* [Innovative materials and technologies in design. Abs. IV Russ. Sci.-Pract. Conf. With Anticipation of Young Scientists]. Sankt-Peterburg, SPbGIKiT Publ., 2018, pp. 26–27. (In Russ.).
- [2] Ivanov M.N. *Volnovye zubchatye peredachi* [Wave gear transmissions]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1981. 184 p. (In Russ.).
- [3] Ginzburg E.G. *Volnovye zubchatye peredachi* [Wave gear transmissions]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1969. 159 p. (In Russ.).
- [4] Shuvalov S.A. *Teoriya i avtomatizirovannoe proektirovanie volnovykh zubchatykh peredach*. Diss. dok. tekhn. nauk [Theory and computer-aided design of the wave gears. Doc. tech. sci. diss.]. Moscow, Bauman MHTU Publ., 1986. 354 p. (In Russ.).
- [5] Poletuchiy A.I. *Teoriya i konstruirovaniye vysokoeffektivnykh volnovykh zubchatykh mekhanizmov* [Theory and design of high-efficiency wave gear mechanisms]. Kharkov, KhAIM. Zhukovskogo Publ., 2005. 675 p. (In Russ.).
- [6] Flavius A. Ardelean. 3D modeling of the harmonic drive using "CATIA". *Annals of the Oradea University. Fascicle of Management and Technological Engineering*, 2007, vol. VI(XVI), pp. 882–885. (In Russ.).
- [7] Dhaouadi R., Ghorbel F.H. Modelling and analysis of nonlinear stiffness, hysteresis and friction in harmonic drive gears. *Int. J. Model. Simul.*, 2008, vol. 28, no. 3, pp. 329–336, doi: <https://doi.org/10.1080/02286203.2008.11442485>
- [8] Lyuminarskiy I.E., Lyuminarskiy S.E., Lyuminarskaya E.S. The influence of the degree of accuracy gears on the kinematic error of the wave gear. *Fundamentalnye i prikladnye problemy tekhniki i tekhnologii* [Fundamental and Applied Problems of Engineering and Technology], 2022, no. 4, pp. 11–16. (In Russ.).
- [9] Lyuminarskiy S.E., Lyuminarskiy I.E. Mathematical model of a harmonic drive with the disk wave generator. *Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie* [Mechanical Engineering and Engineering Education], 2012, no. 2, pp. 45–52. (In Russ.).
- [10] Timofeev G.A. *Razrabotka metodov rascheta i proektirovaniya volnovykh zubchatykh peredach dlya privodov sledyashchikh sistem*. Diss. dok. tekhn. nauk [Development of calculation and design methods of wave gears for drives of tracking systems. Doc. Tech. sci. diss.]. Moscow, IMASH RAN Publ., 1997. 352 p. (In Russ.).
- [11] Timofeev G.A., Kostikov Yu.V., Fursyak F.I. Wave external deformation reducers. *Vestnik mashinostroeniya*, 1977, no. 1, pp. 21. (In Russ.).
- [12] Kostikov Yu.V., Timofeev G.A., Fursyak F.I. Torsional stiffness of external deformation wave gears. *Privody i komponenty mashin* [Machine Drives and Parts], 2013, no. 1, pp. 10–13. (In Russ.).
- [13] Timofeev G.A., Kostikov Yu.V. Investigation of the torsional stiffness of external deformation wave gears with a flexible wheel-ring. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie* [BMSTU Journal of Mechanical Engineering], 2012, no. 8, pp. 3–7. EDN: PBJFSV (In Russ.).
- [14] Beyzelman R.D., Tsyppkin B.V., Perel L.Ya. *Podshipniki kacheniya* [Rolling bearings]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975. 574 p. (In Russ.).

Статья поступила в редакцию 10.03.2025

## Информация об авторах

**ЛЮМИНАРСКИЙ Игорь Евгеньевич** — доктор технических наук, профессор кафедры «Теория механизмов и машин». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: lie260@mail.ru).

**БАЛАСАНИЯН Вадим Владимирович** — ассистент кафедры «Теория механизмов и машин». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: balasanyanvv@student.bmstu.ru).

**ЛЮМИНАРСКИЙ Станислав Евгеньевич** — кандидат технических наук, доцент кафедры «Теория механизмов и машин». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: katjstas@mail.ru).

### Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Люминарский И.Е., Баласаниян В.В., Люминарский С.Е. Математическая модель сдвоенной волновой зубчатой передачи. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2025, № 6, с. 12–22.

### Please cite this article in English as:

Lyuminarsky I.E., Balasanyan V.V., Lyuminarsky S.E. Mathematical model of the double harmonic drive. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2025, no. 6, pp. 12–22.

## Information about the authors

**LYUMINARSKY Igor Evgenievich** — Doctor of Science (Eng.), Professor, Department of Theory of Mechanisms and Machines. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: lie260@mail.ru).

**BALASANYAN Vadim Vladimirovich** — Assistant, Department of Theory of Mechanisms and Machines. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: balasanyanvv@student.bmstu.ru).

**LYUMINARSKY Stanislav Evgenievich** — Candidate of Science (Eng.), Associate Professor, Department of Theory of Mechanisms and Machines. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: katjstas@mail.ru).



## Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана предлагает читателям учебное пособие

### «Сборка изделий»

**Авторы: Ю.В. Баданина, А.И. Долгих, А.Л. Галиновский**

Рассмотрена технология сборки изделий ракетно-космической техники, описаны методы базирования и сборки отдельных узлов, агрегатов и ракетно-космических систем в целом. Приведены примеры процессов сборки герметичных и негерметичных агрегатов, отсеков сложной конфигурации.

Для студентов и аспирантов, обучающихся по направлениям подготовки 24.05.01 «Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов» (уровень специалитет), 24.04.01 «Ракетные комплексы и космонавтика» (уровень магистратура), а также для инженеров, работающих в области проектирования и создания ракетно-космической техники.

### По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.  
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;  
press@bmstu.ru; <https://press.bmstu.ru>